



# Modelos efectivos de quarks a potencial químico finito en presencia de campos magnéticos intensos

**Sebastián A. Ferraris**

Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

21 de mayo de 2021

**Director:** Dr. Norberto N. Scoccola

**Co-directora:** Dra. Gabriela A. Grunfeld

**Lugar de trabajo:** Departamento de Física Teórica, Centro Atómico Constituyentes -  
Comisión Nacional de Energía Atómica CNEA.

## Resumen

El estudio de las diversas fases en las cuales puede ser encontrada la materia de quarks magnetizada a bajas temperaturas y densidades altas, ha despertado un gran interés en la última década, especialmente en aplicaciones a la astrofísica. Uno de los escenarios naturales para el estudio de esta fenomenología son ciertos objetos compactos llamados magnetares. En general estos objetos estelares son muy densos, fríos y poseen campos magnéticos muy intensos en su superficie, que se estima que sean aún mayores en el interior. Estos estudios requerirían el tratamiento de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en el régimen de bajas energías (menores que  $\sim 1 \text{ GeV}$ ). La QCD es la teoría no-abeliana que describe la interacción fuerte entre los quarks y los gluones. Debido a la complejidad de la QCD en el rango de bajas energías, no ha sido posible hasta el momento calcular los observables hadrónicos en forma precisa, y tampoco comprender en forma detallada los mecanismos del confinamiento y la ruptura espontánea de la simetría quiral. Es en este contexto que se han desarrollado distintas aproximaciones y modelos para estudiar el comportamiento de la materia de quarks en este régimen. En este trabajo final utilizaremos una extensión del modelo de Nambu-Jona-Lasinio en la que se consideran interacciones no-locales y separables. Utilizando dicho modelo se analizará el comportamiento de la materia fría y densa de quarks relativistas, bajo la influencia de un campo magnético uniforme y homogéneo a potencial químico finito, considerando los sabores livianos de quarks,  $u$  y  $d$ . El análisis teórico, llevado a cabo en el presente trabajo, concluye que la materia de quarks bajo las condiciones antes mencionadas, presenta dos fases predominantes. Una de ellas se relaciona con la fase de simetría quiral espontáneamente rota, presente para valores de potencial químico inferiores al potencial químico crítico. Mientras que la otra, está asociada con la simetría quiral (parcialmente) restaurada perteneciente al sector de valores altos de potencial químico. Esta última fase, a su vez, esta subdividida en otras pequeñas fases secundarias producto de la interacción con el campo magnético externo. Finalmente, el potencial químico crítico asociado con la restauración de simetría quiral, presenta un comportamiento decreciente con el campo magnético, sugiriendo la presencia del efecto de *catálisis magnética inversa*.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelos quirales efectivos de quarks relativistas para la cromodinámica cuántica (QCD)</b>	<b>9</b>
2.1. Características del formalismo de la QCD . . . . .	9
2.2. Simetrías de sabor en la teoría de la QCD . . . . .	12
2.3. Aspectos básicos del modelo de Nambu-Jona-Lasinio local (NJL) . . . . .	18
2.4. Generación dinámica de masas . . . . .	20
2.5. Interacciones no-locales y separables . . . . .	22
2.6. Potencial químico finito: Formalismo de tiempo imaginario . . . . .	26
<b>3. Modelo NJL no-local en presencia de campos magnéticos intensos a potencial químico finito</b>	<b>29</b>
3.1. Acción Euclídea . . . . .	29
3.2. Acción bosonizada . . . . .	31
3.3. El potencial termodinámico y la ecuación del gap . . . . .	34
3.3.1. Potencial termodinámico . . . . .	34
3.3.2. Ecuación del Gap . . . . .	36
<b>4. Resultados numéricos</b>	<b>38</b>
4.1. Diagramas de fase en el límite quiral . . . . .	38
4.1.1. Comportamiento a $eB = 0$ . . . . .	39
4.1.2. Comportamiento a $eB$ finito . . . . .	40
4.2. Diagramas de fase para masa corriente finita . . . . .	53
<b>5. Observaciones finales y conclusiones</b>	<b>62</b>

---

<b>Apéndices</b>	<b>69</b>
<b>A. Formalismo de bosonización</b>	<b>70</b>
<b>B. Auto-funciones y transformada de Ritus</b>	<b>74</b>
<b>C. Propiedades de las funciones <math>G_{\vec{p},\vec{p}'}^{\lambda,f}</math></b>	<b>77</b>
<b>D. Expresiones para la determinación de los parámetros del modelo de NJL no-local</b>	<b>80</b>
D.1. Condensados quirales . . . . .	81
D.2. Masa del pión y constante de acoplamiento quark-mesón . . . . .	81
D.3. Constante de decaimiento débil del pión . . . . .	82

# Capítulo 1

## Introducción

Según establece el Modelo Standard de la física de partículas, los hadrones (mesones y bariones) están constituidos por fermiones (quarks) que interactúan entre sí a través de bosones mediadores de la interacción fuerte denominados gluones [1–3]. La teoría de gauge no-abeliana encargada de describir estas interacciones se denomina cromodinámica cuántica (QCD, *quantum chromodynamics*, por su sigla en inglés). En esta teoría, tanto los quarks como los gluones poseen una variable dinámica denominada *carga de color*, la cual es análoga a la carga eléctrica de la electrodinámica cuántica (QED, *quantum electrodynamics*, por su sigla en inglés) y además, es responsable de las interacciones fuertes. La evidencia empírica muestra que en condiciones de baja temperatura y densidad, se produce el fenómeno conocido como confinamiento, en el cual los quarks y los gluones sólo pueden formar estados ligados. Este fenómeno es atribuido al hecho de que las variables de color deben agruparse en estados de *singletes*, cuya carga neta de color es nula y requieren más de un quark o anti-quark para formarse. No obstante, debido a la propiedad de libertad asintótica de la QCD, se propuso la hipótesis que a temperaturas y/o densidades suficientemente altas puede existir el estado de la materia conocido como plasma de quarks y gluones (QGP) [4, 5], que se encuentra caracterizado por el desconfinamiento de color. Esta hipótesis impulsó el estudio teórico de las posibles fases existentes en la QCD en tales condiciones extremas, revelando una estructura de fases compleja como la que se esquematiza en la Fig. 1.1 [6]. Al día de hoy, el estudio de estas fases en la QCD presenta un desafío no solo en términos teóricos sino también experimentales [7–9].

Para caracterizar de manera adecuada las distintas fases existentes en la QCD, es necesario estudiar las propiedades de simetría ante grupos de transformaciones unitarias

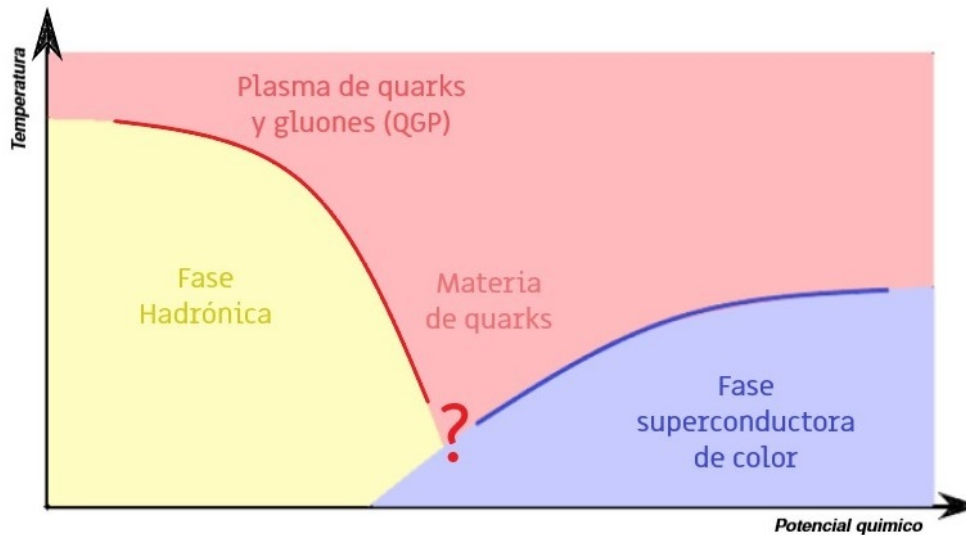


Figura 1.1: Diagrama de fases de la QCD (esquemático)

que actúan sobre los grados de libertad internos de la teoría. Por construcción, la QCD es invariante bajo transformaciones del grupo conocido como  $SU(3)$ , en el espacio de color. Además, es importante mencionar las propiedades de simetría ante transformaciones en el espacio de sabor. El Lagrangiano de la QCD está construido de manera tal de ser aproximadamente simétrico ante transformaciones de sabor de los grupos  $SU(2)$  de isospín y  $SU(2)$  axial en el sector de quarks livianos. No obstante, en el estado de vacío de la QCD, la simetría de sabor  $SU(2)$  axial se rompe debido a las interacciones, siendo posible caracterizar esta fase mediante un parámetro de orden denominado *condensado quiral*, el cual está relacionado con la generación dinámica de masa. De hecho, la ruptura de simetría axial de sabor de la QCD es la responsable de la mayor parte de la masa de los nucleones. La generación de masa dinámica es de gran importancia en el estudio de diagramas de fases de la QCD, esto se debe a que existen evidencias de que esta simetría se encuentra restaurada en la fase QGP. Por otro lado, los resultados experimentales y teóricos indican que a densidades bajas, las transiciones de fase de desconfinamiento y de restauración de la simetría quiral ocurren de forma prácticamente simultánea, y que la transformación de una fase a otra es a través de una transición suave del tipo *crossover* [10,11]. Sin embargo, el mecanismo exacto que da lugar a esta transición simultánea aún no se ha comprendido en forma cuantitativa.

Las condiciones extremas en las cuales se produce el plasma de quarks y gluones son

difíciles de reproducir en el ámbito del laboratorio, dejando pocas alternativas para el estudio experimental de este tipo de plasma. En lo que respecta a recrear, en términos experimentales, las fases correspondientes a altas temperaturas en el diagrama de fases de la QCD, en los últimos decadas se desarrollaron diversos tipos de aceleradores de iones pesados, en los cuales se efectúan experimentos para alcanzar dichas fases. Entre estos se encuentra el Colisionador de Iones Pesados Relativistas (RHIC), en Brookhaven, EE.UU, el colisionador NICA (Nucleon-based Ion Collider Facility) en Dubna, Rusia y el Centro para la investigación de antiprotones e iones (FAIR), en Darmstadt, Alemania. Además, los experimentos, ALICE, ATLAS y CMS son llevados a cabo en el Gran Colisionador de Hadrones del CERN (LHC) en Ginebra, Suiza [12]. En esta clase de dispositivos, el objetivo del experimento es colisionar iones pesados de plomo, plata u oro a energías de centro de masa del orden de  $100 - 200 \text{ GeV}$  o más. Durante el proceso de colisión se alcanzan temperaturas extremadamente altas, mas allá de la temperatura crítica de desconfinamiento,  $T_c \approx 150 \text{ MeV}$  [13]. Los datos experimentales muestran que el QGP se logra formar [14, 15] durante un intervalo de tiempo de aproximadamente  $10 \text{ fm}/c$ , exhibiendo incluso propiedades de equilibrio termodinámico a pesar de su corta duración, y además, dando evidencias que confirman la hipótesis que la transición de fase entre las fases hadrónica y QGP es del tipo *crossover*. Es importante mencionar, que las condiciones experimentales producidas en estos aceleradores de iones pesados, corresponden solo al eje vertical del diagrama de fases de la QCD. No obstante, en las facilidades del FAIR se espera que se puedan alcanzar densidades mucho mayores. Aún así, muchos de los efectos de densidad finita más relevantes no parece que puedan ser observados en el laboratorio.

Uno de los sitios en la naturaleza donde también se cree que pueden existir fases desconfiadas, es en los núcleos de las denominadas estrellas compactas [16], asociadas a la región de altas densidades y bajas temperaturas. Cuando el ciclo de vida de algunas estrellas llega a su fin, las mismas producen una supernova, es decir, una explosión de gran intensidad que expulsa al espacio exterior casi la totalidad de la materia que constituye la estrella, mientras que su núcleo se comprime fuertemente. Los residuos estelares, denominados remanentes, de dicha explosión, pueden convertirse en estrellas compactas cuando la masa de estos objetos se encuentra por debajo del límite de Chandrasekhar [17]. Estos objetos estelares son extremadamente estables y densos, y representan la etapa final de

la vida de este tipo de estrellas. En este estado final, ellas ya no producen reacciones de fusión nuclear y la fuerza gravitatoria es equilibrada con una presión de origen cuántico debido al principio de exclusión de Pauli. Las genéricamente llamadas *estrellas de neutrones* pueden contener una masa de hasta algo más de  $2 M_{sun}$  en un radio de unos  $10 \text{ km}$ , lo que representa una densidad de aproximadamente  $1 - 10\rho_0$ , donde  $\rho_0 = 2,5 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$  es la densidad de saturación nuclear.

Desde un punto de vista experimental, es necesaria la observación de las estrellas de neutrones para caracterizar las posibles fases internas de las mismas. Un análisis posible consiste en realizar curvas de radio-masa a partir de las ecuaciones de estado y modelos de estructura estelar, para posteriormente contrastar estos resultados con las masas y radios observados [18, 19]. Por otro lado, los períodos de rotación de las estrellas y sus variaciones en el tiempo también aportan información sobre las propiedades microscópicas de la materia que compone el núcleo de la estrella [20]. Además, el estudio de las curvas de enfriamiento proporciona información relacionada con propiedades tales como: la emisividad de neutrinos y el calor específico de las fases presentes en el interior de las estrellas.

Como se introdujo anteriormente, la QCD es la teoría fundamental establecida para describir las interacciones fuertes. Aún así, la misma presenta serias complicaciones al momento de realizar los cálculos en el rango de bajas energías. Estas complicaciones se deben al hecho de que la constante de acoplamiento de la teoría crece para escalas de energías por debajo de  $1 \text{ GeV}$  [21], lo que imposibilita el uso de métodos perturbativos para el estudio de las propiedades de la QCD en ese régimen de energías. Como las energías de ligadura de los hadrones están por debajo de este umbral, muchos de los problemas que requieren tratar propiedades hadrónicas, entre ellos, la estructura de fases de la QCD y el fenómeno de desconfinamiento, deben estudiarse mediante técnicas no perturbativas.

Una técnica de primeros principios que ha sido desarrollada en las últimas décadas es la denominada *lattice QCD* (LQCD) o QCD en red, en la cual las ecuaciones de la QCD se resuelven de forma explícita de manera numérica en un espacio-tiempo discretizado [22]. La utilización de esta técnica requiere de computadoras con gran capacidad de cálculo, lo que implica un gran costo en términos económicos y tecnológicos. No obstante,

en los últimos años se han logrado grandes avances que permitieron el cálculo de masas hadrónicas, constantes de acoplamiento, espín y otras cantidades. Sin embargo, la técnica LQCD tiene también sus complicaciones. Una de ellas está relacionada con el hecho que al discretizar la teoría, la cantidad de puntos utilizados en la grilla no puede ser demasiado grande debido a que el problema sería numéricamente irresoluble. Por otro lado, todavía resulta dificultoso hacer cálculos completamente confiables usando las masas de quarks livianos, con lo cual se debe trabajar con valores por encima de los considerados realistas para posteriormente extraer conclusiones basadas en la extrapolación, completando esto con el uso de modelos efectivos. Otra importante limitación de esta técnica a un nivel más fundamental, se manifiesta al estudiar densidades finitas, debido a que las funciones de peso utilizadas para el muestreo estadístico se vuelven imaginarias [23]. A esto se lo conoce con el nombre de *problema del signo* e impide realizar cálculos para valores grandes de  $\mu/T$ . Se han desarrollado varios métodos para tratar de subsanar este problema, pero la región de altas densidades y bajas temperaturas, como la que puede existir en los núcleos de estrellas compactas, aún está lejos de poder ser estudiada utilizando este tipo de técnica.

Otro de los métodos ampliamente utilizados para el estudio de la QCD a bajas energías consiste en desarrollar modelos efectivos. Un modelo efectivo es una simplificación de la teoría completa que, conservando algunos aspectos básicos de la misma, permite reproducir algunas propiedades específicas y realizar predicciones cuantitativas. Entre los diversos modelos ampliamente utilizados en la actualidad se encuentran el *MIT Bag model* [24], el modelo sigma lineal [25] y el modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL). Este último modelo fue desarrollado en la década de 1960 [26] con la finalidad de estudiar las interacciones entre nucleones, y para explicar las grandes masas de los bariones y las masas intermedias o pequeñas de los mesones, a partir de las propiedades de simetría de isospín que exhiben las interacciones nucleares. El Lagrangiano de este modelo es invariante ante transformaciones vectoriales y axiales en el espacio de sabor. Sin embargo, por efecto de las interacciones, el estado fundamental del sistema rompe la simetría frente a transformaciones axiales. Este mecanismo produce que los campos fundamentales adquieran masas dinámicas, dando lugar también a la creación de bosones de Goldstone, los cuales pueden ser identificados como piones en el contexto de la QCD. El modelo de NJL

fue abandonado poco después de que se desarrolló, al mismo tiempo que los quarks fueron reconocidos como los constituyentes fundamentales de los núcleos, en lugar de los protones y los neutrones. No obstante, años más tarde, comenzó a ser usado nuevamente, reinterpretándolo como una teoría efectiva para describir las interacciones entre quarks [27, 28]. El Lagrangiano del modelo de NJL, en su versión mas simple, contiene términos de interacción escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial asumiendo que, en el límite de bajas energías, los grados de libertad gluónicos están absorbidos dentro de una interacción efectiva y local entre quarks. Uno de los defectos severos de este modelo consiste en no contemplar el fenómeno de confinamiento, dado que fue originalmente construido para describir propiedades de nucleones, que no exhiben dicha característica. En este sentido, el modelo plantea una limitación importante, al no poder describir el confinamiento. Sin embargo, en tanto se traten cantidades que no sean sensibles a esta propiedad y se centre la atención sobre las propiedades de simetría quiral, se pueden realizar cálculos de buena confiabilidad en el marco de este modelo. En el caso particular de este trabajo utilizaremos una extensión del modelo de NJL en la cual las interacciones entre quarks serán modeladas mediante corrientes no-locales. Dado que este enfoque puede ser considerado como una extensión no-local del modelo de NJL, lo denotaremos de manera genérica como modelo NJL no-local (nlNJL). De hecho, las interacciones no-locales surgen de forma natural en el contexto de varios enfoques exitosos de la dinámica de quarks a bajas energías [29, 30], y conducen a una dependencia del propagador de quarks con el impulso, la cual puede ser consistente [31, 32] con los resultados de (LQCD) [33, 34]. Por otro lado, se puede ver que la extensión no-local del modelo de NJL, no muestra algunos de los inconvenientes conocidos del modelo local. Los factores de forma no-locales con buen comportamiento pueden regularizar las integrales de bucle de tal forma de conservar las anomalías [35], y las cargas están debidamente cuantificadas. Adicionalmente, se puede evitar la introducción de varios *cut-off* covariantes para lidiar con las integrales de bucles de orden superior [36, 37], mejorando de esta manera el poder predictivo de los modelos. Al mismo tiempo, el carácter de separabilidad de la interacción hace posible conservar mucha de la simpleza del modelo de NJL standard, en comparación con enfoques analíticos más rigurosos de la QCD no-perturbativa. Varias aplicaciones de los modelos nlNJL a la descripción de las propiedades de los hadrones a cero temperatura y densidad se pueden encontrar en las Refs. [38, 39]. Además, este tipo de modelo ha sido aplicado a la

descripción de la transición de restauración quiral a temperatura y densidad finita [40,41].

El objetivo principal de este trabajo es el estudio del comportamiento de la materia de quarks bajo el efecto de un campo magnético intenso a temperatura cero y potencial químico finito utilizando modelos tipo nNJL. La motivación de este estudio radica en la existencia de indicios claros de que en los núcleos de las estrellas compactas se producen campos magnéticos extremadamente intensos. Estos campos magnéticos, pueden llegar a alcanzar intensidades del orden de  $10^{15} G$  en su superficie [42], y de  $10^{18} - 10^{20} G$  en el núcleo [43–45] aunque las estimaciones para estos últimos valores de campo son fuertemente dependientes del modelo utilizado. Por otro lado, experimentos llevados a cabo en el RHIC, por ejemplo, mostraron, en una típica colisión de iones pesados, campos magnéticos del orden de  $10^{19} G = 0,06 GeV^2$  en la región central [46,47]. Es por esta razón, el interés del estudio de los potenciales efectos de los campos magnéticos intensos sobre la materia de quarks, y en particular, como se ve modificado el diagrama de fases de la QCD ante estas condiciones extremas. En este marco, existe un fenómeno ampliamente discutido denominado *catálisis magnética* (CM), en el cual, el comportamiento del condensado quiral es una función creciente del campo magnético externo para la materia de quarks a temperatura y potencial químico bariónico nulos [48]. La interpretación física de este fenómeno nos dice que el campo magnético favorece el anti-alineamiento de los espines del quark y el anti-quark que componen el condensado. Por otro lado, cerca de la temperatura crítica de restauración quiral  $T_c$ , las simulaciones realizadas con LQCD predicen, para condensados de quarks livianos, que  $T_c$  decrece con el aumento del campo magnético [49,50]. Este efecto conocido como *catálisis magnética inversa* (CMI), no está presente en la mayoría de los modelos efectivos básicos, en los cuales, cerca de  $T_c$  los mismos predicen la existencia del fenómeno de CM. De este modo, en esta región del diagrama de fase, los modelos efectivos deberían predecir la existencia del mecanismo de CMI. Como se mencionó anteriormente, en este trabajo analizaremos el comportamiento de la materia de quarks fría y magnetizada a potencial químico finito. En este contexto, las características de la CMI son diferentes de las discutidas anteriormente. Aquí, el potencial químico crítico decrece con el aumento del valor del campo magnético, como se describe en la Ref. [51]. Incluso cuando el modelo de NJL no muestra el efecto de la CMI cerca de  $T_c$ , se observa a cero temperatura y potencial químico finito en la aproximación de campo medio [52–56].

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 2, se presentarán las características generales del formalismo de la QCD, haciendo especial énfasis en las simetrías más relevantes de esta teoría. Se desarrollará el modelo efectivo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) en su versión local para posteriormente, mediante la aproximación de campo medio de Hartree, definir la *ecuación del gap* en su forma más básica. Además, a modo de extensión del modelo NJL (local) se definirán las interacciones generalizadas o no-locales e introduciremos la idea de la función de partición dentro del ensamble gran canónico, para estudiar las funciones de estado de nuestro sistema físico desde el punto de vista de la mecánica estadística. Para finalizar este capítulo, se introducirá el formalismo necesario para incluir en el modelo un potencial químico finito. En el capítulo 3, comenzaremos el estudio del modelo de nNJL en presencia de un campo magnético externo, para ello definiremos la acción Euclídea del sistema para los dos sabores de quarks  $u$  y  $d$  considerados. Luego, presentaremos el formalismo de bosonización, el cual será aplicado a la acción Euclídea para llevar adelante los cálculos desarrollados en este trabajo. Por último, presentaremos las expresiones correspondientes al *gran potencial termodinámico* y a la *ecuación del gap* en presencia de un campo magnético externo y a potencial químico finito. Estas ecuaciones son expresiones centrales en todos los cálculos desarrollados en este trabajo. En el capítulo 4, se mostrarán nuestros resultados, en particular: los diagramas de fases para los casos quiral y no-quiral para diferentes valores de condensados de quarks. Finalmente, en el capítulo 5 se presentarán las conclusiones junto a un análisis detallado de las implicaciones físicas obtenidas luego de las simulaciones numéricas, prestando particular atención a los diagramas de fases de la QCD para ambos casos, quiral y no-quiral. Estos últimos son los ejes centrales de este trabajo final.

# Capítulo 2

## Modelos quirales efectivos de quarks relativistas para la cromodinámica cuántica (QCD)

La cromodinámica cuántica (*QCD* por sus siglas en inglés) es la teoría de gauge no-abeliana de campos fundamentales responsable de describir las interacciones fuertes entre los *quarks* y los *gluones*. Esta teoría fue desarrollada hacia finales de la década de 1960 con la finalidad de comprender la estructura e interacciones de las partículas que componen el núcleo atómico.

### 2.1. Características del formalismo de la QCD

Para describir la QCD es necesario contar con un Lagrangiano que contenga campos fermiónicos, asociados a los *quarks*, y campos de bosones de Gauge para los *gluones*. Este Lagrangiano puede expresarse como:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g \quad (2.1)$$

donde cada término es definido

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}(x) i\gamma_\mu D^\mu \psi(x) \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_m = -\bar{\psi}(x) \hat{m} \psi(x) \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a. \quad (2.4)$$

En la ecuación (2.2)  $\gamma_\mu$  son las matrices de Dirac, además este término contiene una derivada covariante, la cual se define como

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \lambda_a G_\mu^a. \quad (2.5)$$

En la Ec. (2.3)  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t)$  es la matriz diagonal de masas corrientes de los quarks, mientras que la ecuación (2.4) contiene el tensor de campos gluónicos

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c. \quad (2.6)$$

Existen ocho tipos de gluones diferentes ( $a = 1, \dots, 8$ ), cada uno de ellos tiene asociado un tensor de campo gluónico.  $G_\mu^a$  es el potencial cuadvivectorial con los índices espacio-temporales  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $g$  es la constante de acoplamiento de la QCD y  $f^{abc}$  es la constante de estructura del *álgebra de Lie* de  $SU(3)$ . Volviendo a la ecuación (2.5),  $\lambda_a$  son los generadores del grupo  $SU(3)_c$  de color y satisfacen la relación:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i f^{abc} \lambda^c. \quad (2.7)$$

El campo fermiónico presente en el Lagrangiano de la QCD,  $\psi(x)$ , representa a los quarks. Este campo posee grados de libertad internos de color y sabor. En el caso del color, existen 3 estados diferentes: *red*( $r$ ), *green*( $g$ ) y *blue*( $b$ ), mientras que para el sabor, los estados son 6: *up*( $u$ ), *down*( $d$ ), *strange*( $s$ ), *charm*( $c$ ), *bottom*( $b$ ) y *top*( $t$ ). El producto tensorial entre los espacios de sabor, color y Dirac, generan 18 espinores de Dirac. Si solo tomamos en cuenta los dos primeros términos del Lagrangiano de la QCD, Ec. (2.1), junto al primer término de la derivada covariante, Ec. (2.5), obtenemos el Lagrangiano que describe la propagación de los quarks en ausencia de interacción. Esta expresión se conoce con el nombre Lagrangiano de Dirac y tiene la forma

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu - \hat{m})\psi(x) \quad (2.8)$$

El Lagrangiano de Dirac Ec.(2.8) tiene la particularidad de ser invariante ante transformaciones globales del grupo de color  $SU(3)_c$ , dado por el conjunto de matrices unitarias de determinante igual a uno que actúan en el espacio de color. Los estados de los quarks se transforman de acuerdo a la representación fundamental de este grupo, cuya dimensión es 3. En dicho espacio una transformación arbitraria de este grupo puede escribirse como

$$U = \exp(i\lambda_a \theta^a) \quad (2.9)$$

donde las matrices de Gell-Mann son los generadores de la representación y  $\theta^a$  son los parámetros asociados a los generadores. Si en lugar de requerir invariancia ante las transformaciones *globales*, imponemos que el Lagrangiano de Dirac sea invariante bajo transformaciones *locales* del grupo de color  $SU(3)_c$ , podemos construir el Lagrangiano completo de la QCD. Ahora, en cada punto del espacio se efectuará una transformación independiente, convirtiéndose los parámetros  $\theta^a$  en funciones de las coordenadas.

Las transformaciones de gauge aplicadas a los campos fermiónicos asociados a los quarks tendrán dependencia con las coordenadas mediante las funciones  $\theta^a(x)$ . Como la derivada parcial presente en  $\mathcal{L}_D$  actúa sobre estos campos, este término ya no será invariante bajo transformaciones locales, por lo que es necesario introducir en la teoría un conjunto de nuevos campos que eliminen los términos que rompan dicha invarianza. Esto puede lograrse reemplazando la derivada parcial por la derivada covariante definida en la Ec. (2.5), obteniéndose el término  $\mathcal{L}_q$ , Ec. (2.2). Se debe introducir un campo por cada generador del grupo de simetría representando los 8 estados de los gluones, correspondiente a la representación adjunta de  $SU(3)_c$ .

Cabe mencionar que los potenciales cuadvectoresiales  $G_\mu^a$  se deben transformar según

$$G_\mu^a \longrightarrow G_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a - f^{abc} \theta^b G_\mu^c \quad (2.10)$$

a los fines de completar adecuadamente la transformación de los campos fermiónicos. De esta manera el término  $\mathcal{L}_q$  Ec. (2.2) resultará invariante.

Para finalizar, debemos introducir un término de gauge puro que describa la dinámica propia de los campos gluónicos en ausencia de quarks,  $\mathcal{L}_g$  (2.4). Este término se construye imponiendo invariancia ante los grupos de Lorentz y de color. Esto último implica la presencia en el tensor de campo gluónico  $G_{\mu\nu}^a$  el término  $gf^{abc}G_\mu^b G_\nu^c$ , necesario para cancelar términos adicionales generados por la transformación ante el grupo  $SU(3)_c$  local. La adición de estos nuevos términos, no sólo implica la invariancia de  $\mathcal{L}_g$ , sino que, además del término que describe la propagación, genera dos términos adicionales que acoplan los gluones entre sí a través de vértices de tres y cuatro líneas.

En el caso del estudio de la QCD a altas energías, la interacción entre las partículas

del modelo se trata de manera perturbativa. Una de las herramientas más utilizadas para este fin son los diagramas de Feynman, los cuales son representaciones gráficas de los términos contenidos en el desarrollo en serie de potencias de la constante de acoplamiento de la teoría. Debido al proceso de renormalización, la constante de acoplamiento de la QCD tiene dependencia con el impulso transferido  $Q$ . Esta constante de acoplamiento *vestida* de la QCD, formalmente puede expresarse mediante una función del impulso  $Q$  de la forma

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f) \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)} \quad (2.11)$$

donde  $N_f$  es el número de sabores y  $\Lambda_{QCD}$  es el parámetro de escala de la teoría, siendo determinado a partir de datos experimentales para valores de  $Q^2$  grandes, resultando  $\Lambda_{QCD} \approx 200 MeV$ . La constante de acoplamiento tiende a cero para un impulso transferido grande, o lo que es equivalente, la intensidad de la interacción disminuye a corta distancia. A esta propiedad se la denomina *libertad asintótica* y permite estudiar procesos físicos de altas energías mediante un desarrollo perturbativo. Por otro lado, para impulsos transferidos pequeños, y en particular por debajo de  $\Lambda_{QCD}$ , la constante de acoplamiento es mayor a 1, lo que imposibilita la aplicación de un desarrollo perturbativo en este rango de energías. Dado que las escalas de energías de ligadura de los hadrones se encuentran por debajo de este umbral, muchas propiedades de los mismos tales como, sus masas, constantes de acoplamiento, constantes de decaimiento, etc., deben estudiarse aplicando métodos alternativos no-perturbativos. Éste es el caso del mecanismo de confinamiento, para el cual aún hoy no hay explicación cuantitativa satisfactoria. En este rango de energías, los modelos efectivos resultan una herramienta fundamental en el estudio de las propiedades de la QCD.

## 2.2. Simetrías de sabor en la teoría de la QCD

En esta sección se estudiarán las propiedades del Lagrangiano de la QCD ante transformaciones globales en el espacio de sabor de los quarks y su representación natural, el grupo de simetría  $SU(N_f)$  compuesto por matrices unitarias, donde  $N_f$  representa la cantidad de sabores considerados. El resultado de aplicar estas transformaciones al Lagrangiano de la QCD se pone de manifiesto de manera diferente en cada término de la

Ec.(2.1). En el caso de  $\mathcal{L}_q$ , este término permanece invariante,  $\mathcal{L}_g$  no se ve afectado dado que las transformaciones globales no actúan sobre los campos gluónicos. El último término del Lagrangiano de la QCD,  $\mathcal{L}_m$ , no es en general invariante ante transformaciones unitarias arbitrarias en el espacio completo de sabor. No obstante, podríamos obtener ciertas simetrías aproximadas si reducimos el sub-espacio de sabores, enfocándonos sólo en los sabores livianos, esto es,  $u$ ,  $d$  y  $s$ . En nuestro caso particular, trabajaremos con los sabores  $u$  y  $d$ , cuyas masas se encuentran en el intervalo de energías  $4 - 10MeV$ .

Comenzaremos por estudiar la situación de los quarks livianos en el límite de masas nulas (límite quiral). Este caso ideal corresponde a la situación en que el Lagrangiano de la QCD es invariante frente a transformaciones del grupo de sabor  $U(2)$  tanto vectorial como axial. Los fermiones sin masa poseen una helicidad bien definida, esto implica que sus espines están alineados con sus impulsos (caso dextrógiro), o anti-alineados (caso levógiro). En este punto, la definición de helicidad es completamente equivalente a la de quiralidad.

Ahora bien, introduciendo los proyectores para ambas quiralidades tenemos

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad \text{y} \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (2.12)$$

donde  $\gamma_5$  es el operador de quiralidad definido como  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ . Los campos dextrógiros,  $\psi_R(x)$ , y levógiros,  $\psi_L(x)$  puede construirse mediante las relaciones

$$\psi_R(x) = P_R \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_R(x) = \psi_R^\dagger(x) \gamma_0 = \bar{\psi}(x) P_L \quad (2.13)$$

$$\psi_L(x) = P_L \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \bar{\psi}_L(x) = \psi_L^\dagger(x) \gamma_0 = \bar{\psi}(x) P_R. \quad (2.14)$$

En esta nueva base, el Lagrangiano de la QCD para dos sabores de quarks sin masa toma la forma

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\hat{m}=0} = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu D_\mu \psi_L(x) + \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu D_\mu \psi_R(x) + \mathcal{L}_g, \quad (2.15)$$

donde el término  $\mathcal{L}_q$  se descompone en dos sub-espacios ortogonales desacoplados *left* y *right*. Como en  $\mathcal{L}_g$  no aparecen los campos fermiónicos, el Lagrangiano resulta invariante ante el grupo producto de transformaciones quirales de sabor  $U(2)_R \otimes U(2)_L$  dado por

$$U(2)_R : \psi_R(x) \longrightarrow \exp(i\theta_a^R \tau_a) \psi_R(x) \quad (2.16)$$

$$U(2)_L : \psi_L(x) \longrightarrow \exp(i\theta_a^L \tau_a) \psi_L(x) \quad (2.17)$$

con  $a = 0, 1, 2, 3$  donde cada una de ellas actúa de manera independiente sobre el subespacio correspondiente, rotando los estados en el espacio de isospín.  $\tau_0$  es la matriz identidad en el espacio de sabor, mientras que  $\tau_k$  con  $k = 1, 2, 3$ , es el conjunto de matrices de Pauli y  $\theta_a^{R,L}$  son los ángulos de parametrización de dicha transformación. Según sabemos del teorema de Noether, a toda transformación que deje invariante el Lagrangiano le corresponde una corriente conservada, en nuestro caso particular, las corrientes toman la siguiente forma

$$\partial_\mu j_{R,a}^\mu = 0 \quad \longrightarrow \quad j_{R,a}^\mu = \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \tau_a \psi_R(x) \quad (2.18)$$

$$\partial_\mu j_{L,a}^\mu = 0 \quad \longrightarrow \quad j_{L,a}^\mu = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \tau_a \psi_L(x). \quad (2.19)$$

Si integramos la componente  $\mu = 0$  de cada corriente conservada en las coordenadas espaciales, obtendremos los operadores de carga

$$Q_a^R = \int d^3x \psi_R^\dagger(x) \tau_a \psi_R(x) \quad (2.20)$$

$$Q_a^L = \int d^3x \psi_L^\dagger(x) \tau_a \psi_L(x). \quad (2.21)$$

Estos operadores de carga satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los generadores del grupo y actúan como generadores de las transformaciones de sabor.

Otra forma de describir las corrientes conservadas es descomponiéndolas en componentes axial y vectorial, es decir

$$V_a^\mu = j_{R,a}^\mu + j_{L,a}^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \tau_a \psi(x) \quad (2.22)$$

$$A_a^\mu = j_{R,a}^\mu - j_{L,a}^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \tau_a \psi(x) \quad (2.23)$$

con  $\partial_\mu V_a^\mu = \partial_\mu A_a^\mu = 0$ . Entonces, la simetría quiral  $U(2)_R \otimes U(2)_L$  es equivalente a la invariancia ante el grupo  $U(2)_V \otimes U(2)_A$  con transformaciones en el espacio de sabor

$$U(2)_V : \psi(x) \longrightarrow \exp(i\theta_a^V \tau_a) \psi(x) \quad (2.24)$$

$$U(2)_A : \psi(x) \longrightarrow \exp(i\theta_a^A \gamma_5 \tau_a) \psi(x) \quad (2.25)$$

donde la ecuación (2.24) representa el grupo de las transformaciones vectoriales en el espacio de sabor, mientras que la Ec. (2.25) corresponde a transformaciones axiales, las cuales alteran la paridad de un dado estado.

El grupo producto de transformaciones  $U(2)_V \otimes U(2)_A$  puede, en principio, ser descompuesto en otro grupo producto equivalente

$$U(2)_V \otimes U(2)_A = U(1)_V \otimes SU(2)_V \otimes U(1)_A \otimes SU(2)_A. \quad (2.26)$$

Este nuevo grupo puede ser generado a partir las transformaciones descritas en la Ec. (2.17), teniendo en cuenta que el generador  $\tau_0$  conmuta con los demás. De esta forma, cualquier matriz arbitraria perteneciente a este sub-espacio puede ser escrita de la siguiente manera

$$\exp(i\theta_a \tau_a) = \exp(i\theta_0 \tau_0) \exp(i\theta_k \tau_k). \quad (2.27)$$

Como las matrices de Pauli son de traza nula, el factor que las contiene pertenece al grupo de simetría  $SU(2)$ . Respecto al factor asociado con  $a = 0$ , que es proporcional a la identidad mediante  $\tau_0 = \mathbb{I}_{2 \times 2}$ , pertenece al grupo  $U(1)$ .

Como se mencionó antes, el Lagrangiano en el límite quiral resulta invariante ante el grupo producto de transformaciones quirales  $U(2)_R \otimes U(2)_L$ , siendo éste completamente equivalente a  $U(2)_V \otimes U(2)_A$ . Resulta entonces que  $\mathcal{L}_{QCD}^{\hat{m}=0}$  es también invariante bajo esta nueva descomposición del grupo producto Ec. (2.26).

Si consideramos que los quarks tienen masa finita, el desarrollo anterior deja de ser válido y las cuadridivergencias de las corrientes dejan de ser nulas. Se obtiene

$$\partial_\mu V_a^\mu = 2i\bar{\psi}(x) [\hat{m}, \tau_a] \psi(x) \quad (2.28)$$

$$\partial_\mu A_a^\mu = 2i\bar{\psi}(x) \{\hat{m}, \tau_a\} \gamma_5 \psi(x). \quad (2.29)$$

Al considerar en el término  $\mathcal{L}_m$  la aproximación  $m_u = m_d = m_c \neq 0$ , la matriz de masas toma la forma  $\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d) = m_c \mathbb{I}$  y el Lagrangiano se expresa como

$$\mathcal{L}_m = -m_c \bar{\psi}(x) \psi(x) = -m_c [\bar{\psi}_L(x) \psi_R(x) + \bar{\psi}_R(x) \psi_L(x)]. \quad (2.30)$$

Como puede observarse en esta expresión, los sub-espacios *left* y *right* quedan acoplados entre sí, esto implica que sobre ellos no se pueden realizar transformaciones independientes. No obstante, este término continúa siendo invariante ante una transformación en la cual los estados  $\psi_R(x)$  y  $\psi_L(x)$  roten con el mismo ángulo. Dicha transformación de los estados hace que el conmutador de la ecuación (2.28) se anule, lo que implica la conservación de la corriente vectorial. Por lo tanto, las rotaciones de los campos fermiónicos pueden

ser representadas por el grupo de simetría  $U(2)_V$ . En otras palabras, la introducción del término de masas reduce la simetría del Lagrangiano de la siguiente forma

$$U(2)_V \otimes U(2)_A \longrightarrow U(2)_V. \quad (2.31)$$

En el caso de la corriente axial, la ruptura de simetría es pequeña, esto se debe a que las masas corrientes lo son. La conservación de esta magnitud física puede ser recuperada en el límite quiral. Cabe destacar que, si tomamos los valores reales de las masas, es decir  $m_u \neq m_d$  ocasionaremos una ruptura explícita del grupo  $SU(2)_V$ .

De aquí en adelante, en este trabajo se utilizará la aproximación  $m_u = m_d$ , aunque en la naturaleza estas masas son levemente diferentes [57]. Incluso, asumiendo válida esta aproximación, la incorporación de un campo magnético intenso implica la ruptura de la simetría de isospín.

Volviendo a la ecuación (2.26), las transformaciones asociadas a los grupos  $U(1)_V$  y  $U(1)_A$  vienen dadas por

$$U(1)_V : \psi(x) \longrightarrow \exp(i\theta_0^V) \psi(x) \quad (2.32)$$

$$U(1)_A : \psi(x) \longrightarrow \exp(i\gamma_5\theta_0^A) \psi(x). \quad (2.33)$$

La ecuación (2.32) se relaciona con la conservación del número bariónico, mientras que la Ec. (2.33) implica una simetría del Lagrangiano clásico quiral. Esta última no permanece al cuantizar la teoría, dado que la medida de integración en la integral de caminos no es invariante ante dicha transformación. Este fenómeno se conoce con el nombre de *anomalía axial* [58].

Si bien el Lagrangiano de la QCD en el límite quiral posee simetría  $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ , ésta no necesariamente se realiza de forma explícita. En general, dado un conjunto de generadores  $L^j$  de las transformaciones de simetría de  $\mathcal{L}$ , tenemos dos casos:

$$L^j|0\rangle = 0 \quad (2.34)$$

$$L^j|0\rangle \neq 0. \quad (2.35)$$

La ecuación (2.34) se conoce como realización de *Wigner-Weyl*. Mientras que la Ec.(2.35) se denomina realización de *Goldstone-Nambu*. La primera de ellas, implica que los estados

físicos (incluyendo los estados ligados) son invariantes bajo las transformaciones del grupo de simetría. Si asumimos que la simetría quiral se lleva a cabo en el modo *Wigner-Weyl*, podríamos concluir que las masas de los mesones de distinta paridad estarían degeneradas. La Ec.(2.35), establece que para cada generador que no logre aniquilar el vacío, debe existir un bosón sin masa correspondiente al número cuántico de ese generador. Es sabido que el grupo de  $SU(2)_A$  presenta una simetría espontáneamente rota, esto implica que, para el caso de los quarks de masa nula, aparecen tres modos de excitación de los campos de quarks y gluones, llamados bosones de Goldstone. Estos tres bosones son asociados con los piones ( $\pi$ ). Si bien la masa experimental de los mismos no es nula, puede considerarse extremadamente pequeña respecto de la masa de los hadrones.

Matemáticamente, una simetría se manifiesta en la conmutación entre el Hamiltoniano del sistema con el operador correspondiente a la magnitud conservada  $L^j$ , tenemos  $[H, L^j] = 0$ . En el caso de una simetría espontáneamente rota, como lo es  $SU(2)_A$ , el conmutador no deja de ser nulo, sino que el vacío deja de ser invariante bajo las transformaciones del grupo de simetría asociado al operador  $L^j$ , en otras palabras, el estado fundamental está degenerado.

Como ya se mencionó antes, las masas de los quarks  $u$  y  $d$  son aproximadamente iguales y mucho menores que  $\Lambda_{QCD}$ , por lo tanto, es esperable que la simetría quiral  $SU(2)_A \otimes SU(2)_V$  se encuentre aproximadamente conservada. En el caso de la simetría  $SU(2)_V$ , ésta se manifiesta en la degeneración de las masas de los multipletes de isospín bariónicos y mesónicos. Por otro lado, la evidencia experimental y teórica indica que la simetría  $SU(2)_A$  se realiza en modo Goldstone. Como el operador de carga  $Q_A$  cambia la paridad de los estados, la aplicación de esta simetría en el modo *Wigner-Weyl* implicaría que por cada multiplete de isospín exista otro degenerado con paridad opuesta, lo que no es observado en la naturaleza. Además, las masas de los hadrones son considerablemente mayores que las de los quarks livianos, lo que implica la existencia de un mecanismo dinámico de creación de masas, esto lleva a una ruptura de la simetría. En resumen, un modelo que describa de manera correcta la QCD a bajas energías debe tener un Lagrangiano aproximadamente simétrico ante el grupo  $SU(2)_A \otimes SU(2)_V$ , teniendo en cuenta además, la ruptura de simetría axial mediante un mecanismo dinámico de creación de

masa.

Al producirse la ruptura de una simetría en forma espontánea existe, en general, una cantidad que pasa de ser nula a tomar un valor distinto de cero. Dicha cantidad puede entonces tomarse como parámetro de orden que indica si la simetría esta espontáneamente rota o no. En la QCD el parámetro de orden es el *condensado de quarks-antiquarks*  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ . La generación de masa dinámica de los quarks está estrechamente relacionada con la reestructuración del vacío, en el sentido que, la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi$  rompe la simetría quiral, por consiguiente, el estado fundamental pierde la simetría  $SU(2)_A \otimes SU(2)_V$  del Lagrangiano. El condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  puede expresarse de la siguiente manera

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr S(p) \quad (2.36)$$

donde  $S(p)$  es el propagador fermiónico, en este caso de quarks, del Lagrangiano completo de la QCD. La traza está tomada en los espacios de color, sabor y Dirac. Estimaciones teóricas, basadas en el álgebra de corrientes y la regla de la suma en la QCD indican que  $|\langle \bar{f}f \rangle|^{1/3} = 190 - 260$  MeV [59], donde  $f$  representa los sabores  $u$  o el  $d$ . Por otro lado, cálculos realizados con LQCD dan valores de  $|\langle \bar{f}f \rangle|^{1/3} = 231 \pm 8 \pm 6$  MeV [60].

### 2.3. Aspectos básicos del modelo de Nambu-Jona-Lasinio local (NJL)

En esta sección estudiaremos el modelo efectivo de Nambu-Jona-Lasino (NJL). Como ya se mencionó, utilizaremos dos sabores de quarks, es decir,  $u$  y  $d$ . Por lo tanto, el Lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi) = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int} \quad (2.37)$$

donde

$$\mathcal{L}_{free} = \bar{\psi}(x) (i\not{\partial} - m_c) \psi(x) \quad \text{con} \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathcal{L}_{int} = G \left( j_s(x) j_s(x) + \vec{j}_p(x) \cdot \vec{j}_p(x) \right). \quad (2.39)$$

Las corrientes escalares y pseudo-escalares respectivamente, se definen como

$$j_s(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad \text{y} \quad \vec{j}_p(x) = \bar{\psi}(x)i\vec{\tau}\gamma_5\psi(x). \quad (2.40)$$

La expresión (2.38) da cuenta de la dinámica libre de los fermiones, en este caso de los quarks  $u$  y  $d$ . Además, el operador diferencial es definido como  $\not{\partial} = \gamma_4 \partial_4 + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}$ .

El modelo efectivo de NJL no considera interacciones mediadas por gluones, en su lugar, propone una interacción de 4-fermiones, modelada por el término presente en la ecuación (2.39). Representar las interacciones mediante vértices puntuales es equivalente a despreciar el rango de alcance de los gluones, considerando que las mismas son solo de contacto y parametrizadas mediante una constante efectiva característica del modelo,  $G$ . Como las corrientes fundamentales de quarks de la QCD son las corrientes de color  $J_a^\mu = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \lambda_a \psi(x)$ , la interacción local más simple de construir es descrita por la expresión

$$\mathcal{L}_{int}^c = G [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \lambda_a \psi(x)]^2 \quad (2.41)$$

donde la misma preserva la simetría quiral  $U(2)_V \otimes U(2)_A$  [61]. A través de las transformaciones de Fierz [62–64] podemos reescribir la interacción Ec. (2.41), de tal manera de obtener términos en los canales escalar y pseudo-escalar singletes de color y escalar anti-triplete de color. La expresión (2.39) describe el Lagrangiano de la interacción contemplando solo los términos más simples, de tal modo de preservar las simetrías del Lagrangiano original.

La corriente  $j_s(x)$  es del tipo escalar-isoescalar (invariante de Lorentz e isospín), mientras que  $\vec{j}_p(x)$  es del tipo pseudo-escalar isovectorial. Los términos presentes en la Ec. (2.39), compuestos por estas corrientes, son invariantes, por separado, ante transformaciones del grupo  $SU(2)_V$ . No obstante, este no es el caso para el grupo  $SU(2)_A$ , en el cual las corrientes transforman bajo las siguientes expresiones

$$j_s(x) \longrightarrow j_s(x) \cos\theta + \hat{j}_p(x) \cdot \hat{\theta} \sin\theta \quad (2.42)$$

$$\vec{j}_p(x) \longrightarrow \vec{j}_p(x) - j_s(x) \sin\theta \hat{\theta} - \vec{j}_p(x) \cdot \hat{\theta} (1 - \cos\theta) \hat{\theta} \quad (2.43)$$

donde  $\vec{\theta} = \theta \hat{\theta}$  es el vector que determina la dirección y el ángulo de rotación en el espacio de isospín. Estas nuevas corrientes no son invariantes por separado, sin embargo, sumadas de la forma  $j_s(x)j_s(x) + \vec{j}_p(x) \cdot \vec{j}_p(x)$  si lo son. Esta es la combinación más sencilla de términos de interacción que respeta simultáneamente las simetrías  $SU(2)_V$ ,  $SU(2)_A$  y  $U(1)_V$ .

## 2.4. Generación dinámica de masas

Comenzaremos en esta sección, introduciendo la aproximación de campo medio de Hartree al modelo NJL. Esta aproximación consiste en reemplazar en el Lagrangiano de la interacción Ec. (2.39) y (2.40) los términos de la forma  $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2$ , por  $2\bar{\psi}\Gamma\psi\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$  donde  $\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle$  es el valor de expectación en el vacío y  $\Gamma$  representa cualquier operador presente en la interacción. Como el vacío debe ser invariante de Lorentz y además preservar la paridad, el único valor de expectación no-nulo posible es el condensado quark-antiquark  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ , relacionado con la densidad escalar  $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma_0\psi$ . Utilizando la aproximación de Hartree, la ecuación de Dirac toma la forma

$$[i\not{\partial} - \hat{m} + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle]\psi(x) = 0. \quad (2.44)$$

A partir de esto, se puede definir una masa dinámica de la siguiente manera

$$M = m_c + 2G\langle\bar{\psi}\psi\rangle \quad (2.45)$$

generada por una interacción escalar entre fermiones suficientemente fuerte. La expresión (2.44) se denomina *ecuación del gap* y es análoga a la expresión que determina el gap de energía en un superconductor. En la Fig. 2.1 se representa de manera diagramática esta expresión



Figura 2.1: Representación diagramática de la *ecuación del gap* Ec.(2.44). Las líneas negras representan el propagador de quarks "vestido", mientras que las líneas grises el propagador "desnudo". El lazo fermiónico representa el condensado quark-antiquark.

En la aproximación de campo medio de Hartree, el condensado tiene la forma

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -i \text{Tr} [S_F(0)] \quad (2.46)$$

donde  $S_F$  es el propagador de quarks, definido como

$$S_F(x-y) = -i \langle T [\psi(x)\bar{\psi}(y)] \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{\not{p} - M + i\epsilon}. \quad (2.47)$$

En la ecuación (2.46) el propagador fermiónico  $S_F(0)$  representa el lazo cerrado mostrado en la Fig. 2.1, es decir, la línea fermiónica comienza y termina en el mismo punto del espacio-tiempo. Por otro lado, la *ecuación del gap* Ec. (2.44) es autoconsistente, esto se debe a que la expresión del condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  tiene una dependencia con la masa dinámica  $M$ .

La integral  $S_F$  es cuadráticamente divergente, por lo que será necesario un proceso de regularización para evitar dicha divergencia. El proceso más simple consiste en introducir un *cut-off*,  $\Lambda$ , para las componentes espaciales del operador impulso, de este modo la ecuación (2.46) toma la forma

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{N_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda |\vec{p}|^2 dp \frac{M}{\sqrt{|\vec{p}|^2 - M^2}} \quad (2.48)$$

donde  $N_c$  y  $N_f$  son constantes que representan el número de colores y de sabores respectivamente. El condensado quark-antiquark  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , dado por la expresión (2.48), expresa la densidad escalar de la energía negativa de Dirac en el intervalo  $|\vec{p}| \leq \Lambda$ . La *ecuación del gap* describe la interacción de un fermión (quark) con la parte activa del mar de Dirac. De las ecuaciones (2.45) y (2.48) concluimos que

$$M = m_c + \frac{2GN_c N_f}{\pi^2} \int_0^\Lambda |\vec{p}|^2 dp \frac{M}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}}. \quad (2.49)$$

Si analizamos el caso del límite quiral, podemos ver que la ecuación (2.49) tiene una solución no trivial con  $M \neq 0$  cuando la constante de acoplamiento  $G$  excede un valor crítico  $G_{crit} = \pi^2/\Lambda^2$ . En el caso de que  $G > G_{crit}$ , los quarks adquieren una masa dinámica, es decir hay una reestructuración del vacío que implica la aparición de un condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  no-nulo. La simetría quiral es espontáneamente rota y el condensado  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  puede ser utilizado como parámetro de orden de la transición de fase.

Resumiendo lo expuesto anteriormente, los mecanismos con los cuales se realiza la simetría quiral son:

1. **Fase Wigner-Weyl:** En ella  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$ , los fermiones no tienen masa. De manera equivalente, la carga axial  $Q_5 = \int d^3x A_0(x)$  aniquila el vacío ( $Q_5 |0\rangle = 0$ ). En el modelo de NJL este es el caso para  $G < G_{crit}$ .

2. **Fase Nambu-Goldstone:** En ella  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ , los fermiones tienen masa. En esta fase existe un bosón de Goldstone no masivo. La carga axial no aniquila el vacío ( $Q_5 |0\rangle \neq 0$ ). En el modelo de NJL esto sucede cuando  $G > G_{crit}$ .

Para el caso en que  $m_c$  no es nula pero suficientemente pequeña, a pesar de que la masa dinámica nunca es estrictamente cero, se obtiene un comportamiento similar al descrito para  $m_c = 0$ , resultando una curva asintótica. En la Fig. 2.2 puede observarse el comportamiento de la masa dinámica en función de la constante de acoplamiento para los casos quiral y no-quiral respectivamente.

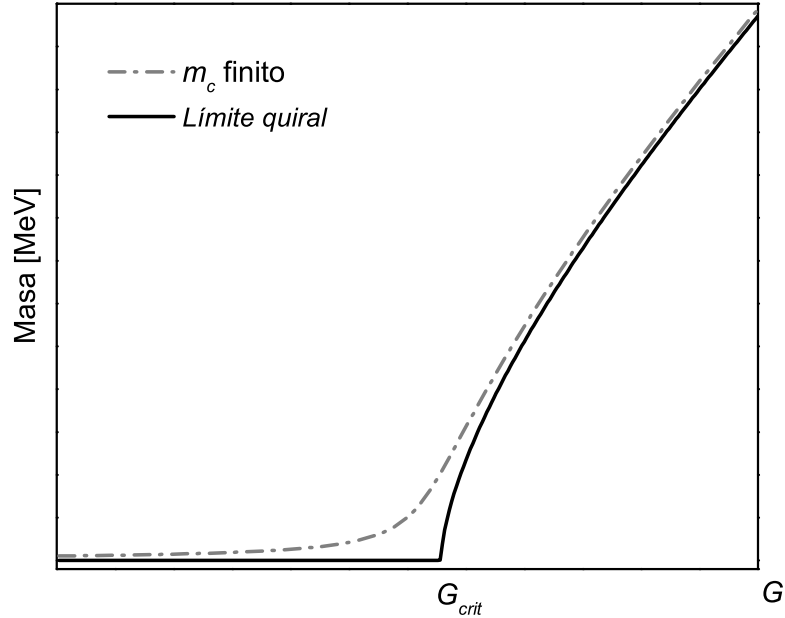


Figura 2.2: Representación de la masa dinámica vs. la constante de acoplamiento  $G$ . Se puede ver las dos realizaciones de la simetría quiral: *Wigner-Weyl* ( $G < G_{crit}$ ) y *Nambu-Goldstone* ( $G > G_{crit}$ ). La línea de trazos (gris) representa el caso de masa finita, mientras que la línea sólida (negra) el caso de masa nula.

## 2.5. Interacciones no-locales y separables

Como se mencionó en la sección anterior, la interacción presente en el Lagrangiano de NJL, Ec. (2.39), es de carácter local. Si bien la naturaleza local de dicha interacción permite simplificar los cálculos, esta trae ciertos inconvenientes tales como divergencia

UV en las integrales y el no confinamiento de los quarks. En el caso de la divergencia de las integrales, se pueden utilizar varios procedimientos de regularización descritos en la literatura, *cut-off* 3D, *Pauli-Villars*, etc. Todos ellos llevan a resultados cualitativamente parecidos. Con respecto al confinamiento, el modelo local conduce a la existencia de quarks no confinados, lo que se contradice con las observaciones experimentales.

Una forma de mejorar los alcances del modelo de NJL local, es mediante la incorporación de interacciones no-locales y separables al Lagrangiano. En el contexto de la dinámica de quarks a bajas energías, un modelo frecuentemente utilizado es el de líquido de instantones (ILM) [38, 65]. Este modelo, describe la interacción entre quarks e instantones mediante un vértice efectivo, no-local y separable. La separabilidad de la interacción, de algún modo, conserva la simpleza del cálculo del modelo local, mientras que la no-localidad, provee un *cut-off* evitando divergencias indeseables en el modelo. En la literatura se utilizan habitualmente reguladores suaves, de tipo *Gaussiano* y *Lorentzianos*, los cuales mantienen las características antes mencionadas. En este trabajo en particular se utilizará un regulador de tipo *Gaussiano*.

Otro modelo que describe una interacción efectiva no-local entre quarks es el de intercambio de un gluón (OGE, por sus siglas en inglés) [66, 67]. Este modelo supone el intercambio de un gluón efectivo y masivo entre los quarks. Consideremos ahora el Lagrangiano de NJL Ec. (2.37), podemos definir la acción efectiva para el modelo OGE de la siguiente forma

$$S = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \bar{\psi}(p) [\not{p} - m_c] \psi(p') + S_{int} \quad (2.50)$$

donde

$$S_{int} = -\frac{g^2}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'_2}{(2\pi)^4} j_\mu^a(p_1, p'_1) D_{ab}^{\mu\nu} j_\nu^b(p_2, p'_2) \quad (2.51)$$

siendo  $g = G\Lambda^2$  la constante de acoplamiento adimensional quark-gluón,  $D_{ab}^{\mu\nu}$  es la matriz que representa el propagador efectivo del gluón y los factores  $j_\mu^a$  representan las corrientes no-locales de quarks. Estas corrientes pueden ser expresadas, mediante las transformaciones de Fierz [62–64], introduciendo el operador  $\Gamma_a = (\mathbb{I}, i\gamma_5\vec{\tau})$  que diferencia los canales

escalar y pseudoescalar respectivamente. De este modo las corrientes toman la forma

$$j_\mu^a(p, p') = g(p, p') \bar{\psi}(p) \Gamma_a \psi(p'). \quad (2.52)$$

Este tipo de modelo se basa en la suposición que los efectos no perturbativos pueden ser tenidos en cuenta modificando el propagador del gluón. Éste proporciona una forma de introducir la no-localidad en la interacción quark-quark. Esta no-localidad, como se mencionó antes, se utiliza para regularizar las divergencias ultravioletas del modelo. Podemos escribir

$$D_{ab}^{\mu\nu}(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g_{\mu\nu} \delta^{ab} D(p_1, p'_1, p_2, p'_2) \quad (2.53)$$

las funciones desconocidas  $g(p, p')$  y  $D(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$  pueden ser reemplazadas por el núcleo de interacción de cuatro puntos definido como

$$K(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = g(p_1, p'_1) D(p_1, p'_1, p_2, p'_2) g(p_2, p'_2). \quad (2.54)$$

Introduciendo los impulsos total y relativo:  $P = p_1 - p_2$  y  $p = (p_1 + p_2)/2$ , respectivamente, podemos utilizar el núcleo de interacción definido en la expresión (2.54) para introducir la idea de separabilidad en la interacción no-local, para ello escribimos

$$K(p, P; p', P') = K_0 g(p) g(p') \delta_{P, P'} \quad (2.55)$$

donde  $K_0$  es una constante proporcional a la constante de acoplamiento  $G$  del modelo de NJL y la delta de Kronecker asegura la conservación del cuadrimomento total. En la Fig. 2.3 se esquematizan los núcleos de interacción de cuatro puntos definidos en las ecuaciones (2.54) y (2.55).

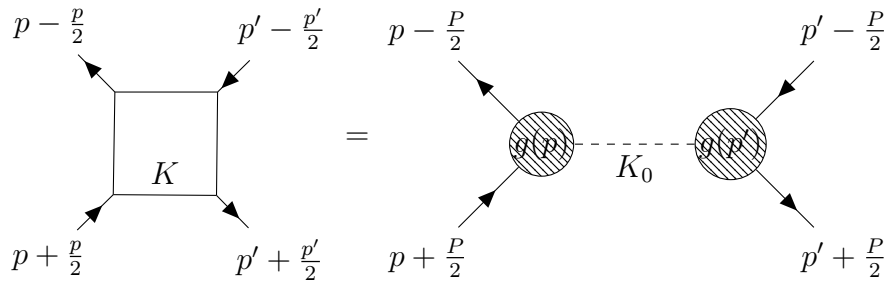


Figura 2.3: Núcleo de interacción de cuatro puntos

De esta forma, dada la expresión antes mencionada para las corrientes no-locales Ec. (2.52), el Lagrangiano en el espacio Euclídeo del modelo de nNJL de dos sabores de

quarks,  $u$  y  $d$ , queda definido como

$$\mathcal{L}_E(\bar{\psi}, \psi) = \left\{ \bar{\psi}(x) (-i\not{\partial} + m_c) \psi(x) - \frac{G}{2} j_a(x) j_a(x) \right\} \quad (2.56)$$

donde las corrientes se expresan como

$$j_a(x) = \int d^4z g(z) \bar{\psi}\left(x + \frac{z}{2}\right) \Gamma_a \psi\left(x - \frac{z}{2}\right). \quad (2.57)$$

La función  $g(z)$  es el factor de forma no-local que caracteriza la interacción efectiva y  $\Gamma_a = (\mathbb{I}, i\gamma_5 \vec{\tau})$ .

Al igual que en el modelo de NJL local, la simetría quiral es espontáneamente rota en la versión no-local, para valores relativamente grandes de la constante de acoplamiento  $G$ . En la aproximación de Hartree, la auto-energía o masa dinámica del quark  $M(p^2)$  responde a la expresión

$$M(p^2) = m_c + 4GN_c N_f g(p^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)}. \quad (2.58)$$

Evaluando  $M(p^2)$  en cero, obtenemos de la ecuación (2.58) la siguiente expresión

$$M(0) = m_c + 4GN_c N_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M(k)}{k^2 + M^2(k)} \quad (2.59)$$

y con la expresión (2.59) podemos reescribir la ecuación (2.58) como

$$M(p^2) = m_c + [M(0) - m_c]g(p^2) = m_c + \bar{\sigma}g(p^2). \quad (2.60)$$

Entonces, para conocer el valor de la masa dinámica  $M(p^2)$ , sólo hace falta determinar el valor de la constante  $\bar{\sigma}$ .

Es interesante notar que, una adecuada elección del regulador no-local y de los parámetros del modelo permiten obtener una cierta forma de confinamiento de los quarks, es decir, imponer condiciones tales que el propagador de quark no tenga polos a energías reales. En el espacio euclídeo esto equivale a que el propagador no tenga polos imaginarios puros.

Muchos trabajos realizados sobre propiedades de mesones en  $SU(2)$  con reguladores gaussianos [68], evidenciaron un buen acuerdo con lo observado experimentalmente. Esta es la razón fundamental de tal elección en el modelo de NJL no-local.

## 2.6. Potencial químico finito: Formalismo de tiempo imaginario

En esta sección extenderemos los alcances de modelo de NJL no-local introduciendo al sistema un potencial químico finito. El método formal utilizado para esta finalidad, se denomina formalismo de *Matsubara* o formalismo de tiempo imaginario.

Comenzaremos por definir la función de partición de un sistema cuántico en equilibrio térmico como

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{Tr} \rho(\beta) \quad (2.61)$$

donde la traza es la suma sobre todos los valores de expectación en cualquier base completa,  $\beta = 1/T$  asumiendo que la constante de Boltzmann sea  $k = 1$ , y  $\rho$  representa la matriz densidad del sistema definida como

$$\rho(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}. \quad (2.62)$$

Aquí  $\mathcal{H}$  es el Hamiltoniano del sistema, que en el ensamble gran canónico se define como

$$\mathcal{H} = H - \mu \hat{N} \quad (2.63)$$

con  $H$  el Hamiltoniano original del sistema,  $\hat{N}$  el operador número de partículas y  $\mu$  el potencial químico.

Conociendo la función de partición y la matriz densidad característica del sistema bajo estudio, podemos definir el promedio de un observable cualquiera, en el ensamble seleccionado, como

$$\langle \hat{A} \rangle_{\beta} = \frac{\text{Tr} \rho(\beta) \hat{A}}{\mathcal{Z}(\beta)} = \frac{\text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}} \hat{A}}{\text{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}}}. \quad (2.64)$$

De manera muy general, el formalismo de Matsubara consiste en reescribir los valores de expectación de los operadores en el ensamble térmico, Ec. (2.64), como nuevos valores de expectación en la teoría cuántica de campos, desarrollando la evolución de los mismos en un tiempo imaginario  $t = i\beta$  [69, 70]. De esta manera, se puede cambiar a un espacio-tiempo con signatura euclídea, en el cual, la traza presente en la Ec. (2.64) requiere que todos los campos bosónico y fermiónicos sean periódicos o anti-periódicos, según sea el caso, respecto a la dirección del tiempo euclídeo, con periodicidad  $\beta$ . En el espacio de

momentos, esto conduce al reemplazo de frecuencias continuas por frecuencias discretas, denominadas frecuencias de Matsubara dadas por

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta} & \text{para bosones} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta} & \text{para fermiones.} \end{cases} \quad (2.65)$$

Desde el punto de vista de las integrales de camino, podemos definir la amplitud de transición en teoría de campos a temperatura cero como

$$\langle \phi(\vec{x}_1, t_1) | \phi(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle \phi_1 | e^{-i\mathcal{H}(t_1-t_2)} | \phi_2 \rangle = N' \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \quad (2.66)$$

donde  $\phi$  es la variable de integración,  $N'$  es una constante de normalización y  $S$  es la acción, definida como

$$S[\phi] = \int_{t_2}^{t_1} dt \int d^3x \mathcal{L} \quad (2.67)$$

aquí  $\mathcal{L}$  representa la densidad Lagrangiana del sistema. La integral funcional está definida en los caminos tales que satisfagan las siguientes condiciones

$$\phi(\vec{x}_1, t_1) = \phi_1 \quad \phi(\vec{x}_2, t_2) = \phi_2 \quad (2.68)$$

con los puntos finales fijos.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.66), podemos reescribir en el argumento de la exponencial el intervalo temporal como  $t_1 - t_2 = -i\beta$ , según el formalismo de Matsubara. De esta manera la función de partición en el ensamble gran canónico queda definida como

$$\mathcal{Z}(\beta) = Tr e^{-\beta\mathcal{H}} = \int d\phi_1 \langle \phi_1 | e^{-\beta\mathcal{H}} | \phi_1 \rangle = N' \int \mathcal{D}\phi e^{-\mathcal{S}} \quad (2.69)$$

donde  $\mathcal{S}$  es la acción euclídea (tiempo imaginario), dada por la expresión

$$\mathcal{S} = S_E + \beta\mu\hat{N} = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left( \mathcal{L}_E + \beta\mu\hat{N} \right). \quad (2.70)$$

Asumiremos que los campos satisfacen las condiciones (anti) periódicas:  $\phi(\vec{x}, \beta) = \pm\phi(\vec{x}, 0)$  según sea el caso, (fermiones) o bosones respectivamente. Recordemos que la conexión entre el espacio de Minkowski y el euclídeo viene dada por las siguientes relaciones [71]

$$\begin{cases} x_4 = ix_0, & \vec{x}_E = \vec{x} \\ p_4 = -ip_0, & \vec{p}_E = \vec{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = x_0^2 - \vec{x}^2 = -(x_4^2 + \vec{x}_E^2) = -x_E^2, & d^4x = -id^4x_E \\ p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = -(p_4^2 + \vec{p}_E^2) = -p_E^2, & d^4p = id^4p_E \end{cases} \quad (2.71)$$

aplicando estas nuevas relaciones, obtenemos:  $\int id^4x \mathcal{L}_M = - \int d^4x_E (-\mathcal{L}_M) = -S_E$ .

Para finalizar, y a modo de resumen, el formalismo de Matsubara implica reemplazar la cuarta componente del momento euclídeo,  $p_4$ , por  $(\omega_n - i\mu)$  siendo  $\omega_n$  las frecuencias discretas de Matsubara definidas en la ecuación (2.65). Bajo esta sustitución las integrales del modelo desarrollado en este trabajo toman la forma general

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} F(p) = \int \frac{dp_4}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} F(p_4, \vec{p}) \longrightarrow T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} F(\omega_n - i\mu, \vec{p}) \quad (2.72)$$

en particular, estudiaremos el sistema en el límite  $T \rightarrow 0$ , puede demostrarse que las integrales de la ecuación (2.72) ahora serán de la forma

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} F(p) = \int \frac{dp_4}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} F(p_4, \vec{p}) \longrightarrow \int \frac{dp_4}{2\pi} \int \frac{d|\vec{p}|}{2\pi^2} |\vec{p}|^2 F(p_4 - i\mu, |\vec{p}|) \quad (2.73)$$

donde la función  $F(p)$  representa cualquiera de los integrandos presentes en las expresiones del modelo utilizado en este trabajo. Es importante resaltar, que solo las cantidades que contienen  $p_4$  dependerán de manera explícita del potencial químico  $\mu$ .

# Capítulo 3

## Modelo NJL no-local en presencia de campos magnéticos intensos a potencial químico finito

En este capítulo desarrollaremos el formalismo teórico necesario para el estudio del comportamiento de la materia de quarks bajo la influencia de campos magnéticos externos intensos. Este tema es de gran importancia en aplicaciones como: la descripción de objetos estelares compactos tales como los *magnetares*, el análisis de colisiones de iones pesados a muy alta energía, la exploración de las etapas tempranas del universo, etc. Como se adelantó en los capítulos anteriores, utilizaremos un modelo de NJL no-local incorporando en la interacción un campo magnético uniforme externo y estático  $\vec{B}$ .

### 3.1. Acción Euclídea

Comencemos por definir la acción Euclídea para nuestro modelo NJL no-local de dos sabores de quarks,  $u$  y  $d$ , como

$$S_E = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(x) (-i\not{D} + m_c) \psi(x) - \frac{G}{2} j_a(x) j_a(x) \right\}. \quad (3.1)$$

Es importante mencionar, que las expresiones utilizadas para el análisis del comportamiento de la materia fría y densa de quarks de este trabajo, se basan en el formalismo teórico descrito en la referencia [72].

Introduciremos ahora en la expresión de la acción Euclídea Ec. (3.1), un acoplamiento con un campo de gauge electromagnético externo  $\mathcal{A}_\mu$ . Esto puede llevarse a cabo, mediante

el siguiente reemplazo

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - i\hat{Q}\mathcal{A}_\mu(x), \quad (3.2)$$

donde  $\hat{Q} = \text{diag}(q_u, q_d)$  es el operador de carga y  $q_u = 2e/3$ ,  $q_d = -e/3$ , son las cargas eléctricas de los quarks. La inclusión de interacciones de gauge de esta naturaleza, en los modelos no-locales como el que se trata en este trabajo, implican un cambio no solo en la parte dinámica del Lagrangiano, sino también en las corrientes no-locales Ec. (2.57) [32, 73, 74]. Es decir,

$$\psi(x - z/2) \longrightarrow \mathcal{W}(x, x - z/2) \psi(x - z/2). \quad (3.3)$$

Una transformación similar se obtiene para  $\bar{\psi}(x + z/2)$ . La función  $\mathcal{W}(s, t)$  se define como

$$\mathcal{W}(s, t) = P \exp \left[ -i \int_s^t dr_\mu \hat{Q} \mathcal{A}_\mu(r) \right] \quad (3.4)$$

donde  $r$  varía en un camino arbitrario entre  $s$  y  $t$ . Cualquiera sea el camino elegido, siempre se podrá construir una corriente conservada. Esto se debe a las condiciones de conservación de las corrientes, las cuales solo fijan la parte *longitudinal* de las mismas. La parte *transversal*, por otro lado, permanece indeterminada. Este es un problema bien conocido en la física nuclear, donde las componentes longitudinales de las corrientes de intercambio se relacionan con las fuerzas fenomenológicas nucleón-nucleón, mientras que las corrientes transversales requieren de un modelo específico que describa el intercambio de mesones [75].

Basados en argumentos de invariancia y simplicidad, una línea recta como camino de integración, resulta ser la elección mas adecuada para el cálculo de la integral de línea Ec. (3.4). Este camino es el más comúnmente utilizado en la literatura [76], y también lo será en este trabajo. Definimos la parametrización de la Ec. (3.4) como

$$r_\mu = s_\mu + \lambda(t_\mu - s_\mu) \quad (3.5)$$

con  $\lambda$  variando de 0 a 1.

En nuestro caso particular, trabajaremos con un campo magnético constante y homogéneo orientado en la dirección del eje  $z$  [72]. Para realizar los cálculos analíticos de

la integral de línea Ec. (3.4), utilizaremos el gauge de Landau, en el cual, el potencial cuadri-vectorial toma la forma  $\mathcal{A}_\mu = Bx_1\delta_{\mu 2}$ . Teniendo en cuenta la parametrización Ec. (3.5) y el gauge de Landau, la función  $\mathcal{W}(s, t)$  Ec. (3.4) resulta

$$\mathcal{W}(s, t) = \exp \left[ -\frac{i}{2} \hat{Q} B (s_1 + t_1) (t_2 - s_2) \right]. \quad (3.6)$$

## 3.2. Acción bosonizada

Para continuar con el desarrollo de los cálculos [72], es conveniente recurrir al formalismo de bosonización. El mismo permite reemplazar los grados de libertad de quarks, que no son observados a bajas energías, por campos escalares y pseudo-escalares  $\sigma(x)$  y  $\vec{\pi}(x)$  respectivamente. En el apéndice A se detalla el desarrollo del formalismo de bosonización. La acción bosonizada se define como

$$S_{bos} = -\ln(\det \mathcal{D}_{x,x'}) + \frac{1}{2G} \int d^4x [\sigma(x)\sigma(x) + \vec{\pi}(x) \cdot \vec{\pi}(x)] \quad (3.7)$$

con

$$\mathcal{D}_{x,x'} = \delta^{(4)}(x - x') (-i\not{D} + m_c) + g(x - x') \gamma_0 \mathcal{W}(x, \bar{x}) \gamma_0 [\sigma(\bar{x}) + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}] \mathcal{W}(\bar{x}, x') \quad (3.8)$$

donde consideramos  $\bar{x} = (x + x')/2$  para los mesones neutrales y la función  $\mathcal{W}$  esta definida en la Ec. (3.6).

En los modelos en los cuales ocurre una ruptura de simetría espontánea, los campos mesónicos pueden tener valores medios no nulos. Por esta razón es conveniente escribir a los mismos en términos de los valores de expectación de vacío y sus fluctuaciones, es decir

$$\sigma(x) = \bar{\sigma} + \delta\sigma(x) \quad (3.9)$$

$$\vec{\pi}(x) = \delta\vec{\pi}(x). \quad (3.10)$$

Asumiremos aquí, que el campo  $\sigma(x)$  tiene un valor de campo medio invariante translacional no-trivial,  $\bar{\sigma}$ , mientras que el valor de campo medio del campo pseudo-escalar  $\pi_i$  es nulo por razones de simetría. Es decir, las ecuaciones (3.9) y (3.10) en la aproximación de campo medio (ACM) serán

$$\sigma(x) = \bar{\sigma} = cte. \quad (3.11)$$

$$\vec{\pi}(x) = \vec{0}. \quad (3.12)$$

Cabe destacar que la suposición de que el valor de expectación  $\bar{\sigma}$  es independiente de  $x$  no implica que el propagador de quark resultante sea invariante translacional. De hecho, se puede demostrar que tal invariancia se rompe debido a la aparición de la llamada fase de *Schwinger*. Nuestra suposición establece que las desviaciones de la invariancia translacional, introducidas por el campo magnético, no se ven afectadas por la dinámica de la teoría. En este sentido y utilizando la aproximación de campo medio definida en las ecuaciones (3.11) y (3.12), tenemos

$$\mathcal{D}_{x,x'}^{ACM} = \text{diag} \left( \mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,u}, \mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,d} \right) \quad (3.13)$$

donde

$$\mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,f} = \delta^{(4)}(x - x') \left( \Pi^f + m_c \right) + \bar{\sigma} g(x - x') \exp [i\Phi_f(x, x')] \quad (3.14)$$

el índice  $f$  varía en los sabores de quarks  $u$  y  $d$ , además, se introdujo el operador  $\Pi^f = -i\cancel{\partial} - q_f B x_1 \gamma_2$ , y se entiende un producto directo con una matriz identidad en el espacio de color. El segundo miembro de la ecuación (3.14) rompe la invariancia translacional, mediante la fase de Schwinger  $\Phi_f(x, x')$ , definida como

$$\Phi_f(x, x') \equiv (q_f B/2) (x_1 + x'_1) (x_2 - x'_2) \quad (3.15)$$

la cual proviene del producto de  $\mathcal{W}(x, \bar{x})\mathcal{W}(\bar{x}, x')$ . De esta forma, la acción bosonizada por unidad de volumen, en la ACM, se puede escribir como

$$\frac{S_{bos}^{ACM}}{V^{(4)}} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2G} - \frac{N_c}{V^{(4)}} \sum_{f=u,d} \text{tr} \ln \left( \mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,f} \right) \quad (3.16)$$

donde  $V^{(4)}$  es un volumen cuadri-dimensional,  $N_c$  es una constante que da cuenta del número de colores de los quarks y  $G$  es la constante de acoplamiento del modelo. La traza presente en el segundo término de la ecuación (3.16) es tomada sobre los espacios de sabor y color respectivamente. Para los espacios de coordenadas y de Dirac, es conveniente realizar la transformada de Ritus de  $\mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,f}$  [77]. Ésta se define como

$$\mathcal{D}_{\bar{p},\bar{p}'}^{ACM,f} = \int d^4x d^4x' \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x) \mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,f} \mathbb{E}_{\bar{p}'}(x') \quad (3.17)$$

donde  $\mathbb{E}_{\bar{p}}(x)$  y  $\bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x)$ , con  $\bar{p} = (k, p_2, p_3, p_4)$  son las funciones de Ritus. Las definiciones y propiedades de esta base se describen en el apéndice B. El índice  $k$  es un número entero que representa los niveles de energía de Landau. Usando las propiedades de las funciones

de Ritus, podemos obtener

$$\mathcal{D}_{\bar{p},\bar{p}'}^{ACM,f} = \hat{\delta}_{\bar{p},\bar{p}'} P_{k,s_f} \left( -s_f \sqrt{2k |q_f B| \gamma_2} + p_{||} \cdot \gamma_{||} + m_c \mathcal{I} \right) + \bar{\sigma} \sum_{\lambda=\pm} G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f} \Delta^\lambda \quad (3.18)$$

donde  $\hat{\delta}_{\bar{p},\bar{p}'}$  es una forma abreviada de escribir  $(2\pi)^4 \delta_{kk'} \delta(p_2 - p'_2) \delta(p_3 - p'_3) \delta(p_4 - p'_4)$ , e introducimos las definiciones  $s_f = \text{sign}(q_f B)$ ,  $p_{||} = (p_3, p_4)$ ,  $\gamma_{||} = (\gamma_3, \gamma_4)$ ,  $\Delta^+ = \text{diag}(1, 0, 1, 0)$ ,  $\Delta^- = \text{diag}(0, 1, 0, 1)$ , y el proyector  $P_{k,\pm 1} = (1 - \delta_{k0}) \mathcal{I} + \delta_{k0} \Delta^\pm$ . Las funciones  $G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f}$  se definen como

$$G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f} = \int d^4 x d^4 x' E_{\bar{p}\lambda}^*(x) g(x - x') \exp[i\Phi_f(x, x')] E_{\bar{p}'\lambda}(x') \quad (3.19)$$

la forma explícita de la función  $E_{\bar{p}\lambda}(x)$  se muestra en la Ec. (B.5).

Como se muestra en el apéndice C,  $G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f}$  es diagonal en  $\bar{p},\bar{p}'$ . Por lo tanto podemos escribir  $G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f} = \hat{\delta}_{\bar{p},\bar{p}'} g_{k,p_{||}}^{\lambda,f}$ , donde

$$g_{k,p_{||}}^{\lambda,f} = \frac{4\pi}{|q_f B|} (-1)^{k_\lambda} \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} \bar{g}(p_\perp^2 + p_{||}^2) \exp(-p_\perp^2 / |q_f B|) L_{k_\lambda}(2p_\perp^2 / |q_f B|), \quad (3.20)$$

con las definiciones  $k_\pm = k - 1/2 \pm s_f/2$  y  $p_\perp = (p_1, p_2)$ , mientras que  $\bar{g}(p^2)$  es la transformada de Fourier de  $g(x)$  y  $L_m(x)$  son los polinomios de Laguerre, con la convención usual  $L_{-1}(x) = 0$ .

Definiendo ahora la masa constituyente de los quarks, en presencia de un campo magnético externo, como

$$M_{k,p_{||}}^{\lambda,f} = (1 - \delta_{k_\lambda,-1}) m_c + \bar{\sigma} g_{k,p_{||}}^{\lambda,f}, \quad (3.21)$$

llegamos a  $\mathcal{D}_{\bar{p},\bar{p}'}^{ACM,f} = \hat{\delta}_{\bar{p},\bar{p}'} \mathcal{D}_{k,p_{||}}^f$ , donde

$$\mathcal{D}_{k,p_{||}}^f = P_{k,s_f} \left( -s_f \sqrt{2k |q_f B| \gamma_2} + p_{||} \cdot \gamma_{||} \right) + \sum_{\lambda=\pm} M_{k,p_{||}}^{\lambda,f} \Delta^\lambda. \quad (3.22)$$

Ahora bien, utilizando la Ec. (B.19) y escribiendo explícitamente la traza sobre el espacio de coordenadas, tenemos

$$\text{tr} \ln \left( \mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,f} \right) = \frac{N_c}{2\pi} \int d^4 x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2 p_{||}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_2}{2\pi} \text{tr}_D \left[ \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) \ln \left( \mathcal{D}_{k,p_{||}}^f \right) \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x) \right] \quad (3.23)$$

donde  $tr_D$  representa la traza sobre el espacio de Dirac. Usando la propiedad cíclica de la traza junto a la ecuación (B.11), esta expresión se reduce a

$$tr \ln \left( \mathcal{D}_{x,x'}^{ACM,f} \right) = V^{(4)} N_c \frac{|q_f B|}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} tr_D \left[ P_{k,s_f} \ln \left( \mathcal{D}_{k,p_{\parallel}}^f \right) \right]. \quad (3.24)$$

La matriz entre paréntesis en la Ec. (3.24) no es diagonal en el espacio de Dirac, por lo tanto es conveniente utilizar la identidad  $tr \ln A = \ln \det A$ . Luego de calcular el determinante y reemplazarlo en la ecuación (3.16), obtenemos la expresión para la acción euclídea por unidad de volumen, en la aproximación de campo medio

$$\frac{S_{bos}^{ACM}}{V^{(4)}} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2G} - N_c \sum_{f=u,d} \frac{|q_f B|}{2\pi} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[ \ln \left( p_{\parallel}^2 + \left( M_{0,p_{\parallel}}^{\lambda_f,f} \right)^2 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \Delta_{k,p_{\parallel}}^f \right] \quad (3.25)$$

donde  $\lambda_{f=u,d} = +(-)$  para  $s_{f=u,d} = +1(-1)$ , y  $\Delta_{k,p_{\parallel}}^f$  se define como

$$\Delta_{k,p_{\parallel}}^f = \left( 2k |q_f B| + p_{\parallel}^2 + M_{k,p_{\parallel}}^{+,f} M_{k,p_{\parallel}}^{-,f} \right)^2 + p_{\parallel}^2 \left( M_{k,p_{\parallel}}^{+,f} - M_{k,p_{\parallel}}^{-,f} \right)^2. \quad (3.26)$$

### 3.3. El potencial termodinámico y la ecuación del gap

#### 3.3.1. Potencial termodinámico

En el contexto de la mecánica estadística podemos definir una función de partición encargada de describir todas las funciones de estado del sistema cuántico bajo estudio. En particular, y dentro del ensamble gran canónico, podemos definir la gran función de partición en la aproximación de campo medio a temperatura cero y potencial químico finito, de la siguiente manera

$$\mathcal{Z}^{ACM}(\mu, B) = e^{-S_{bos}^{ACM}(\mu, B)} \quad (3.27)$$

donde  $S_{bos}^{ACM}(\mu, B) \equiv S_{\mu, B}^{ACM}$  es la acción bosonizada en la aproximación de campo medio a temperatura cero y a potencial químico finito definida en la Ec. (3.25). El gran potencial termodinámico viene dado por

$$\Omega_{\mu, B}^{ACM} = - \left( V^{(4)} \right)^{-1} \ln \left[ \mathcal{Z}^{ACM}(\mu, B) \right] = \frac{S_{\mu, B}^{ACM}}{V^{(4)}} \quad (3.28)$$

es decir, de manera explícita tenemos

$$\Omega_{\mu, B}^{ACM} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2G} - N_c \sum_{f=u,d} \frac{|q_f B|}{2\pi} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[ \ln \left( p_{\parallel}^2 + \left( M_{0,p_{\parallel}}^{\lambda_f,f} \right)^2 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \Delta_{k,p_{\parallel}}^f \right] \quad (3.29)$$

con  $\Delta_{k,p_{||}}^f$  definida en la ecuación (3.26). Las funciones presentes en el argumento de la integral en la Ec. (3.29) no poseen un buen comportamiento en el intervalo de integración, es decir, las integrales son divergentes. Es por esta razón que es necesario implementar un proceso de regularización para evitar las divergencias. Usaremos una prescripción similar a la descrita en la referencia [41], definida como

$$\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg} = \Omega_{\mu,B}^{ACM} - \Omega_{\mu,B}^{free} + \Omega_{\mu,B}^{free,reg} \quad (3.30)$$

donde  $\Omega_{\mu,B}^{free,reg}$  se expresa como

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu,B}^{free,reg} = & -\frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u,d} (q_f B)^2 \left[ \zeta'(-1, x_f) + \frac{x_f^2}{4} - \frac{1}{2} (x_f^2 - x_f) \ln(x_f) \right] \\ & - \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{k,f=u,d} \theta(\mu - S_{kf}) \alpha_k |q_f B| \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - S_{kf}^2} - S_{kf}^2 \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - S_{kf}^2}}{S_{kf}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

con

$$\alpha_k = 2 - \delta_{k,0} \quad (3.32)$$

$$S_{kf} = \sqrt{m_c^2 + 2k |q_f B|} \quad (3.33)$$

$$x_f = \frac{m_c^2}{2 |q_f B|} \quad (3.34)$$

$$\zeta'(-1, x_f) = \left. \frac{d\zeta(z, x_f)}{dz} \right|_{z=-1} \quad (3.35)$$

siendo  $\zeta(z, x_f)$  la función Zeta de Hurwitz, definida como

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{2} a^{-s} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + 2 \int_0^\infty (a^2 + y^2)^{-s/2} \{ \sin [s \tan^{-1}(y/a)] \} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}. \quad (3.36)$$

En el término  $\Omega_{\mu,B}^{free}$  se preserva la interacción con el campo magnético y se desprecia la interacción entre partículas del modelo, esto es,  $\bar{\sigma} = 0$ . Bajo esta nueva prescripción el

gran potencial termodinámico regularizado en la ACM toma la forma

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\mu,B}^{ACM,reg} = & \frac{(\bar{\sigma}\Lambda)^2}{2g} + N_c \sum_{f=u,d} \frac{|q_f B|}{2\pi} \int \frac{dp_3 dp_4}{4\pi^2} \\
 & \times \left[ \ln \left( \frac{p_{\parallel}^2 + m_c^2}{p_{\parallel}^2 + (M_{0,p_{\parallel}}^{\lambda,f})^2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( \frac{(2k|q_f B| + p_{\parallel}^2 + m_c^2)^2}{\Delta_{k,p_{\parallel}}^f} \right) \right] \\
 & - \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{f=u,d} (q_f B)^2 \left[ \zeta'(-1, x_f) + \frac{x_f^2}{4} - \frac{1}{2} (x_f^2 - x_f) \ln(x_f) \right] \\
 & - \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_{k,f=u,d} \theta(\mu - S_{kf}) \alpha_k |q_f B| \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - S_{kf}^2} - S_{kf}^2 \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - S_{kf}^2}}{S_{kf}} \right) \right], \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

donde  $g = G\Lambda^2$  es un parámetro adimensional relacionado con la intensidad de la interacción, y la integración se realiza sobre las variables  $p_3$  y  $p_4$  con el reemplazo en la cuarta componente del momento, dado por  $p_4 \rightarrow (p_4 - i\mu)$ .

De esta manera queda definido el gran potencial termodinámico regularizado en presencia de un campo magnético externo a potencial químico finito y temperatura cero, en la aproximación de campo medio.

### 3.3.2. Ecuación del Gap

Como se desarrolló en la sección anterior, la ecuación (3.37) muestra la expresión del gran potencial termodinámico regularizado en el contexto de este trabajo. En lo que sigue, debemos encontrar los valores de sigma  $\bar{\sigma}$  que minimicen al gran potencial termodinámico  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$ , es decir, debemos encontrar las soluciones a la ecuación

$$\frac{\partial \Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}}{\partial \bar{\sigma}} = 0, \tag{3.38}$$

y luego de hacer los cálculos correspondientes obtenemos

$$\frac{\bar{\sigma}\Lambda^2}{g} = N_c \sum_{f=u,d} \frac{|q_f B|}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda=\pm} \hat{A}_{k,p_{\parallel}}^{\lambda,f} g_{k,p_{\parallel}}^{\lambda,f}, \tag{3.39}$$

donde hemos definido

$$\hat{A}_{k,p_{\parallel}}^{\pm,f} = \frac{M_{k,p_{\parallel}}^{\mp,f} \left( 2k |q_f B| + p_{\parallel}^2 + M_{k,p_{\parallel}}^{-,f} M_{k,p_{\parallel}}^{+,f} \right) + p_{\parallel}^2 \left( M_{k,p_{\parallel}}^{\pm,f} - M_{k,p_{\parallel}}^{\mp,f} \right)}{\Delta_{k,p_{\parallel}}^f} \quad (3.40)$$

con  $M_{k,p_{\parallel}}^{\pm,f}$ ,  $g_{k,p_{\parallel}}^{\lambda,f}$  y  $\Delta_{k,p_{\parallel}}^f$  definidas en las ecuaciones (3.21), (3.20) y (3.26) respectivamente. Además, es importante mencionar que la integración presente en la ecuación (3.39) se efectúa sobre las variables  $p_3$  y  $p_4$ , con el reemplazo en la cuarta componente del momento, dado por  $p_4 \rightarrow (p_4 - i\mu)$ . De esta forma queda definida la *ecuación del gap* en presencia de un campo magnético externo a temperatura cero y potencial químico finito, en la aproximación de campo medio.

# Capítulo 4

## Resultados numéricos

En este capítulo se mostrarán los resultados numéricos obtenidos, en el marco del modelo de NJL no-local en presencia de un campo magnético intenso y a potencial químico finito. Para realizar dichas simulaciones se deben fijar los parámetros que aparecen en el Lagrangiano efectivo, Ec. (3.1), así como el factor de forma en el espacio de momentos  $g(p)$ . En esta tesis se utilizará un factor de forma gaussiano, es decir

$$g(p^2) = \exp(-p^2/\Lambda^2) \quad (4.1)$$

donde el parámetro  $\Lambda$  describe el rango de la interacción quark-quark. Dicho parámetro junto con la masa corriente  $m_c$  y la constante de acoplamiento  $G$  constituyen los tres parámetros que definen completamente el modelo. En lo que sigue se considerarán dos situaciones. La primera que, corresponde al límite quiral en que se fija  $m_c = 0$ , será analizada en la Sec.4.1. Esta situación, aunque no es física, permite identificar más claramente las posibles transiciones de fase y por lo tanto es de utilidad desde el punto de vista teórico. La segunda situación será discutida en la Sec.4.2 y corresponde a la situación más realista en que se considera un valor finito para la masa corriente  $m_c$ . La manera en que se determinan los parámetros del modelo, así como los valores utilizados para los mismos, se discutirá en cada una de las secciones mencionadas.

### 4.1. Diagramas de fase en el límite quiral

En esta sección analizaremos el caso de masa corriente nula ( $m_c = 0$ ). En este caso los parámetros del modelo de NJL no-local son: el *cut-off* covariante  $\Lambda$  y la constante de acoplamiento adimensional  $g = G\Lambda^2$ . Los mismos fueron obtenidos fijando un valor típico

para la constante de decaimiento débil del pión en el límite quiral, como es  $f_{\pi,0} = 90$  MeV y valores de los condensados quirales de  $-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3} = 220, 240$  y  $260$  MeV [59, 60]. En el apéndice *D* se describen detalladamente las ecuaciones utilizadas para obtener los sets de parámetros del modelo. Los valores numéricos de los mismos se indican en la Tabla 4.1.

Parametrización	$-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3}$ [MeV]	$\Lambda$ [MeV]	$g = G\Lambda^2$
$P_{220}^{ch}$	220	608.3	28.43
$P_{240}^{ch}$	240	760.1	20.60
$P_{260}^{ch}$	260	914.6	17.64

Tabla 4.1: Parámetros del modelo de NJL no-local en el límite quiral

#### 4.1.1. Comportamiento a $eB = 0$

Comenzaremos por estudiar el comportamiento del valor de campo medio del campo escalar  $\bar{\sigma}$  en función del potencial químico  $\mu$  para  $B = 0$ . Este caso ha sido ampliamente estudiado y discutido en la literatura [78–80], en nuestro caso particular sirve de punto de partida para analizar los efectos del campo magnético externo.

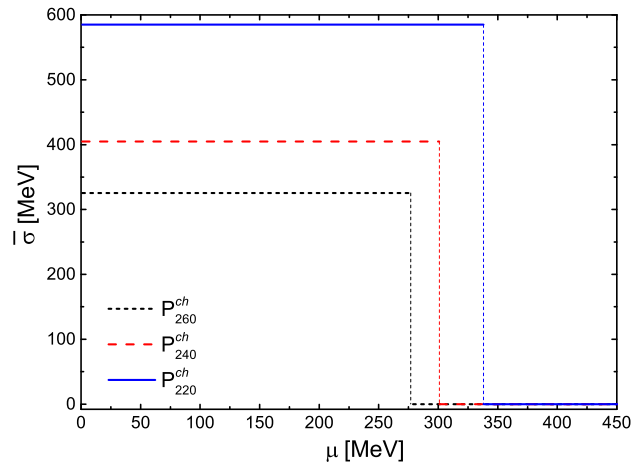


Figura 4.1: Comportamiento de los valores de  $\bar{\sigma}$  como función de  $\mu$  en ausencia del campo magnético externo, para las tres parametrizaciones indicadas en la Tabla 4.1.

En la Fig. 4.1 se muestra el comportamiento de  $\bar{\sigma}$  como función de  $\mu$  para las tres parametrizaciones indicadas en la Tabla 4.1. Estas curvas fueron obtenidas resolviendo

numéricamente la ecuación del gap a  $B = 0$ . Los saltos presentes en estas curvas representan una transición de fase de primer orden. Esta transición está indicada por la discontinuidad de la función  $\bar{\sigma}(\mu)$ . Los valores de los potenciales químicos para los cuales ocurren las mismas se denominan potenciales químicos críticos  $\mu_c$ .

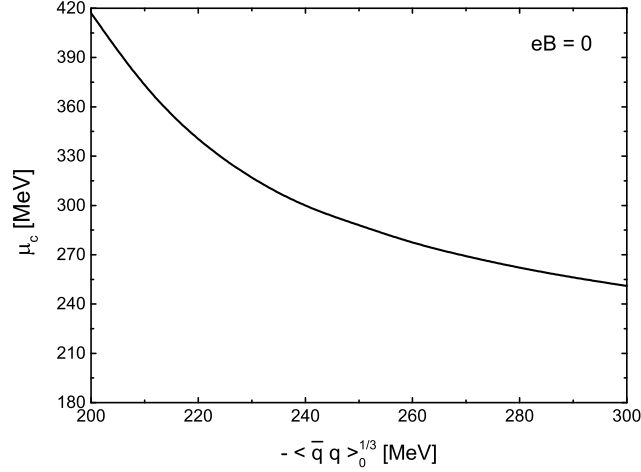


Figura 4.2: Potencial químico crítico  $\mu_c$  como función de los valores de los condensados quirales  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3}$  en ausencia de campo magnético.

La Fig. 4.2 muestra el valor del potencial químico crítico  $\mu_c$  como función del condensado que define la parametrización del modelo. Este diagrama muestra el comportamiento decreciente de los valores de  $\mu_c$  a medida que crece el condensado quiral  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3}$ . La línea sólida negra, divide el plano en dos regiones. La situada por debajo de dicha línea corresponde a la fase de simetría quiral rota, donde los quarks adquieren masa dinámica, y la otra a la fase de simetría quiral exactamente restaurada  $\bar{\sigma} = 0$ .

#### 4.1.2. Comportamiento a $eB$ finito

Se considerará ahora el caso de campo magnético finito. Como se mencionó al principio de este capítulo, para el desarrollo de los cálculos utilizaremos un factor de forma del tipo Gaussiano Ec. (4.1). En este caso particular tenemos la ventaja que la integral en la ecuación (3.20) puede calcularse de manera analítica, lo que conduce a una expresión explícita para la masa constituyente de quarks Ec. (3.21), la cual viene dada por [72]

$$M_{\bar{p},k}^{\lambda,f} = (1 - \delta_{k\lambda,-1}) m_c + \bar{\sigma} \frac{(1 - |q_f B|/\Lambda^2)^{k\lambda}}{(1 + |q_f B|/\Lambda^2)^{k\lambda+1}} \exp(-p_{||}^2/\Lambda^2). \quad (4.2)$$

Esta expresión junto con las descritas en el capítulo 3, completan el modelo de NJL no-local en presencia de un campo magnético externo a potencial químico finito y temperatura cero.

En la Fig. 4.3 se observa el comportamiento del gran potencial termodinámico regularizado en la aproximación de campo medio,  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$ , en función de  $\bar{\sigma}$  para dos valores representativos de campo magnético  $eB = 0,09 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 0,8 \text{ GeV}^2$  y diversos valores del potencial químico  $\mu$ , correspondientes a la parametrización  $P_{240}^{ch}$ .

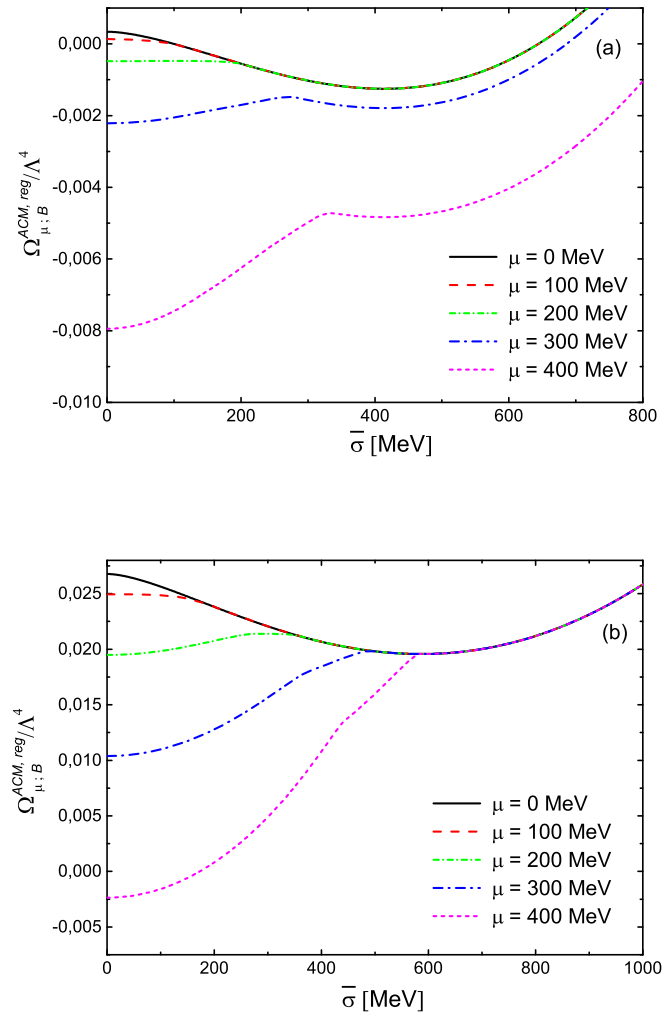


Figura 4.3: Curvas de  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$  vs.  $\bar{\sigma}$  para  $eB = 0,09 \text{ GeV}^2$  (a) y  $eB = 0,8 \text{ GeV}^2$  (b) para diversos valores de potencial químico  $\mu$ . Los resultados corresponden a la parametrización  $P_{240}^{ch}$ .

Estas curvas fueron obtenidas a partir de simulaciones numéricas realizadas con la expresión Ec. (3.37). Las mismas exhiben dos mínimos, uno del tipo global y el otro del

tipo local. Los valores de  $\bar{\sigma}$  para un dado campo magnético y potencial químico en los cuales se alcanzan estos dos mínimos representan las soluciones de la ecuación del gap Ec. (3.39). Una de estas soluciones corresponde a la fase de simetría quiral restaurada, solución trivial de la ecuación  $\bar{\sigma} = 0$ , y la otra, a la fase de simetría quiral rota asociada a la solución masiva de la ecuación del gap  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mu = 0, B)$ .

Conforme el potencial químico aumenta desde cero, ambos mínimos comienzan a competir entre sí. El valor del gran potencial en el mínimo, correspondiente a la solución de simetría quiral restaurada (mínimo local), comienza a disminuir su valor de manera progresiva, hasta alcanzar el valor del mínimo global asociado con la solución de simetría quiral rota (solución masiva). Cuando estos dos valores mínimos del gran potencial termodinámico logran igualarse, es decir cuando se cumple la condición  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}(\mu, B, \bar{\sigma} = 0) = \Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}(\mu, B, \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mu = 0, B))$ , el sistema físico experimenta una transición de fase de primer orden.

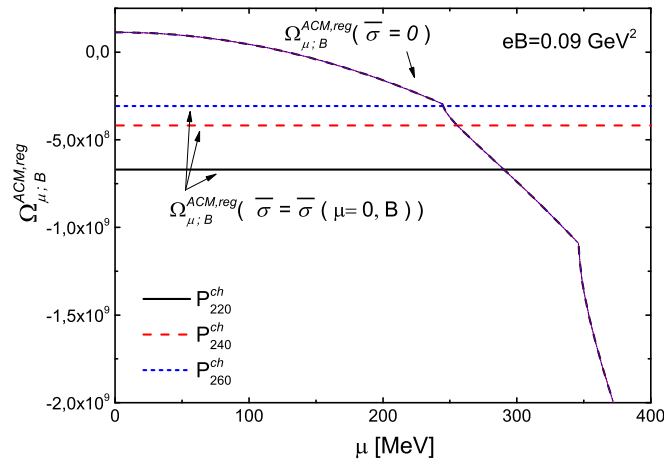


Figura 4.4: Curvas de  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$  en función de  $\mu$  para las parametrizaciones  $P_{220}^{ch}$ ,  $P_{240}^{ch}$  y  $P_{260}^{ch}$ , calculadas para un valor de campo magnético de  $eB = 0,09 \text{ GeV}^2$ .

En la Fig. 4.4 se presentan los valores de  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$  en dichos mínimos, en función de  $\mu$ , para las tres parametrizaciones indicadas en la Tabla 4.1. Estos resultados corresponden al valor de campo magnético representativo de  $eB = 0,09 \text{ GeV}^2$ . Las líneas rectas horizontales calculadas con los diferentes sets de parámetros (indicadas con diferentes colores), representan la fase de simetría quiral rota  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mu = 0, B)$ , asociada con el mínimo global

de la Fig. 4.3. Puede observarse que, para esta solución,  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$  es independiente del potencial químico  $\mu$  en todo el rango del cálculo. Por otro lado, las curvas decrecientes que intersectan estas rectas corresponden a la fase de simetría quiral exactamente restaurada  $\bar{\sigma} = 0$ . Cabe destacar que, el hecho de que haya una sola curva de este tipo se debe a que el gran potencial termodinámico regularizado,  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$ , es independiente de los parámetros del modelo en la región de simetría quiral restaurada  $\bar{\sigma} = 0$ . Se debe notar que esto solo ocurre cuando  $m_c = 0$ , es decir en el caso quiral. Esto puede verse fácilmente fijando los valores  $\bar{\sigma} = 0$  y  $m_c = 0$  en la expresión Ec. (3.37).

Claramente el valor de  $\mu$  para el cual se produce la intersección entre las curvas pertenecientes a ambas fases, corresponde al potencial químico crítico  $\mu_c$ . En la Fig. 4.5 se muestran las curvas de  $\bar{\sigma}$  en función de  $\mu$  para diversos valores de campo magnético. Estas curvas fueron calculadas mediante simulaciones numéricas realizadas con la ecuación del gap Ec. (3.39) utilizando los parámetros correspondientes a  $P_{240}^{ch}$ .

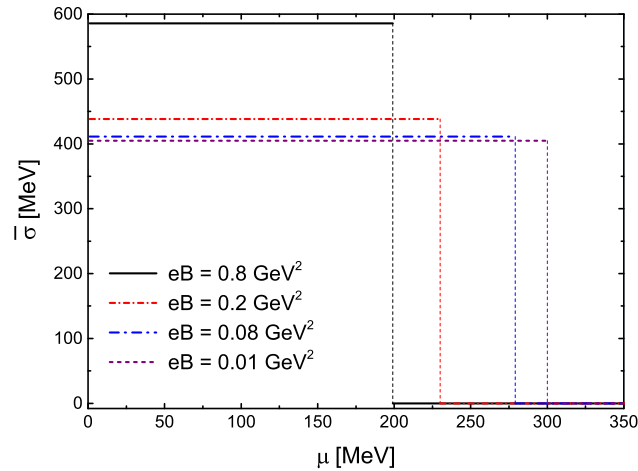


Figura 4.5: Curvas de  $\bar{\sigma}$  vs.  $\mu$  para diversos valores de  $eB$  calculadas con los parámetros correspondientes a  $P_{240}^{ch}$ .

En el intervalo acotado entre los valores  $0 \leq \mu \leq \mu_c$ , el sistema se encuentra en la fase de simetría quiral rota  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mu = 0, B)$ . Para valores de potenciales químicos mayores que  $\mu_c$ , el sistema se encuentra en la fase de simetría quiral restaurada  $\bar{\sigma} = 0$ . Es interesante notar como los valores de  $\bar{\sigma}$  en la fase de simetría rota se ven afectados por la presencia del campo magnético externo. Dichos valores aumentan con el campo magnético

externo para un dado valor de  $\mu$ . Esta tendencia está asociada con la denominada *catálisis magnética* [48]. En la Fig. 4.6 se muestra el comportamiento de los valores de  $\bar{\sigma}$  en función del campo magnético  $eB$ , para el conjunto de parámetros correspondientes a  $P_{220}^{ch}$ ,  $P_{240}^{ch}$  y  $P_{260}^{ch}$ , considerando para el cálculo un valor fijo de potencial químico de  $\mu = 100$  MeV perteneciente a la fase de simetría quiral rota. Como es de esperar para campos magnéticos poco intensos, aproximadamente  $eB \sim 0,01 \text{ GeV}^2$  los valores de  $\bar{\sigma}$  son muy similares a los observados en el límite de campo magnético nulo  $eB = 0$ . Esto se observa con claridad, en la Fig. 4.7, donde se presentan las curvas de  $\bar{\sigma}$  en función de  $\mu$ , para los valores de campo magnético de  $eB = 0$  y  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  calculados con los parámetros correspondientes a  $P_{240}^{ch}$ .

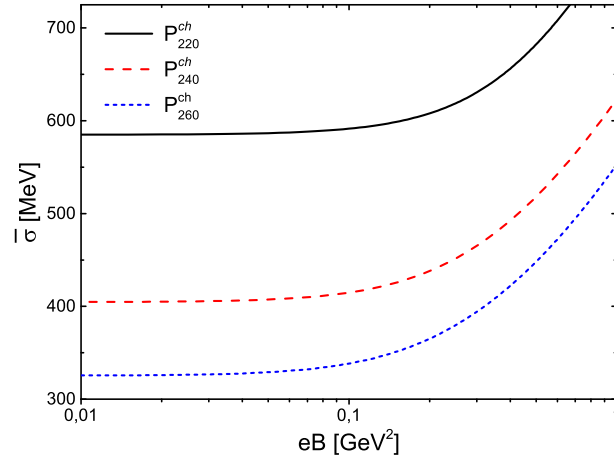


Figura 4.6: Comportamiento de  $\bar{\sigma}$  como función de  $eB$  para diversos conjuntos de parámetros del modelo, para  $\mu = 100$  MeV.

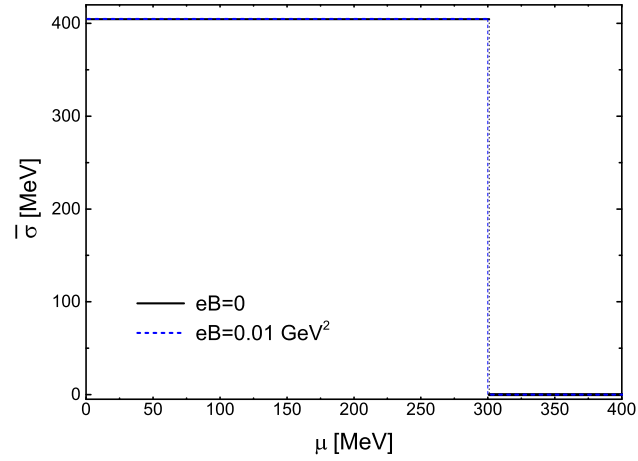


Figura 4.7: Comportamiento de  $\bar{\sigma}$  como función de  $\mu$  para los campos magnéticos  $eB = 0$  y  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  para la parametrización  $P_{240}^{ch}$ .

En la Fig. 4.8 se grafican los valores de  $\mu_c$  en función de la parametrización elegida para los valores de campo magnético  $eB = 0$ ,  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$ ,  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 1 \text{ GeV}^2$ . En el eje de las abscisas, cada valor de  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3}$  representa un set diferente de parámetros del modelo.

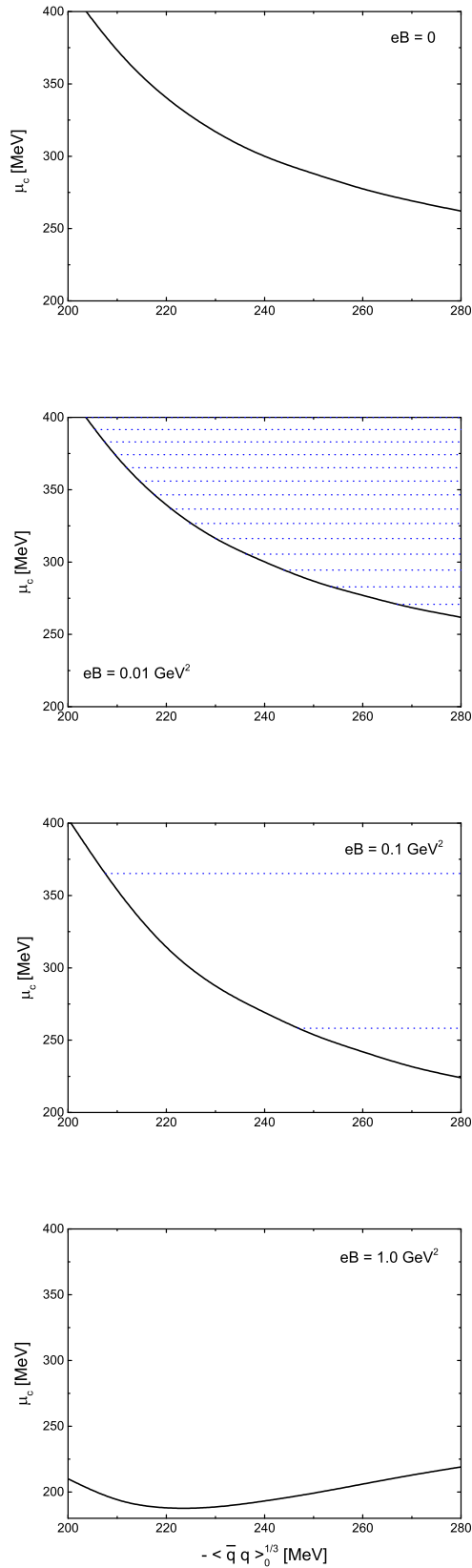


Figura 4.8: Comportamiento de  $\mu_c$  como función de  $-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3}$  para los valores de campo magnético:  $eB = 0$ ,  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$ ,  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 1 \text{ GeV}^2$ . Las líneas punteada azules representan las transiciones de fase intermedias de segundo orden, correspondientes a transiciones de vAdH.

Comparando el gráfico de  $eB = 0$  con el de  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  vemos que si bien la línea entera que marca la transición de la fase con simetría rota (que llamaremos fase  $B$ ) a la de simetría restaurada (que llamaremos fase tipo  $A$ ) es prácticamente idéntica. En el caso de  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  la fase tipo  $A$  esta subdividida en numerosas fases  $A_k$ . Dichas fases corresponden a la población de un número diferente de niveles de Landau (etiquetados por el índice  $k$ ). En el límite quiral el paso de una fase  $A_k$  a otra (llamadas transiciones de *van Alphen-de Haas* (vAdH) [81]), está regulada por la función theta de Heaviside  $\theta(\mu - S_{kf})$  que aparece en la última línea de la Ec. (3.37). Es decir, la transición de la fase  $A_{k-1}$  a  $A_k$  ocurre cuando

$$\mu_c = \sqrt{2k |q_f eB|}. \quad (4.3)$$

Claramente este valor de  $\mu_c$  es independiente de la parametrización, lo cual explica que las líneas punteadas (azules) sean paralelas, como se observa en la Fig. 4.8.

Debe recordarse que en el presente caso, el parámetro de orden  $\bar{\sigma}$  es cero en las fases tipo  $A_k$ . Por lo tanto, las transiciones de una fase a la otra son de segundo orden. Una cantidad física donde se puede observar el efecto de pasar de una fase  $A_k$  a otra es en la densidad de quark  $\rho_q$ , definida por

$$\rho_q = -\frac{\partial \Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}}{\partial \mu}. \quad (4.4)$$

En la Fig. 4.9 se grafica  $\rho_q$  en función del potencial químico  $\mu$  para dos valores de campo magnético  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 0,05 \text{ GeV}^2$ . Allí se puede observar que al pasar de una fase  $A_k$  a otra, la derivada de la densidad presenta una discontinuidad. Es interesante notar aquí que, a medida que los valores de campo magnético disminuyen, para valores crecientes de potencial químico  $\mu$  mayores que  $\mu_c$ , aparecen más transiciones vAdH de segundo orden para un dado valor de  $eB$ . Es por esta razón que en la curva correspondiente al valor de  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  (curva roja) las discontinuidades son menos notables.

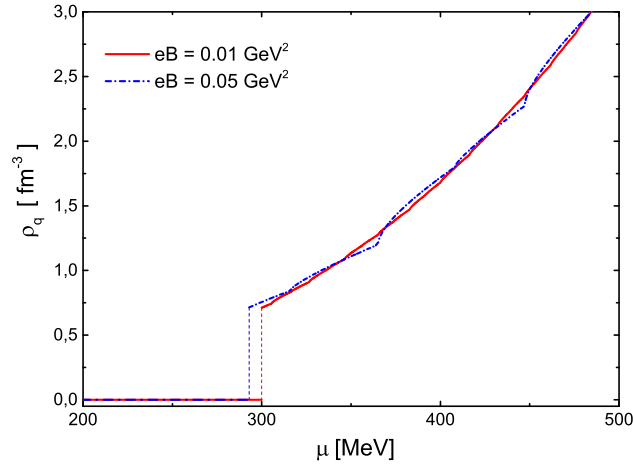


Figura 4.9: Comportamiento de  $\rho_q$  vs.  $\mu$  para los valores de campo magnético  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 0,05 \text{ GeV}^2$ .

Tal como se desprende de la Ec. (4.3), el número de transiciones vAdH en un cierto intervalo de potencial químico depende del valor del campo magnético. Esto explica que en el panel correspondiente a  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$  solo aparecen dos transiciones de este tipo mientras que para  $eB = 1 \text{ GeV}^2$  no aparece ninguna. Del mismo modo a lo observado en las curvas de  $\rho_q$  vs.  $\mu$ , a medida que el campo magnético tiende a cero, aparecen más transiciones vAdH de segundo orden.

Un punto importante a observar es que para los campos  $eB = 0, 0,01$  y  $0,1 \text{ GeV}^2$ , la dependencia de  $\mu_c$  de la transición de primer orden, con la parametrización es muy similar. En todos esos casos el  $\mu_c$  correspondiente decrece a medida que el condensado  $\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3}$ , que indica la parametrización, se hace más negativo. Para el campo  $eB = 1 \text{ GeV}^2$  sin embargo, la situación es distinta ya que si se consideran parametrizaciones con  $\left| \langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3} \right| > 220 \text{ MeV}$  el  $\mu_c$  crece levemente a medida que dicho valor absoluto crece. Es de esperar por lo tanto que los  $\mu_c$  para  $eB$  mayores sean más sensibles a la parametrización.

Finalmente es interesante destacar que en todo el rango de parametrizaciones consideradas, la transición de la fase de simetría rota (fase  $B$ ) se produce directamente a una fase tipo  $A$ . Es decir, contrariamente a lo que ocurre para algunas parametrizaciones del modelo NJL local [53], no se producen aquí transiciones a fases masivas intermedias.

Para finalizar esta sección analizaremos los diagramas de fase en el plano  $eB - \mu_c$  de la materia fría de quarks. En la Fig. 4.10 se presentan los diagramas de fase correspondientes a las parametrizaciones indicadas en la Tabla 4.1.

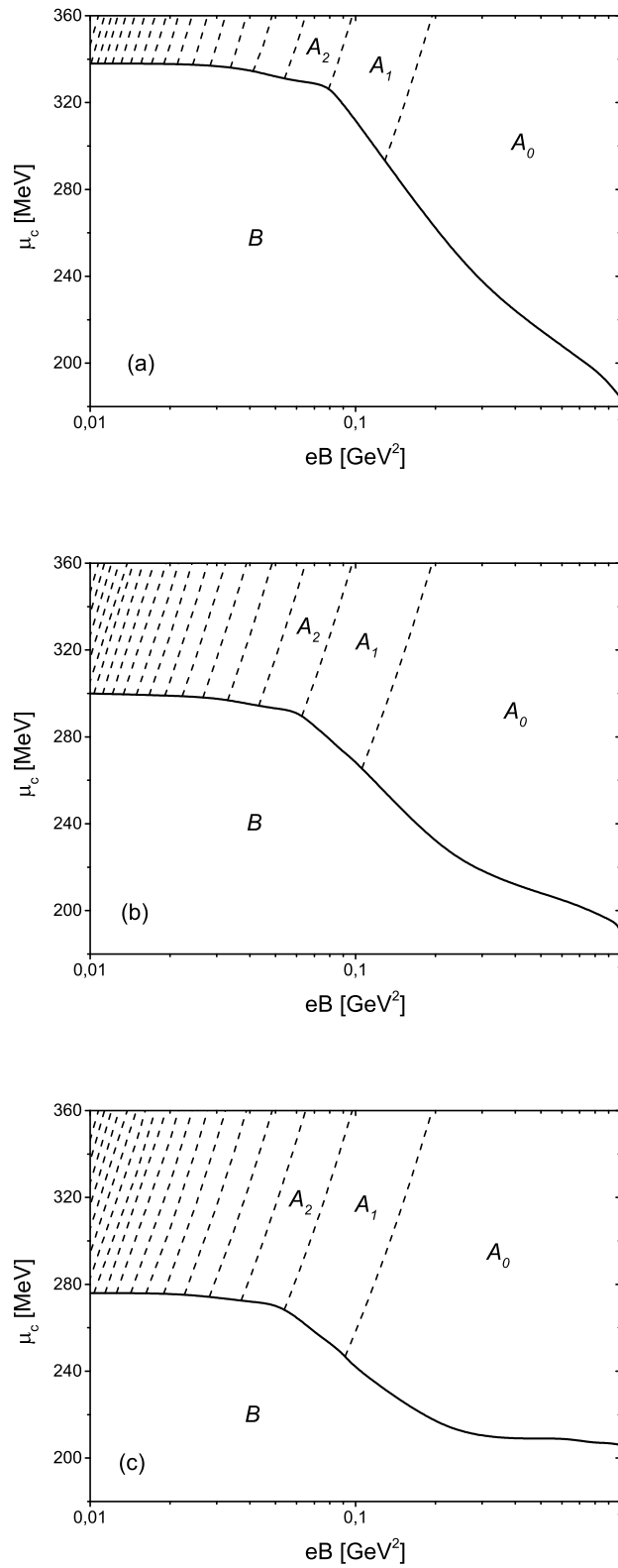


Figura 4.10: Diagramas de fase en el plano  $eB - \mu_c$  correspondientes a las parametrizaciones:  $P_{220}^{ch}$  (a),  $P_{240}^{ch}$  (b) y  $P_{260}^{ch}$  (c).

En términos generales, en dichos diagramas se pueden apreciar las distintas fases en que puede estar la materia de quarks magnetizada. Una fase corresponde a la fase de simetría quiral totalmente rota donde  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mu = 0, B)$  sin niveles de Landau  $k$  poblados, que denominaremos fase  $B$ , el resto de las fases que llamaremos fases  $A_k$  con  $(k = 0, 1, 2 \dots)$ , son fases con la simetría quiral restaurada  $\bar{\sigma} = 0$  con diferentes niveles de Landau  $k$  completos. Las líneas punteadas que conectan las sucesivas fases  $A_k$  con  $(k = 0, 1, 2 \dots)$  corresponden a transiciones de segundo orden. Las mismas fueron calculadas mediante la expresión (4.3) y cada una de ellas corresponde a un nuevo nivel de Landau indicado por el entero  $k$ . Es importante mencionar que si enumeramos las líneas de derecha a izquierda en los diagramas, la primer línea con la que nos encontramos corresponde al nivel de energía completo de Landau, indicado con  $k = 1$  perteneciente al sabor de quark  $d$ . La segunda línea, corresponde al nivel completo de Landau con  $k = 2$  para el sabor de quark  $d$  y simultáneamente a  $k = 1$  para el sabor de quark  $u$ , esta situación continúa sucesivamente hasta completar los niveles de energía superiores. La razón por la que los niveles completos de Landau, indicados con  $k$ , para el sabor de quark  $u$  y con  $2k$  para el sabor  $d$  coincidan, se debe al módulo de la carga eléctrica de cada sabor de quark, es decir,  $|q_u| = 2/3e$  y  $|q_d| = 1/3e$  como se mencionó anteriormente. Cabe destacar que la fase  $A_0$  contiene a los estados de quarks de los sabores  $u$  y  $d$ , correspondientes al nivel de energía de Landau más bajo (LLL, Lowest Landau Level, por su sigla en inglés), indicado con el entero  $k = 0$ .

Como se puede observar en los diagramas de fase de la Fig. 4.10, una característica general se repite entre ellos. En su totalidad, los mismos se desplazan hacia valores de potenciales químicos críticos  $\mu_c$  mayores a medida que los valores de los condensados quirales disminuyen. Esta tendencia puede observarse también en la Fig. 4.11, donde se han graficado las curvas de  $\bar{\sigma}$  en función de  $\mu$ , calculadas para el valor de campo magnético  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$  y los sets de parámetros de la Tabla 4.1.

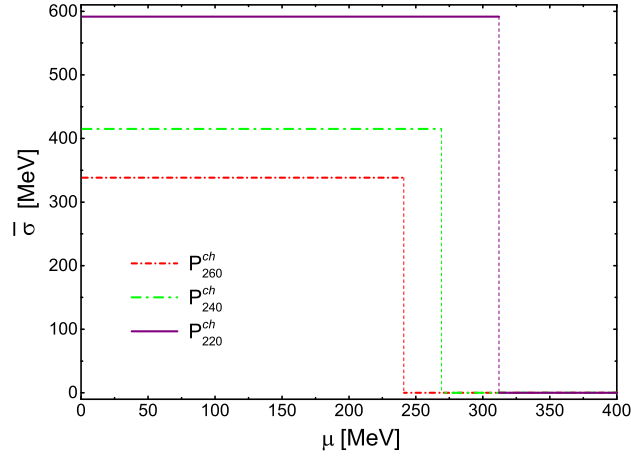


Figura 4.11: Comportamiento de  $\bar{\sigma}$  vs.  $\mu$  para el valor de campo magnético  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$  y diferentes parametrizaciones correspondientes a:  $P_{220}^{ch}$ ,  $P_{240}^{ch}$  y  $P_{260}^{ch}$ .

Respecto del comportamiento de la línea de transición de fase de primer orden (línea entera negra) en los diagramas de la Fig. 4.10 podemos observar tres regiones bien definidas. Para campos menor que  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$  el  $\mu_c$  presenta una muy débil dependencia con el campo magnético haciéndose algo mas pequeño a medida que el campo crece. Este comportamiento es común a todas las parametrizaciones indicadas en la Fig. 4.10. A partir de  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$  y hasta  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$  se observa un descenso mucho mas marcado del  $\mu_c$  a medida que  $eB$  crece. Esto también se observa en los tres paneles de la Fig. 4.10. Es importante destacar que el descenso del  $\mu_c$  con  $eB$  para campos magnéticos débiles también se observa en otros modelos tales como el NJL local [53] y es lo que se conoce como efecto de *catálisis magnética inversa* a potencial químico finito [51]. Lo que ocurre a campos mayores a  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$  depende claramente de la parametrización considerada. En parte, esto ya había sido adelantado en el análisis de la Fig. 4.8. Para el caso de  $P_{220}^{ch}$  vemos que el descenso de  $\mu_c$  con  $eB$  continúa con una pendiente muy pronunciada. Para el caso de  $P_{240}^{ch}$  dicha pendiente es sensiblemente menor. Finalmente, para  $P_{260}^{ch}$  la curva es prácticamente horizontal. Debe notarse que en ninguna de las parametrizaciones consideradas se observa el fuerte incremento de  $\mu_c$  con  $eB$  encontrado en el modelo de NJL local [53].

## 4.2. Diagramas de fase para masa corriente finita

En esta sección analizaremos los diagramas de fase calculados para masa corriente de quark finita, los cuales describen el comportamiento de la materia fría de quarks de forma más realista. Para este caso, los parámetros del modelo necesarios son  $m_c$ ,  $g = G\Lambda^2$  y  $\Lambda$ . Estos parámetros fueron determinados utilizando las expresiones (D.4), (D.6) y (D.16) (ver apéndice D), ajustando los mismos con los valores empíricos  $m_\pi = 139$  MeV y  $f_\pi = 92,4$  MeV correspondientes a la masa del pión y la constante de decaimiento débil del pión respectivamente, y fijando los condensados quirales en ciertos valores fenomenológicamente aceptables. Para estos últimos se consideraron los valores de  $-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3} = 230, 260$  MeV. En la Tabla 4.2 se presentan los sets de parámetros calculados para el caso no-quiral.

Parametrización	$-\langle\bar{q}q\rangle^{1/3}$ [MeV]	$\Lambda$ [MeV]	$g = G\Lambda^2$	$m_c$ [MeV]
$P_{230}$	230	677.8	23.65	6.4
$P_{260}$	260	903.4	17.53	4.6

Tabla 4.2: Parámetros del modelo de NJL no-local para el caso no-quiral

Comenzaremos por analizar las curvas del gran potencial termodinámico en la aproximación de campo medio  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg.}$  como función de los valores  $\bar{\sigma}$ , para diversos valores de potencial químico  $\mu$  y campos magnéticos  $eB$ .

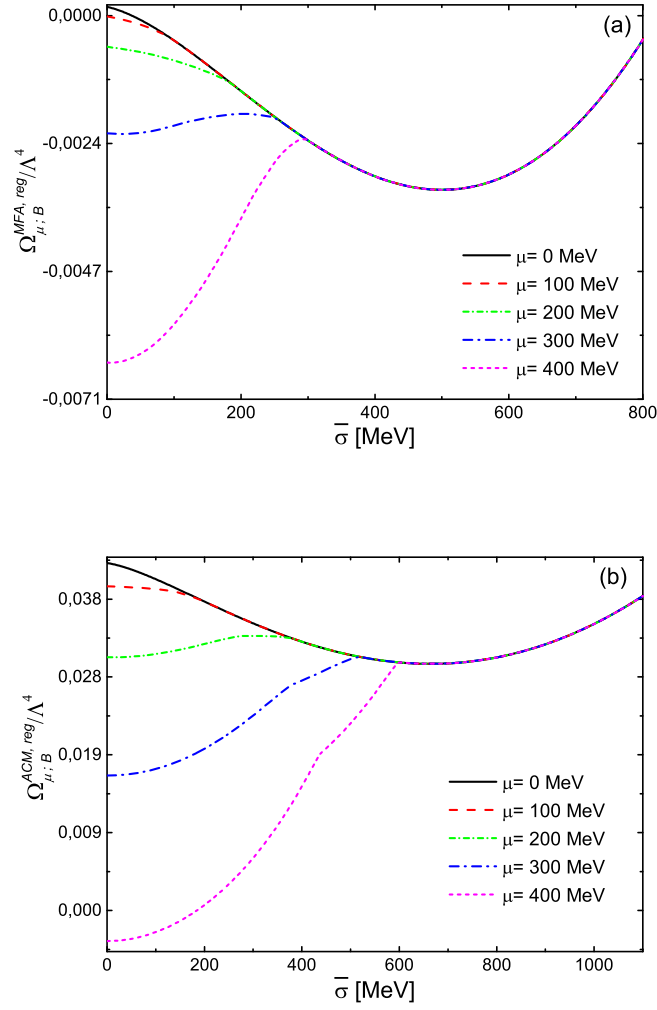


Figura 4.12: Curvas de  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$  vs.  $\bar{\sigma}$  para  $eB = 0,05 \text{ GeV}^2$  (a) y  $eB = 0,8 \text{ GeV}^2$  (b) para diversos valores de potencial químico  $\mu$ .

En la Fig. 4.12 se observan las curvas de  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$  en función de  $\bar{\sigma}$  para los valores de potencial químico  $\mu = 0, 100, 200, 300$  y  $400 \text{ MeV}$ , calculadas con la ecuación (3.37), utilizando la parametrización  $P_{230}$  (ver Tabla 4.2), y los campos magnéticos  $eB = 0,05$  y  $eB = 0,8 \text{ GeV}^2$ . De igual modo que en el caso quiral, estas curvas presentan dos mínimos. Uno, del tipo local, correspondiente a la fase de simetría quiral restaurada y el otro, del tipo global, asociado con la fase de simetría quiral completamente rota. Respecto a la fase de simetría quiral restaurada, en el caso de masa corriente de quark finita, la restauración de esta simetría se lleva a cabo de manera parcial. En la Fig. 4.13 se observa el comportamiento de  $\bar{\sigma}$  como función de los valores de  $\mu$ , para los campos magnéticos correspondientes a  $eB = 0,02, 0,06, 0,5$  y  $0,8 \text{ GeV}^2$ . Estas curvas fueron obtenidas a partir

de la expresión (3.39), utilizando para el cálculo la parametrización  $P_{230}$ .

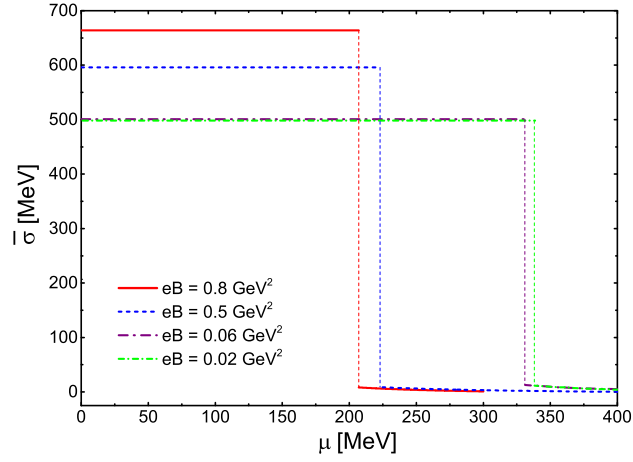


Figura 4.13: Comportamiento de  $\bar{\sigma}$  vs.  $\mu$  para diversos valores de campo magnético, utilizando la parametrización  $P_{230}$ .

En el intervalo correspondiente a  $\mu > \mu_c$ , los valores de  $\bar{\sigma}$  toman una dependencia funcional respecto a los valores de  $\mu$ . Conforme el potencial químico  $\mu$  aumenta a partir de  $\mu_c$ , los valores de  $\bar{\sigma}$  tienden a cero y la simetría quiral es parcialmente restaurada. Este comportamiento decreciente de  $\bar{\sigma}$  puede observarse en la Fig. 4.14, donde se muestra un acercamiento de las curvas presentes en la Fig. 4.13 en esta región.

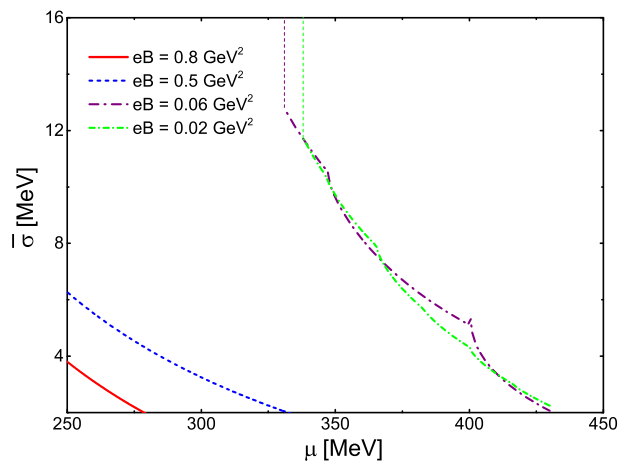


Figura 4.14: Comportamiento de  $\bar{\sigma}$  vs.  $\mu$  para diversos valores de campo magnético y  $P_{230}$  (acercamiento de la región correspondiente a la fase de simetría quiral parcialmente restaurada).

En la Fig. 4.15 se observa el comportamiento de  $\bar{\sigma}$  como función de  $eB$  para la parametrización  $P_{230}$ , tomando tres valores fijos diferentes de potencial químico  $\mu$ . En el panel superior, se observan las transiciones de primer orden entre las fases  $B$  y las fases  $A_0$  y  $A_1$  respectivamente, para  $\mu = 250 \text{ MeV}$  (negro) y  $\mu = 320 \text{ MeV}$  (rojo). Para  $\mu = 350 \text{ MeV}$  el sistema se encuentra en la región de simetría quiral restaurada para todos los valores de  $eB$ , por lo tanto los valores de  $\bar{\sigma}$  permanecen cercanos a cero (azul). Ahora bien, en el panel inferior de la Fig. 4.15 se observan las transiciones vAdH, en esta gráfica se muestran las mismas curvas que fueron presentadas en el panel superior, pero utilizando una escala diferente y concentrándose en la región de pequeños valores de  $\bar{\sigma}$ . La curva correspondiente a  $\mu = 320 \text{ MeV}$  (roja), muestra un pico agudo indicando una transición vAdH de la fase  $A_1$  a la fase  $A_0$ , más allá de la región de simetría quiral restaurada conectando la fase  $B$  con la fase  $A_1$ . Una inspección cercana a la curva muestra la presencia de una pequeña discontinuidad situada en el lado izquierdo del pico, indicando que la transición vAdH es, como ya se indicó anteriormente, de primer orden. La curva correspondiente a  $\mu = 350 \text{ MeV}$  (azul), involucra transiciones entre diferentes estados  $A_k$ . Cada transición es caracterizada por la presencia de un pico en la función  $\bar{\sigma}(eB)$ , la altura de estos picos se vuelve mas pequeña conforme disminuye la intensidad del campo magnético. Como se discutió en el caso quiral, las transiciones vAdH corresponden alternativamente a la población de un nuevo nivel del estado de quark  $d$  o a un nuevo nivel de ambos estados de quarks  $u$  y  $d$ . Por lo tanto, pueden ser agrupados en pares, llevando a los patrones observados en el panel inferior de la Fig. 4.15.

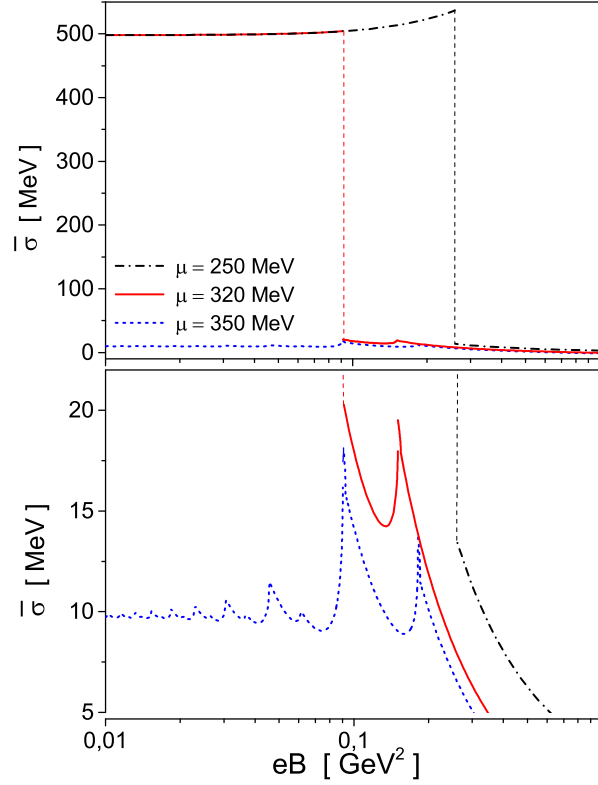


Figura 4.15: Comportamiento de  $\bar{\sigma}$  vs.  $eB$  para tres valores representativos de potencial químico  $\mu$ . Los resultados numéricos corresponden a la parametrización  $P_{230}$ .

Un detalle del comportamiento de  $\bar{\sigma}$  para valores de  $\mu$  mayores al  $\mu_c$  puede verse en la Fig. 4.16, donde se muestran las curvas de  $\bar{\sigma}$  como función del campo magnético  $eB$ , calculadas para diversos valores de potencial químico  $\mu$ . Puede observarse, de manera consistente con los resultados obtenidos en el caso quiral, que para valores de campo magnético inferiores a  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$ , el número de oscilaciones inducidas por el mismo, tiene un comportamiento creciente. Es importante notar además, que para los campos magnéticos  $eB = 0,02 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 0,06 \text{ GeV}^2$  presentes en la Fig. 4.14, se observa el comportamiento antes mencionado, característico del efecto *van Alphen-de Haas*.

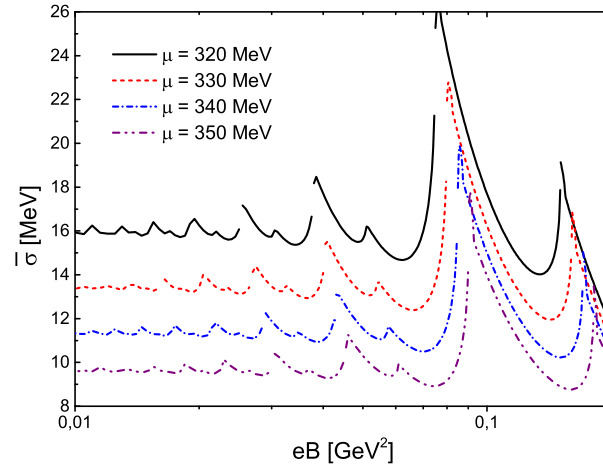


Figura 4.16: Comportamiento de  $\bar{\sigma}$  vs.  $eB$  en la región de simetría quiral parcialmente restaurada, para los valores de potencial químico  $\mu = 320, 330, 340$  y  $350$  MeV. Los resultados numéricos corresponden a la parametrización  $P_{230}$ .

Continuando con el análisis del caso de masa corriente de quark finita, se presentan aquí los diagramas de fase en el plano  $eB - \mu_c$  calculados con las parametrizaciones  $P_{230}$  y  $P_{260}$ , indicadas en la Tabla 4.2.

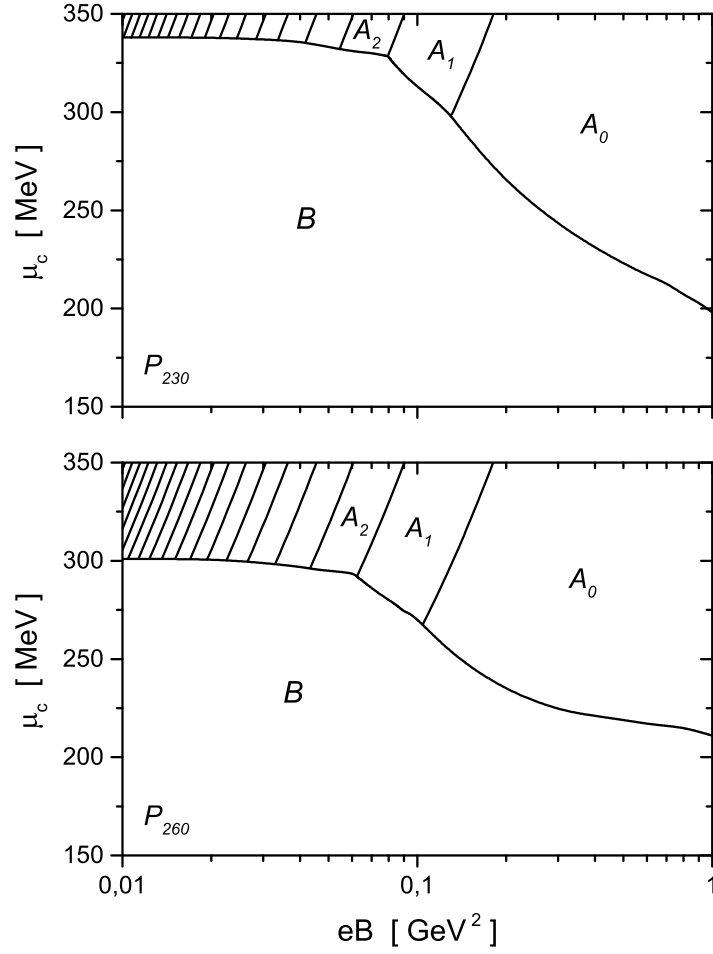


Figura 4.17: Diagramas de fase en el plano  $eB - \mu_c$  para el caso de masa corriente de quark  $m_c$  finita, correspondientes a las parametrizaciones  $P_{230}$  y  $P_{260}$ .

En este caso, utilizaremos la misma convención que se implementó en el caso quiral para denominar las fases presentes en los diagramas, y además, la numeración correspondiente a los niveles completos de Landau  $k$  para los sabores de quark  $u$  y  $d$ . De esta manera tenemos, la región  $B$  correspondiente a la fase de simetría quiral completamente rota, sin niveles de energía de Landau  $k$  poblados, y las regiones  $A_k$  con ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ) pertenecientes a las fases sucesivas de simetría quiral parcialmente restaurada con diferentes niveles completos de energía de Landau  $k$ . A diferencia del caso quiral ( $m_c = 0$ ), la conexión entre las fases  $B$  y  $A_k$  con ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ), se lleva a cabo mediante una transición de primer orden. Es importante destacar que las líneas sólidas que conectan las fases  $A_k$  con ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ), indicando las transiciones de primer orden intermedias inducidas

por el campo magnético externo, fueron calculadas mediante simulaciones numéricas. A diferencia del caso quiral ( $m_c = 0$ ), aquí no hay una expresión analítica que describa el comportamiento de estas curvas. Para obtener las curvas que describen las transiciones de primer orden características del efecto *van Alphen-de Haas* presentes en los diagramas de fase de la Fig. 4.17, se seleccionó un amplio conjunto de valores de potenciales químicos  $\mu$ , de tal modo de cubrir la mayor parte de la región de simetría quiral parcialmente restaurada del diagrama de fase. Para cada valor fijo de potencial químico  $\mu$ , perteneciente a este rango de valores seleccionados, se calcularon las curvas de  $\bar{\sigma}$  en función  $eB$ , como se observa en la Fig. 4.15 a modo de ejemplo. Como se mencionó antes, estas curvas presentan oscilaciones o picos en los cuales las posiciones de los valores máximos, varían con la intensidad del campo magnético. Con los valores fijos de los potenciales químicos  $\mu$  seleccionados, junto con los valores calculados de las posiciones de los máximos de los picos presentes en la Fig. 4.15, se construyeron las líneas sólidas correspondientes a las transiciones de fase de primer orden conectando las diferentes fases  $A_k$  con ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ) en el sector de simetría quiral parcialmente restaurada de los diagramas de fase en el plano  $eB - \mu_c$ .

En la Fig. 4.17 (a) se presenta el diagrama de fase calculado con la parametrización  $P_{230}$  (ver Tabla 4.2). Para los valores de campo magnético inferiores a  $eB \sim 0,09 \text{ GeV}^2$  el potencial químico crítico  $\mu_c$  es poco sensible a la presencia del campo magnético externo, mostrando un comportamiento casi constante. Para valores mayores a  $eB \sim 0,09 \text{ GeV}^2$ , el potencial químico crítico  $\mu_c$  decrece de manera continua a medida que el campo magnético aumenta su valor. Cabe destacar, que para valores de campo magnético superiores  $eB \sim 0,15 \text{ GeV}^2$  el sistema se encuentra en su estado fundamental (LLL). Finalmente, en la Fig. 4.17 (b), se muestra el diagrama de fase calculado con la parametrización  $P_{260}$  (ver Tabla 4.2). Este diagrama de fase presenta un desplazamiento hacia valores más bajos de potencial químico crítico  $\mu_c$ , respecto del calculado con la parametrización  $P_{230}$ . En este caso particular, podemos destacar tres sectores diferentes del diagrama. Para los valores de campos magnéticos inferiores a  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$ , el potencial químico crítico  $\mu_c$  muestra una dependencia muy débil con el campo magnético  $eB$ . En el intervalo comprendido entre los valores  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$  y  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$ , el potencial químico crítico  $\mu_c$  adquiere un comportamiento decreciente con el campo magnético  $eB$ . Esta tendencia se mantiene

para valores superiores a  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$ , pero a diferencia del segmento anterior, con una pendiente decreciente de mayor valor. Respecto al estado fundamental (LLL) del sistema correspondiente a este diagrama de fase, en este caso se alcanza para el valor de campo magnético de  $eB > 0,1 \text{ GeV}^2$ .

# Capítulo 5

## Observaciones finales y conclusiones

En este trabajo final se analizó el comportamiento de la materia fría y densa de un sistema de quarks de dos sabores  $u$  y  $d$ , bajo la influencia de un campo magnético uniforme y homogéneo. Se utilizó un modelo de quarks relativistas basado en la simetría quiral con interacciones no-locales. Este tipo de modelos puede considerarse como una extensión no-local del modelo de Nambu-Jona-Lasinio, por lo que nos referiremos a ellos como modelos nlNJL. La no-localidad se incorporó en este modelo introduciendo en las corrientes escalares y pseudo-escalares un factor de forma del tipo Gaussiano, el cual, es el encargado de describir la interacción efectiva quark-quark. El estudio se realizó en dos etapas. En una primera etapa, se estudió el caso del límite quiral que corresponde a considerar la masa corriente nula ( $m_c = 0$ ). En este caso, el modelo incluye dos parámetros,  $g = G\Lambda^2$ , la constante de acoplamiento adimensional, y el *cut off* covariante  $\Lambda$ . Estos fueron determinados de manera de reproducir, para  $B = \mu = 0$ , la constante de decaimiento débil del pión en el límite quiral  $f_{\pi,0} = 90 \text{ MeV}$  y valores para los condensados quirales de  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3} = 220, 240$  y  $260 \text{ MeV}$ . Los correspondientes conjuntos de parámetros han sido llamados  $P_{220}^{ch}$ ,  $P_{240}^{ch}$  y  $P_{260}^{ch}$  (ver Tabla 4.1). Se comenzó analizando el comportamiento del parámetro de orden  $\bar{\sigma}$  en función de  $\mu$  a  $eB = 0$  para las parametrizaciones antes mencionadas. Estas curvas mostraron discontinuidades de salto para  $\mu = \mu_c$  relacionadas con las transiciones de primer orden entre las fases presentes en el sistema, denominadas fase de simetría quiral rota y restaurada ( $\bar{\sigma} = 0$ ). Se encontró que el valor de  $\mu_c$  muestra una cierta dependencia con la parametrización del sistema.

Continuando con el análisis para el caso del límite quiral, se consideró el caso de

campo magnético finito. Se obtuvieron las curvas del gran potencial termodinámico en la aproximación de campo medio (ACM),  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$ , como función del parámetro de orden  $\bar{\sigma}$  para diferentes valores de potencial químico  $\mu$ , y campo magnético. Las mismas presentaron, en general, dos mínimos, uno del tipo global y el otro local. Para valores bajos de potencial químico  $\mu$ , el mínimo de tipo global resultó estar asociado con la fase de simetría quiral rota, mientras que el mínimo local con la fase restaurada. Para valores altos de potencial químico  $\mu$  se encontró, en cambio, que la situación se invierte estando el mínimo global asociado a la fase de simetría restaurada. Este cambio de las características de los mínimos se obtuvo para todos los valores de campo magnético considerados.

Para determinar con mayor detalle el valor de potencial químico crítico,  $\mu_c$ , para el cual se pasa de una situación a la otra, se calcularon mediante la resolución numérica de la ecuación del gap Ec. (3.39), los valores de  $\bar{\sigma}$  como función del potencial químico  $\mu$ . Al igual que en el caso  $eB = 0$ , estas curvas mostraron la presencia de las fases de simetría quiral rota y restaurada, conectadas por una transición de primer orden. Además, fueron calculadas las curvas de  $\bar{\sigma}$  en función  $eB$  para un valor de  $\mu$  fijo tal que  $\mu < \mu_c$ . Se encontró que para todas las parametrizaciones consideradas, el parámetro de orden  $\bar{\sigma}$  muestra una tendencia creciente con  $eB$ , asociada con la denominada *catálisis magnética*.

También se estudió el comportamiento de  $\mu_c$  como función de las parametrizaciones del modelo, representadas por  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3}$  para valores fijos de campo magnético. Los diagramas correspondientes a los campos magnéticos  $eB = 0$ ,  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 0,1 \text{ GeV}^2$  presentaron similitudes, en todos estos casos el valor de  $\mu_c$  mostró un comportamiento decreciente para los valores crecientes de  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3}$ . En particular, la línea que describe la transición de primer orden entre la fase de simetría quiral rota (denominada fase  $B$ ) y la fase de simetría quiral restaurada (denominada fase  $A$ ), presente en los diagramas calculados para  $eB = 0$  y  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$ , mostró un comportamiento prácticamente idéntico en ambos casos. Respecto al diagrama calculado con el valor de campo magnético  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$ , en la región de simetría quiral restaurada  $\bar{\sigma} = 0$ , los resultados mostraron que la fase  $A$  fue subdividida en numerosas fases más pequeñas indicadas con  $A_k$  donde ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ). Dichas fases corresponden a la población de un número diferente de niveles de Landau, etiquetados por el índice entero  $k$ . El cambio entre una fase  $A_{k-1}$  a

otro  $A_k$  se conoce como transición de *van Alphen-de Haas* (vAdH). Es importante resaltar aquí, que para el caso de ( $m_c = 0$ ) las transiciones vAdH entre una fase  $A_{k-1}$  a otro  $A_k$  son de segundo orden. Dado que en el presente caso, el parámetro de orden  $\bar{\sigma}$  es cero en las fases del tipo  $A_k$ , correspondientes a la simetría quiral restaurada, para estudiar las transiciones *van Alphen-de Haas* (vAdH) entre las fases  $A_{k-1}$  y  $A_k$ , es necesario observar el comportamiento de otra magnitud física, la densidad de quark  $\rho_q$ . Las curvas de  $\rho_q$  en función del potencial químico  $\mu$  para los valores de campo magnético  $eB = 0,01 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 0,05 \text{ GeV}^2$ , fueron obtenidas a partir de simulaciones numéricas realizadas con la expresión (4.4). Estas curvas mostraron discontinuidades en la derivada primera de la densidad, al pasar de una fase  $A_k$  a otra contigua. Finalmente, en el caso de  $eB = 1 \text{ GeV}^2$ , para parametrizaciones correspondientes a  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3} \geq 220 \text{ MeV}$  se observó un comportamiento levemente creciente de  $\mu_c$  respecto de los valores de los condensados quirales.

Para finalizar la primera etapa de este trabajo, se estudiaron de manera detallada los diagramas de fase en el plano  $eB - \mu_c$  calculados con las parametrizaciones  $P_{220}^{ch}$ ,  $P_{240}^{ch}$  y  $P_{260}^{ch}$ . Como característica general en todos los diagramas obtenidos, se observó la presencia de dos fases predominantes. La fase masiva  $B$  asociada con la simetría quiral rota sin niveles de Landau  $k$  poblados y la fase  $A$  correspondiente a la simetría quiral restaurada ( $\bar{\sigma} = 0$ ). Esta última, está sub-dividida en las fases  $A_k$  con ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ), correspondientes a diferentes niveles de Landau  $k$  completos. Las líneas punteadas que conectan las sucesivas fases  $A_k$  corresponden a transiciones de segundo orden. Se observó además, una superposición en los niveles de Landau  $k$ , dado que la carga del quark  $u$  es dos veces la del quark  $d$ , en módulo. Siguiendo con el análisis del comportamiento general de los diagramas de fase, se observó para el conjunto de parámetros correspondientes a valores crecientes de condensados quirales, un desplazamiento de los diagramas completos hacia valores más bajos de potenciales químicos críticos  $\mu_c$ .

Se encontró, además, que el comportamiento de la línea de transición de primer orden que conecta la fase  $B$  con las fases sucesivas  $A_k$  con ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ) puede dividirse en tres regiones bien definidas, de forma similar en todos los diagramas. Para valores de campo magnético menores que  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$ , el  $\mu_c$  presentó una débil dependencia con  $eB$ , haciéndose más pequeño conforme el campo magnético aumenta. En el intervalo

correspondiente a  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$  hasta  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$ , se observó un descenso mucho más pronunciado de  $\mu_c$  a medida que  $eB$  crece. El comportamiento de  $\mu_c$  en estos dos intervalos fue común para las tres parametrizaciones del modelo. Finalmente, respecto a los valores de  $\mu_c$ , para campos magnéticos mayores que  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$  se observó una dependencia de los mismos con las parametrizaciones del modelo utilizadas. Esta conclusión se desprende del análisis de las curvas de potencial químico crítico  $\mu_c$  como función de los condensados quirales  $-\langle \bar{q}q \rangle_0^{1/3}$ , los cuales representan las diferentes parametrizaciones del modelo.

En la segunda etapa de este trabajo, se estudió la materia de quarks magnetizada considerando valores finitos para la masa corriente. En este caso más realista, los parámetros del modelo nNJL, utilizados para las simulaciones numéricas fueron  $g = G\Lambda^2$ ,  $\Lambda$  y la masa corriente de quark  $m_c$ . Estos parámetros fueron determinados ajustando los mismos con los valores empíricos  $m_\pi = 139 \text{ MeV}$  y  $f_\pi = 92,4 \text{ MeV}$ , la masa del pión y la constante de decaimiento débil respectivamente, y fijando los condensados quirales en  $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = 230$  y  $260 \text{ MeV}$  se obtuvieron los sets de parámetros denominados como  $P_{230}$  y  $P_{260}$  (ver Tabla 4.2).

Se obtuvieron numéricamente las curvas del gran potencial termodinámico en la ACM,  $\Omega_{\mu,B}^{ACM,reg}$ , en función de los valores del parámetro de orden  $\bar{\sigma}$ , para diversos valores de potencial químico  $\mu$  y para los valores de campo magnético representativos  $eB = 0,05 \text{ GeV}^2$  y  $eB = 0,8 \text{ GeV}^2$ . Estas curvas fueron calculadas con la expresión (3.37) utilizando la parametrización  $P_{230}$ . Del mismo modo a lo observado en el caso quiral, las curvas presentaron dos mínimos, uno del tipo global y el otro local, asociados con las fases de simetría quiral rota y restaurada. Posteriormente, fueron calculadas las curvas de  $\bar{\sigma}$  en función de  $\mu$  para los valores representativos de campo magnético  $eB = 0,8, 0,5, 0,06$  y  $0,02 \text{ GeV}^2$ . Las mismas mostraron que la restauración de la simetría quiral se produce de forma parcial y no de manera exacta como en el caso quiral ( $m_c = 0$ ). Además, en esta fase se pudo observar la presencia del efecto *van Alphen-de Haas* (vAdH). Para analizar de manera detallada este fenómeno, se obtuvieron las curvas de  $\bar{\sigma}$  como función de  $eB$  para los valores fijos de potencial químico  $\mu = 250, 320$  y  $350 \text{ MeV}$  calculadas con la parametrización  $P_{230}$ . Para los valores de potencial químico  $\mu = 250, 320 \text{ MeV}$ , se observaron las tran-

siciones de primer orden entre la fase  $B$  y las fases  $A_0$  y  $A_1$  respectivamente. La curva correspondiente a  $\mu = 320 \text{ MeV}$  mostró picos agudos junto con pequeñas discontinuidades de salto, indicando una transición vAdH de primer orden entre las fases  $A_0$  y  $A_1$ , en la región de simetría quiral restaurada. Finalmente, la curva calculada con  $\mu = 350 \text{ MeV}$  presentó numerosos picos con discontinuidades asociadas de intensidades cada vez menores conforme el campo magnético se aproximaba a cero. Cada pico fue asociado con la transición a una nueva fase  $A_k$ .

Para finalizar, se obtuvieron los diagramas de fase en el plano  $eB - \mu_c$  calculados con las parametrizaciones correspondientes a  $P_{230}$  y  $P_{260}$  (ver Tabla 4.2). De igual modo a lo observado en el caso quiral, dos fases predominantes fueron encontradas. La fase masiva  $B$  correspondiente a la simetría quiral rota sin niveles de Landau  $k$  ocupados y la fase  $A$  correspondiente a la simetría quiral parcialmente restaurada. Esta fase  $A$ , se sub-dividió en las fases sucesivas  $A_k$  con  $(k = 0, 1, 2 \dots)$  asociadas con diferentes niveles de Landau  $k$  ocupados. Es importante destacar que, en este caso, las líneas que conectan las diferentes fases  $A_k$  con  $(k = 0, 1, 2 \dots)$ , representando las transiciones intermedias de primer orden inducidas por la acción del campo magnético externo, fueron determinadas de forma numérica ya que para el caso de masa corriente finita no hay una expresión analítica para el cálculo de las mismas. Dichas líneas presentaron un pequeño corrimiento respecto a las transiciones vAdH para el caso quiral. Se obtuvo el diagrama de fase calculado con la parametrización correspondiente a  $P_{230}$ . Para valores inferiores a  $eB \sim 0,09 \text{ GeV}^2$ , el campo magnético externo no fue lo suficientemente intenso como para modificar de manera significativa el potencial químico crítico  $\mu_c$ , resultando este valor débilmente dependiente del campo magnético en este intervalo. Para valores de campo magnético superiores a  $eB \sim 0,09 \text{ GeV}^2$ , el potencial químico crítico  $\mu_c$  como función de  $eB$  mostró un comportamiento decreciente. Finalmente, se calculó el diagrama de fases correspondiente a la parametrización  $P_{260}$ . Este diagrama mostró un desplazamiento completo del mismo de  $\sim 40 \text{ MeV}$  hacia valores más bajos de potencial químico crítico  $\mu_c$ , respecto del calculado con la parametrización  $P_{230}$ . En un análisis más detallado, se observaron tres segmentos predominantes. Para valores de campo magnético inferiores a  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$  el potencial químico crítico  $\mu_c$  mostró un comportamiento débilmente dependiente del campo magnético  $eB$ . Para campos mayores a  $eB \sim 0,07 \text{ GeV}^2$ , los

valores de  $\mu_c$  adquirieron un comportamiento decreciente con  $eB$  hasta alcanzar el valor de campo magnético  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$ . Esta tendencia decreciente de  $\mu_c$  se mantuvo para valores superiores a  $eB \sim 0,2 \text{ GeV}^2$ , con una pendiente decreciente mayor a la observada en el segmento anterior.

De lo mencionado en los párrafos anteriores se pudo concluir que, en términos generales, los modelos no-locales tipo NJL predicen que la materia de quarks fría y densa bajo la influencia de un campo magnético constante se encuentra, para valores bajos del potencial químico  $\mu$ , en una fase  $B$  en la cual la simetría quiral está espontáneamente rota, y que a un cierto valor crítico  $\mu_c$  existe una transición de fase de primer orden a partir de la cual dicha simetría está (aproximadamente) restaurada. Para valores bajos/medios del campo magnético los valores de  $\mu_c$  decrecen suavemente a medida que  $eB$  aumenta, lo cual es consistente con el llamado *efecto de catálisis magnética inversa* observado en otros modelos. Mientras que esta dependencia es común a todas las parametrizaciones consideradas, para campos magnéticos grandes ( $eB > 0,3 \text{ GeV}^2$ ) el comportamiento depende notoriamente de la parametrización utilizada. En cuanto a la fase de simetría quiral (parcialmente) restaurada, la misma se encuentra sub-dividida en diversas fases  $A_k$  caracterizadas por el número de niveles de Landau  $k$  poblados. Las transiciones entre dichas fases son de segundo orden en el caso quiral y de primer orden cuando la masa corriente es finita.

Para terminar, es interesante comparar las características de los diagramas de fase obtenidos con el presente enfoque no-local y aquellas encontradas en el marco del modelo de NJL local, ver Ref. [53]. Se pueden señalar dos características principales cualitativamente diferentes. Primero, en el modelo de NJL local podemos observar, para un cierto rango de parametrización, la existencia de fases intermedias  $C_k$  con ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ) entre la fases anteriormente descritas  $A_k$  y  $B$ . Las fases  $C_k$  son tales que las masas constituyentes de quarks son grandes, esto es, la simetría quiral se rompe, como en la fase  $B$ . Sin embargo en estas regiones la densidad de quarks es distinta de cero, y las masas constituyentes de quarks son dependientes de  $\mu$ , en lugar de ser constantes como en la fase  $B$ . En el modelo nNJL estas fases no fueron encontradas para ninguna de las parametrizaciones estudiadas en este trabajo. Segundo, en el modelo local se observa para campos magnéticos intensos

(a partir de  $eB \sim 0,3 \text{ GeV}^2$  [53]) un fuerte incremento del potencial químico crítico  $\mu_c$  de la transición de restauración de simetría quiral. Este comportamiento no se observa en el caso del modelo no-local hasta  $eB = 1 \text{ GeV}^2$ , para el factor de forma considerado. De hecho, para ciertas parametrizaciones el potencial químico crítico  $\mu_c$  tiende a ser una función fuertemente decreciente de  $eB$  incluso para valores grandes del campo magnético.

# Apéndices

# Apéndice A

## Formalismo de bosonización

En este apéndice desarrollaremos el formalismo de bosonización utilizado en el capítulo 3 [32]. Como ya se mencionó, el mismo reemplaza los grados de libertad de quarks por campos bosónicos. Comenzaremos por definir la función de partición correspondiente al Lagrangiano de NJL (no-local) a  $T = 0$  y  $\mu = 0$  como

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E(\psi,\bar{\psi})} \quad (\text{A.1})$$

donde la acción euclídea  $S_E(\psi, \bar{\psi})$  fue definida en el capítulo 3 en la ecuación (3.1).

El segundo término presente en la acción euclídea, correspondiente a las interacciones no-locales Ec. (3.1), será reemplazado por campos bosónicos que representarán a los mesones escalares y pseudo-escalares  $\sigma(x)$  y  $\vec{\pi}(x)$ , respectivamente. Mostraremos el procedimiento de bosonización solo para el caso escalar, siendo completamente análogo para el caso pseudo-escalar. Sea la igualdad

$$f(j_a^s(x)) = \int \mathcal{D}S \delta(S(x) - j_a^s(x)) f(S(x)) \quad (\text{A.2})$$

donde  $j_a^s(x)$  es la parte escalar de la corriente no-local definida en la ecuación (2.57) y  $S(x)$  es un campo escalar auxiliar. Ahora bien, podemos reescribir la expresión (A.2) como

$$\exp\left[\frac{G}{2} \int d^4x j_a^s(x) j_a^s(x)\right] = \int \mathcal{D}S \delta(S(x) - j_a^s(x)) \exp\left[\frac{G}{2} \int d^4x S(x) S(x)\right] \quad (\text{A.3})$$

usando la definición de la delta de Dirac

$$\delta(S(x) - j_a^s(x)) = \int \mathcal{D}\sigma \exp\left[\int d^4x \sigma(x) (S(x) - j_a^s(x))\right] \quad (\text{A.4})$$

y volviendo a la expresión (A.3) tenemos

$$\exp \left[ \frac{G}{2} \int d^4x j_a^s(x) j_a^s(x) \right] = N_s \int \mathcal{D}S \mathcal{D}\sigma \exp \int d^4x \left[ \sigma(x) (S(x) - j_a^s(x)) + \frac{G}{2} S(x)^2 \right] \quad (\text{A.5})$$

donde  $N_s$  es un factor de normalización. Repitiendo este procedimiento para el campo pseudo-escalar e introduciendo un campo auxiliar  $\vec{P}(x)$  análogo a  $S(x)$  obtenemos

$$\exp \left[ \frac{G}{2} \int d^4x \vec{j}_a^p(x) \vec{j}_a^p(x) \right] = N_p \int \mathcal{D}\vec{P} \mathcal{D}\vec{\pi} \quad (\text{A.6})$$

$$\times \exp \int d^4x \left[ \vec{\pi}(x) \cdot (\vec{P}(x) - \vec{j}_a^p(x)) + \frac{G}{2} \vec{P}(x) \cdot \vec{P}(x) \right] \quad (\text{A.7})$$

siendo  $N_p$  otra constante de normalización. Reemplazando las expresiones (A.5) y (A.7) en la función de partición Ec. (A.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= N_s N_p \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[ - \int d^4x \mathcal{L}_{free} \right] \\ &\times \int \mathcal{D}S \mathcal{D}\sigma \exp \int d^4x \left[ \sigma(x) (S(x) - j_a^s(x)) + \frac{G}{2} S(x)^2 \right] \\ &\times \int \mathcal{D}\vec{P} \mathcal{D}\vec{\pi} \exp \int d^4x \left[ \vec{\pi}(x) \cdot (\vec{P}(x) - \vec{j}_a^p(x)) + \frac{G}{2} \vec{P}(x) \cdot \vec{P}(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Si reorganizamos los términos entre corchetes presentes en la ecuación (A.8), agrupando los mismos en términos de los campos escalares y pseudo-escalares respectivamente, y además completamos cuadrados, obtendremos la siguiente expresión

$$\sigma(x) S(x) + \frac{G}{2} S(x) S(x) = \frac{G}{2} \left[ S(x) + \frac{\sigma(x)}{G} \right]^2 - \frac{\sigma(x)\sigma(x)}{2G}; \quad (\text{A.9})$$

la misma corresponde solo al caso escalar, pero podemos llegar a una expresión completamente análoga para el caso pseudo-escalar. Bajo esta nueva factorización la integral sobre el campo  $S(x)$  en la ecuación (A.8) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}S \mathcal{D}\sigma \exp \left[ \int d^4x \left( \frac{G}{2} \left[ S(x) + \frac{\sigma(x)}{G} \right]^2 - \frac{\sigma(x)\sigma(x)}{2G} - \sigma(x) j_a^s(x) \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{\sigma(x)\sigma(x)}{2G} + \sigma(x) j_a^s(x) \right) \right] \int \mathcal{D}S \exp \left[ \frac{G}{2} \int d^4x \left( S(x) + \frac{\sigma(x)}{G} \right)^2 \right] \\ &= N'_s \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{\sigma(x)\sigma(x)}{2G} + \sigma(x) j_a^s(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde la integral sobre el campo  $S(x)$  contribuye sólo a la constante de normalización  $N'_s$ , debido a que es del tipo gaussiana. Siguiendo el razonamiento anterior, obtenemos una

expresión análoga para el campo auxiliar  $\vec{P}(x)$

$$N'_p \int \mathcal{D}\vec{\pi} \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{\vec{\pi}(x) \cdot \vec{\pi}(x)}{2G} + \vec{\pi}(x) \cdot \vec{j}_a^p(x) \right) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto la función de partición ahora toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 = N_s N'_s N_p N'_p \mathcal{Z}_0^{free} \times \int \mathcal{D}\sigma \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{\sigma(x)\sigma(x)}{2G} + \sigma(x)j_a^s(x) \right) \right] \\ \times \int \mathcal{D}\vec{\pi} \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{\vec{\pi}(x) \cdot \vec{\pi}(x)}{2G} + \vec{\pi}(x) \cdot \vec{j}_a^p(x) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\mathcal{Z}_0^{free} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^4x [\bar{\psi}(x) (-i\not{D} + m_c) \psi(x)] \right\} \quad (\text{A.13})$$

siendo  $D_\mu$  la derivada covariante definida en la ecuación (3.2). Volviendo a la ecuación (A.12), podemos agrupar todos los términos relacionados con los campos fermiónicos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S_{fer} &= \int d^4x [\bar{\psi}(x) (-i\not{D} + m_c) \psi(x) + \sigma(x)j_a^s(x) + \vec{\pi}(x) \cdot \vec{j}_a^p(x)] \\ &= \int d^4x d^4x' \bar{\psi}(x) \mathcal{D}_{x,x'} \psi(x) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde  $\mathcal{D}_{x,x'}$  es el operador fermiónico en el espacio de coordenadas y puede demostrarse que tiene la siguiente forma [72]

$$\mathcal{D}_{x,x'} = \delta^{(4)}(x - x') (-i\not{D} + m_c) + r(x - x') \gamma_0 \mathcal{W}(x, \bar{x}) \gamma_0 [\sigma(\bar{x}) + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(\bar{x})] \mathcal{W}(\bar{x}, x') \quad (\text{A.15})$$

con  $\bar{x} = (x + x')/2$  para los mesones neutrales. Por lo tanto la función de partición se puede escribir como

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-S_{fer}] \exp \left[ - \int d^4x \left( \frac{\sigma(x)^2}{2G} + \frac{\vec{\pi}(x)^2}{2G} \right) \right] \quad (\text{A.16})$$

donde se han omitido las constantes de normalización  $N_s$ ,  $N'_s$ ,  $N_p$  y  $N'_p$ . Ahora bien, mediante la referencia [82] podemos reescribir el determinante fermiónico de una forma más conveniente como

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp[-S_{fer}] = \det \mathcal{D}_{x,x'} = \exp(\ln \det \mathcal{D}_{x,x'}) = \exp(\text{Tr} \ln \mathcal{D}_{x,x'}) \quad (\text{A.17})$$

de esta manera llegamos a la expresión final de la función de partición dada por

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\vec{\pi} \exp[-S_{bos}] \quad (\text{A.18})$$

donde la acción bosonizada se define como

$$S_{bos} = -\ln \det (\mathcal{D}_{x,x'}) + \frac{1}{2G} \int d^4x [\sigma(x)\sigma(x) + \vec{\pi}(x) \cdot \vec{\pi}(x)] \quad (\text{A.19})$$

Por lo tanto, hemos llegado a la expresión de la acción bosonizada que se presenta en la ecuación (3.7) del capítulo 3.

# Apéndice B

## Auto-funciones y transformada de Ritus

En este apéndice desarrollaremos la forma explícita de las auto-funciones de Ritus [77] y discutiremos algunas de las propiedades más importantes. Estas auto-funciones satisfacen la siguiente ecuación de auto-valores

$$\Pi^2 \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) = \epsilon_{\bar{p}} \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) \quad (\text{B.1})$$

donde  $\Pi = -i\hat{\phi} - qBx_1\gamma_2$  y  $\bar{p} = (k, p_2, p_3, p_4)$  representa el conjunto de números cuánticos requeridos para identificar de manera única los auto-estados. Los auto-valores, por otro lado, están dados por la expresión  $\epsilon_{\bar{p}} = -(2k|qB| + p_3^2 + p_4^2)$ . Trabajando en el espacio Euclídeo y utilizando la representación de Weyl para las matrices de Dirac,

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma_4 = i\gamma_0 = i \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

obtenemos

$$\mathbb{E}_{\bar{p}}(x) = \sum_{\lambda=\pm} E_{\bar{p}\lambda}(x) \Delta^\lambda \quad (\text{B.4})$$

donde  $\Delta^+ = \text{diag}(1, 0, 1, 0)$ ,  $\Delta^- = \text{diag}(0, 1, 0, 1)$  y

$$E_{\bar{p}\lambda}(x) = N_{k\lambda} e^{i(p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4)} D_{k\lambda}(\rho) \quad (\text{B.5})$$

con  $\rho = s\sqrt{2/|qB|}(qBx_1 - p_2)$  y  $s = \text{sign}(qB)$ . El índice entero  $k_\lambda$  está relacionado con el número cuántico  $k$  mediante la expresión

$$k_\pm = k - \frac{1}{2} \pm \frac{s}{2}. \quad (\text{B.6})$$

Volviendo a la ecuación (B.5),  $N_n = (4\pi|qB|)^{1/4}/\sqrt{n!}$  y además hemos introducido las funciones parabólicas cilíndricas definidas como

$$D_n(x) = 2^{-n/2}e^{-x^2/4}H_n\left(x/\sqrt{2}\right) \quad (\text{B.7})$$

donde  $H_n(x)$  son los polinomios de Hermite, con la convención usual  $H_{-1}(x) = 0$ . En el caso particular de  $k = 0$ , las auto-funciones de Ritus  $\mathbb{E}_{\bar{p}}(x)$  se definen como matrices de  $2 \times 2$  de la siguiente forma

$$\mathbb{E}_{(0,p_2,p_3,p_4)}(x) = (4\pi|qB|)^{1/4} e^{i(p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)}e^{-\rho^2/4} \mathbb{I}_{2 \times 2} \quad (\text{B.8})$$

donde  $\mathbb{I}_{2 \times 2}$  es la matriz identidad en el sub-espacio donde  $E_{\bar{p}_\lambda}(x)$  es no nulo. Por otro lado, es fácil ver que las matrices  $\Delta^\lambda$  satisfacen

$$\Delta^\pm \Delta^\pm = \Delta^\pm, \quad \Delta^\pm \Delta^\mp = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta^\pm \gamma_\perp = \gamma_\perp \Delta^\mp, \quad \Delta^\pm \gamma_\parallel = \gamma_\parallel \Delta^\pm \quad (\text{B.10})$$

con  $\gamma_\perp = (\gamma_1, \gamma_2)$  y  $\gamma_\parallel = (\gamma_3, \gamma_4)$ .

A lo largo de la dirección del campo magnético, la función  $\mathbb{E}_{\bar{p}}(x)$  preserva la forma de la auto-función de energía de la partícula libre, siendo definida por el índice continuo  $p_3$ , el cual, corresponde a la componente del momento paralela a  $\vec{B}$ . Esta también es la situación en la dirección del tiempo imaginario. Por otro lado, los números cuánticos correspondientes al plano  $x_1x_2$  dependen de la elección del gauge utilizado para describir el potencial vectorial  $A_\mu$ . En nuestro caso particular hemos elegido el gauge de Landau, para el cual los estados asociados con la dirección  $x_1$  están cuantizados y descritos por el índice discreto  $k$ . A lo largo de la dirección  $x_2$ , la auto-función tiene la forma de la partícula libre, con la particularidad que los auto-valores no dependen de  $p_2$  y por lo tanto los estados son degenerados. Esta última propiedad nos lleva a una relación muy útil

$$\int \frac{dp_2}{2\pi} \mathbb{E}_{\bar{p}}(x)\bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x) = \int \frac{dp_2}{2\pi} \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x)\mathbb{E}_{\bar{p}}(x) = |qB| P_{k,s} \quad (\text{B.11})$$

donde hemos definido  $\bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}} = \gamma_0 \mathbb{E}_{\bar{p}}^\dagger \gamma_0$  y  $P_{k,\pm 1} = (1 - \delta_{k0}) \mathcal{I} + \delta_{k0} \Delta^\pm$ . El operador  $P_{k,\pm 1}$  es un proyector, esto implica que satisface  $P_{k,s} = (P_{k,s})^2$ . También puede demostrarse que  $P_{k,s} \mathbb{E}_{\bar{p}} = \mathbb{E}_{\bar{p}} P_{k,s} = \mathbb{E}_{\bar{p}}$ .

Las funciones de Ritus  $\mathbb{E}_{\bar{p}}(x)$  satisfacen las relaciones de ortogonalidad y completitud dadas por

$$\int d^4x \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x) \mathbb{E}_{\bar{p}'}(x) = \hat{\delta}_{\bar{p},\bar{p}'} P_{k,s} \quad (\text{B.12})$$

$$\sum_{\bar{p}} \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (\text{B.13})$$

donde hemos introducido la notación

$$\sum_{\bar{p}} \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{dp_2}{2\pi} \frac{dp_3}{2\pi} \frac{dp_4}{2\pi} \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{\delta}_{\bar{p},\bar{p}'} \equiv (2\pi)^4 \delta_{k,k'} \delta(p_2 - p_2') \delta(p_3 - p_3') \delta(p_4 - p_4'). \quad (\text{B.15})$$

Además, las funciones de Ritus satisfacen la importante identidad

$$\Pi \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) = \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) \left( -s \sqrt{2k|qB|} \gamma_2 + p_{||} \cdot \gamma_{||} \right) \quad (\text{B.16})$$

con  $p_{||} = (p_3, p_4)$ .

Dadas las funciones de Ritus, uno puede definir la transformada de Ritus de una función de Dirac arbitraria  $\psi(x)$  de la siguiente forma

$$\psi_{\bar{p}} = \int d^4x \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x) \psi(x), \quad \bar{\psi}_{\bar{p}} = \int d^4x \bar{\psi}(x) \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) \quad (\text{B.17})$$

junto con las transformadas inversas

$$\psi(x) = \sum_{\bar{p}} \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) \psi_{\bar{p}}, \quad \bar{\psi}(x) = \sum_{\bar{p}} \bar{\psi}_{\bar{p}} \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x). \quad (\text{B.18})$$

De la misma forma, la transformada de Ritus  $\mathcal{O}_{\bar{p},\bar{p}'}$  de un operador arbitrario  $\mathcal{O}_{x,x'}$  satisface

$$\mathcal{O}_{\bar{p},\bar{p}'} = \int d^4x d^4x' \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}}(x) \mathcal{O}_{x,x'} \mathbb{E}_{\bar{p}'}(x') \quad (\text{B.19})$$

$$\mathcal{O}_{x,x'} = \sum_{\bar{p},\bar{p}'} \mathbb{E}_{\bar{p}}(x) \mathcal{O}_{\bar{p},\bar{p}'} \bar{\mathbb{E}}_{\bar{p}'}(x'). \quad (\text{B.20})$$

# Apéndice C

## Propiedades de las funciones $G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f}$

En este apéndice se demostrará [72] como las funciones  $G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f}$  son diagonales en la base de momentos  $\bar{p}, \bar{p}'$ . Comencemos por definir las de la siguiente manera

$$G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f} = \int d^4x d^4x' E_{\bar{p}_\lambda}^*(x) g(x-x') \exp[i\Phi_f(x,x')] E_{\bar{p}'_\lambda}(x') \quad (\text{C.1})$$

donde  $\Phi_f(x,x') = (q_f B/2)(x_2 - x'_2)(x_1 + x'_1)$  y las funciones  $E_{\bar{p}_\lambda}(x)$  están definidas en la Ec. (B.5). Para trabajar con la expresión (C.1), introduciremos la transformada de Fourier de  $g(x)$  de la siguiente manera

$$\bar{g}(t^2) = \int d^4x e^{-it \cdot x} g(x) \quad (\text{C.2})$$

realizando el cambio de variables  $x = z + y/2$  y  $x' = z - y/2$ . Luego de esto, tenemos

$$G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f} = \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} g(t^2) \int d^4y d^4z E_{\bar{p}_\lambda}^*(z+y/2) \exp(it \cdot y) \exp(iq_f B y_2 z_1) E_{\bar{p}'_\lambda}(z-y/2). \quad (\text{C.3})$$

Dada la forma explícita de las funciones  $E_{\bar{p}_\lambda}(x)$ , las integrales sobre las variables  $z_2, z_3, z_4$  y  $y_3, y_4$  se pueden calcular de una manera muy simple. Obtenemos la expresión

$$G_{\bar{p},\bar{p}'}^{\lambda,f} = (2\pi)^3 \delta(p_2 - p'_2) \delta(p_3 - p'_3) \delta(p_4 - p'_4) \Gamma_{k,k',p_\parallel}^{\lambda,f} \quad (\text{C.4})$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,k',p_\parallel}^{\lambda,f} &= N_{k_\lambda} N_{k'_\lambda} \int \frac{d^2 t_\perp}{(2\pi)^2} \bar{g}(t_\perp^2 + p_\parallel^2) \int dz_1 d^2 y_\perp \\ &\times \exp(-ip_2 y_2) \exp(it_\perp \cdot y_\perp) \exp(iq_f B y_2 z_1) D_{k_\lambda}(\rho) D_{k'_\lambda}(\rho') \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

con  $t_\perp = (t_1, t_2)$  y

$$\begin{aligned} \rho &= s_f \sqrt{\frac{2}{|q_f B|}} [q_f B (z_1 + y_1/2) - p_2] \\ \rho' &= s_f \sqrt{\frac{2}{|q_f B|}} [q_f B (z_1 - y_1/2) - p_2] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

donde  $s_f = \text{sign}(q_f B)$ , mientras que la relación entre  $k_\lambda$  y  $k$  fue definida en la Ec. (B.6). Tomemos en cuenta ahora que la integración sobre la variable  $y_2$  introduce un factor  $2\pi\delta(q_f B z_1 - p_2 + t_2)$ , el cual nos permite realizar con facilidad la integral sobre  $t_2$ . Teniendo en cuenta la forma explícita de  $\rho$  y  $\rho'$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \Gamma_{k, k', p_{||}}^{\lambda, f} &= \frac{1}{[2\pi 2^{k_\lambda + k'_\lambda} k_\lambda! k'_\lambda!]^{1/2}} \int d\gamma d\eta d\psi \bar{g} \left[ \frac{|q_f B|}{2} (\gamma^2 + \eta^2) + p_{||}^2 \right] \\ &\times \exp(i\gamma\psi) \exp\left(-\frac{\eta^2 + \psi^2}{2}\right) H_{k_\lambda} \left( \frac{\eta + \psi}{\sqrt{2}} \right) H_{k'_\lambda} \left( \frac{\eta - \psi}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

donde hemos utilizado las funciones cilíndricas parabólicas  $D_n$  Ec. (B.7) en términos de los polinomios de Hermite, y por conveniencia hemos introducido las variables adimensionales

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{2}{|q_f B|}} t_1, & \eta &= s_f \sqrt{\frac{2}{|q_f B|}} (q_f B z_1 + p_2) \\ \psi &= \sqrt{\frac{|q_f B|}{2}} y_1. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Si realizamos un nuevo cambio de variables a coordenadas polares  $r, \phi$  en el plano  $\gamma\eta$  obtenemos la expresión

$$\Gamma_{k, k', p_{||}}^{\lambda, f} = \int_0^\infty dr r \bar{g} \left( \frac{|q_f B|}{2} r^2 + p_{||}^2 \right) \exp(-r^2/2) I_{k, k'}^\lambda(r) \quad (\text{C.9})$$

donde

$$\begin{aligned} I_{k, k'}^\lambda(r) &= \frac{1}{[2\pi 2^{k_\lambda + k'_\lambda} k_\lambda! k'_\lambda!]^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty d\psi \exp[-(\psi - ir \cos\phi)^2/2] \\ &\times H_{k_\lambda} \left( \frac{r \sin\phi + \psi}{\sqrt{2}} \right) H_{k'_\lambda} \left( \frac{r \sin\phi - \psi}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Ahora bien, podemos realizar una translación en el plano complejo  $\psi$ , de tal modo de cumplir con  $\psi \rightarrow \psi' = \psi - ir \cos\phi$ . Como el integrando de la expresión (C.10) es una función analítica, haciendo uso del teorema de Cauchy, podemos demostrar que el camino de integración se puede tomar a lo largo del eje  $\text{Im}\psi' = 0$ . De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} I_{k, k'}^\lambda(r) &= \frac{1}{[2\pi 2^{k_\lambda + k'_\lambda} k_\lambda! k'_\lambda!]^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^\infty d\psi \exp(-\psi^2/2) \\ &\times H_{k_\lambda} \left[ \frac{ir \exp(-i\phi) + \psi}{\sqrt{2}} \right] H_{k'_\lambda} \left[ \frac{-ir \exp(i\phi) - \psi}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

usando la relación  $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$  y la identidad (ver Ec. (7.377) Ref. [83])

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{-x^2} H_m(x+y) H_n(x+z) = 2^n \sqrt{\pi} m! z^{n-m} L_m^{n-m}(-2yz), \quad n \geq m \quad (\text{C.12})$$

donde  $L_a^b(x)$  son los polinomios generalizados de Laguerre. Finalmente, utilizando la relación

$$\int_0^{2\pi} d\phi \exp(i\phi m) = 2\pi\delta_{m0} \quad (\text{C.13})$$

obtenemos

$$I_{k,k'}^\lambda(r) = 2\pi(-1)^{k_\lambda} L_{k_\lambda}(r^2)\delta_{kk'}. \quad (\text{C.14})$$

Reemplazando la expresión (C.14) en la Ec. (C.9), y teniendo en cuenta la Ec. (C.4), después de realizar un nuevo cambio de variables  $r \rightarrow |p_\perp| = r\sqrt{|q_f B|}/2$  llegamos a la expresión final

$$G_{\vec{p},\vec{p}'}^{\lambda,f} = \hat{\delta}_{\vec{p},\vec{p}'} g_{k,p_\parallel}^{\lambda,f} \quad (\text{C.15})$$

donde  $g_{k,p_\parallel}^{\lambda,f}$  fue definida en la Ec. (3.20) del capítulo 3.

# Apéndice D

## Expresiones para la determinación de los parámetros del modelo de NJL no-local

Como se ha indicado al comienzo del Capítulo 4, para determinar numéricamente las cantidades de interés se deben fijar previamente los parámetros que aparecen en el Lagrangiano del modelo, es decir la masa corriente  $m_c$  y la constante de acoplamiento  $G$ , así como el factor de forma en el espacio de momentos  $\bar{g}(p)$ . En la presente tesis se utiliza un factor de forma gaussiano (ver Ec.(4.1)) que contiene un parámetro adicional  $\Lambda$ , que caracteriza el rango de la interacción quark-quark. Estos parámetros se determinan de manera tal que el modelo reproduzca a  $T = \mu = B = 0$  ciertos valores del condensado quiral  $\langle \bar{q}q \rangle$ , la masa y la constante de decaimiento del pion,  $m_\pi$  y  $f_\pi$ , respectivamente. En este Apéndice se indican las expresiones necesarias para calcular dichas cantidades dado un conjunto de valores de  $m_c$ ,  $G$  y  $\Lambda$ .

Consideremos la expansión en potencias de las fluctuaciones mesónicas de la acción efectiva bosonizada a temperatura, potencial químico y campo magnético nulos dado por,

$$S_{bos} = S_{bos}^{ACM} + S_{bos}^{cuad} + \dots, \quad (D.1)$$

donde el término lineal representa la acción bosonizada en la aproximación de campo medio (ACM) definida como

$$S_{bos}^{ACM} = -4N_c V^{(4)} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln [p^2 + M^2(p)] + \frac{\bar{\sigma}^2}{2G}, \quad (D.2)$$

con  $M(p^2) = m_c + \bar{g}(p^2)\bar{\sigma}$ . El término cuadrático viene dado por [73]

$$S_{bos}^{cuad} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\mathcal{G}^+(p^2) \delta\sigma(p) \delta\sigma(-p) + \mathcal{G}^-(p^2) \delta\vec{\pi}(p) \cdot \delta\vec{\pi}(-p)], \quad (D.3)$$

donde

$$\mathcal{G}^\pm(p^2) = \frac{1}{G} - 8N_c \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [\bar{g}(q^2)]^2 \frac{[(q^+ \cdot q^-) \mp M(q^+)M(q^-)]}{[(q^+)^2 + M^2(q^+)] [(q^-)^2 + M^2(q^-)]} \quad (D.4)$$

con  $q^\pm = q \pm p/2$ .

## D.1. Condensados quirales

Los condensados quirales se definen como los valores de expectación del vacío  $\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ . Estas cantidades pueden calcularse como:

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{\partial \Omega^{ACM}}{\partial m_c} \quad (D.5)$$

donde  $\Omega^{ACM} = S_{bos}^{ACM}/V^4$  es el gran potencial termodinámico definido en la aproximación de campo medio. La expresión para los condensados viene dada de manera general por [73]:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)}. \quad (D.6)$$

## D.2. Masa del pión y constante de acoplamiento quark-mesón

La masa del pión puede ser calculada resolviendo la siguiente ecuación [73]

$$\mathcal{G}^-(m_\pi^2) = 0. \quad (D.7)$$

En este punto, es necesario realizar una renormalización de la función de onda de los campos pseudo-escalares. El campo piónico renormalizado  $\vec{\tilde{\pi}}(p) = \vec{\pi}(p)/Z_\pi^{1/2}$  es definido fijando el residuo de  $\mathcal{G}^-(p^2)$  en el polo del pión, además de imponer la condición de que en la vecindad del polo la correspondiente contribución al Lagrangiano cuadrático sea dada por

$$(\mathcal{L}_E^{cuad})_\pi = \frac{1}{2} (p^2 + m_\pi^2) \vec{\tilde{\pi}}(p) \cdot \vec{\tilde{\pi}}(-p). \quad (D.8)$$

De esta manera obtenemos

$$Z_\pi^{-1} = \left. \frac{d\mathcal{G}^-(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2 = -m_\pi^2}. \quad (D.9)$$

Finalmente la constante de acoplamiento quark-mesón  $g_{\pi q\bar{q}}$ , puede determinarse mediante el residuo del propagador piónico en el polo, lo que lleva a la expresión

$$g_{\pi q\bar{q}} = Z_{\pi}^{1/2}. \quad (\text{D.10})$$

### D.3. Constante de decaimiento débil del pión

La constante de decaimiento débil del pión  $f_{\pi}$ , se define como el elemento de matriz de la corriente axial  $A_{\mu}^a(x)$  entre el vacío y el estado renormalizado del pión evaluado en el polo piónico [84, 85]:

$$\langle 0 | A_{\mu}^a(0) | \tilde{\pi}^b(p) \rangle = i\delta^{ab} p_{\mu} f_{\pi}. \quad (\text{D.11})$$

Para obtener una expresión explícita de la corriente axial, es necesario aplicar una transformación de gauge a la acción efectiva  $S_E$  Ec. (3.1), introduciendo un conjunto de campos de gauge axiales  $\mathcal{A}_{\mu}^a(x)$ . En el caso local, esta transformación de gauge se obtiene mediante el reemplazo

$$\partial_{\mu} \longrightarrow \partial_{\mu} + \frac{i}{2} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{A}}_{\mu}(x), \quad (\text{D.12})$$

mientras que en el caso no-local, se requiere de un reemplazo adicional en la expresión de las corrientes no-locales Ec. (2.57), dado por

$$\psi(x - z/2) \longrightarrow W_A(x, x - z/2) \psi(x - z/2) \quad (\text{D.13})$$

$$\bar{\psi}(x + z/2) \longrightarrow \bar{\psi}(x + z/2) W_A(x + z/2, x) \quad (\text{D.14})$$

donde la función  $W_A(x, y)$  se define como

$$W_A(x, y) = P \exp \left[ \frac{i}{2} \int_x^y ds_{\mu} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\mathcal{A}}_{\mu}(s) \right], \quad (\text{D.15})$$

con  $s$  variando en un camino arbitrario que conecta a  $x$  con  $y$  [86].

Habiendo incorporado las transformaciones de gauge a la acción efectiva se puede calcular la corriente axial derivando esta acción con respecto a  $\mathcal{A}_{\mu}^a(x)$  y evaluandola en  $\vec{\mathcal{A}}_{\mu}(x) = 0$ . La derivada con respecto a los campos mesónicos renormalizados de esta expresión resultante, define la correspondiente constante de decaimiento débil del pión  $f_{\pi}$  de la siguiente manera

$$f_{\pi} = Z_{\pi}^{1/2} \frac{F(-m_{\pi}^2) - F(0)}{m_{\pi}^2}, \quad (\text{D.16})$$

donde  $F(p^2)$  esta dada por

$$F(p^2) = m_c J(p^2) + \bar{\sigma} K(p^2), \quad (\text{D.17})$$

con

$$J(p^2) = 8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\bar{g}(q^2)] \frac{[(q^+ \cdot q^-) + M(q^+)M(q^-)]}{[(q^+)^2 + M^2(q^+)] [(q^-)^2 + M^2(q^-)]} \quad (\text{D.18})$$

$$K(p^2) = 8N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\bar{g}(q^2)]^2 \frac{[(q^+ \cdot q^-) + M(q^+)M(q^-)]}{[(q^+)^2 + M^2(q^+)] [(q^-)^2 + M^2(q^-)]} \quad (\text{D.19})$$

aquí, como se definió antes,  $q^\pm = q \pm p/2$  [73].

De las ecuaciones (D.16) y (D.17) podemos deducir la siguiente expresión

$$f_{\pi,0} = Z_{\pi,0}^{1/2} \left[ \frac{F(-p^2) - F(0)}{p^2} \right]_{p^2=0} = -\bar{\sigma}_0 Z_{\pi,0}^{1/2} K'_0(0), \quad (\text{D.20})$$

donde el subíndice 0 implica que las cantidades con las que estamos tratando estan evaluadas en el límite quiral ( $m_c \rightarrow 0$ ). La derivada primera presente en la ecuación (D.20) se realiza respecto a la variable  $p^2$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones (D.9) y (D.10), además de la relación  $\mathcal{G}_0^-(p^2) = 1/G - K_0(p^2)$ , obtenemos

$$K'_0(0) = -Z_{\pi,0}^{-1} = -g_{\pi q \bar{q},0}^{-2}. \quad (\text{D.21})$$

Considerando esta última expresión junto a la ecuación (D.20) podemos inferir una importante relación quiral, la denominada relación Goldberger-Treiman (GT) [87], la cual se expresa como

$$f_{\pi,0} \mathcal{G}_{\pi q \bar{q},0} = \bar{\sigma}_0. \quad (\text{D.22})$$

Para finalizar, utilizando la relacion (GT) y luego de un cálculo explicito de  $Z_{\pi,0}$  podemos obtener la expresión final para la constante de decaimiento débil del pión en el límite quiral  $f_{\pi,0}^2$ , en términos de las masas constituyentes dependientes del impulso  $M(q)$  como

$$f_{\pi,0}^2 = 2N_c \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2M_0^2(q) - q^2 M_0(q) M'_0(q)}{[q^2 + M_0^2(q)]^2}. \quad (\text{D.23})$$

Es importante destacar aquí, que los parámetros correspondientes al caso de masa corriente finita,  $m_c$ ,  $\Lambda$  y  $g = G\Lambda^2$  (ver Tabla (4.2)), no fueron calculados en este trabajo, ya que la obtención de los mismos no es parte de los alcances de esta tesis. Estos parámetros fueron obtenidos de la literatura, ver Ref. [72, 73], donde los mismos se utilizan en el

estudio del comportamiento de la materia de quarks en diversos contextos. Respecto a los parámetros correspondientes al caso quiral,  $\Lambda$  y  $g = G\Lambda^2$  (ver Tabla (4.1)), como se mencionó en el capítulo 4, los mismos fueron calculados numéricamente a partir de las ecuaciones (D.6), (D.23) y la *ecuación del gap* Ec. (2.58), fijando los valores de  $f_{\pi,0} = 90 \text{ MeV}$  y  $-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3} = 220, 240$  y  $260 \text{ MeV}$  [59,60].

# Bibliografía

- [1] Steven Weinberg. Non-abelian gauge theories of the strong interactions. *Physical Review Letters*, 31(7):494, 1973.
- [2] M. Gell-Mann H. Fritzsch and H. Leutwyler. 16th int. conf. on high energy physics, chicago (1972). *Phys. Lett. B*, 47:365, 1973.
- [3] W. Noel Cottingham and Derek A. Greenwood. *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge university press, 2007.
- [4] John C. Collins and Malcolm J. Perry. Superdense matter: neutrons or asymptotically free quarks? *Physical Review Letters*, 34(21):1353, 1975.
- [5] Nicola Cabibbo and Giorgio Parisi. Exponential hadronic spectrum and quark liberation. *Physics Letters B*, 59(1):67–69, 1975.
- [6] Kenji Fukushima and Tetsuo Hatsuda. The phase diagram of dense QCD. *Reports on Progress in Physics*, 74(1):014001, 2010.
- [7] Jean Cleymans, Rajiv V. Gavai, and Esko Suhonen. Quarks and gluons at high temperatures and densities. *Physics Reports*, 130(4):217–292, 1986.
- [8] Hildegard Meyer-Ortmanns. Phase transitions in quantum chromodynamics. *Reviews of Modern Physics*, 68(2):473, 1996.
- [9] T. Schäfer. Quark matter, Lectures delivered at the 14th Summer School in Nuclear Physics (Santa Fe, NM) and the BARC workshop on Quarks and Mesons. *arXiv preprint hep-ph/0304281*.
- [10] S. Aoki, M. Fukugita, S. Hashimoto, N. Ishizuka, Y. Iwasaki, K. Kanaya, Y. Kuramashi, H. Mino, M. Okawa, A. Ukawa, et al. Scaling study of the two-flavor chiral

- phase transition with the Kogut-Susskind quark action in lattice QCD. *Physical Review D*, 57(7):3910, 1998.
- [11] Yasumichi Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz, and K.K. Szabo. The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit. *Physics Letters B*, 643(1):46–54, 2006.
- [12] Ulrich Heinz and Maurice Jacob. Evidence for a new state of matter: An assessment of the results from the CERN Lead Beam Programme. 03 2000.
- [13] Rachid Nouicer. New state of nuclear matter: Nearly perfect fluid of quarks and gluons in heavy-ion collisions at RHIC energies. *The European Physical Journal Plus*, 131(3):70, 2016.
- [14] I. Arsene, I.G. Bearden, D. Beavis, C. Besliu, B. Budick, H. Bøggild, C. Chasman, C.H. Christensen, P. Christiansen, J. Cibor, et al. Quark-gluon plasma and color glass condensate at RHIC? the perspective from the BRAHMS experiment. *Nuclear Physics A*, 757(1-2):1–27, 2005.
- [15] B.B. Back, M.D. Baker, M. Ballintijn, D.S. Barton, B. Becker, R.R. Betts, A.A. Bickley, R. Bindel, A. Budzanowski, W. Busza, et al. The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC. *Nuclear Physics A*, 757(1-2):28–101, 2005.
- [16] David Blaschke, Norman K. Glendenning, and Armen Sedrakian. *Physics of neutron star interiors*, volume 578. Springer Science & Business Media, 2001.
- [17] Subrahmanyan Chandrasekhar and E.A. Milne. The highly collapsed configurations of a stellar mass. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91(5):456–466, 1931.
- [18] Alekski Kurkela, Eduardo S. Fraga, Jürgen Schaffner-Bielich, and Alekski Vuorinen. Constraining neutron star matter with Quantum Chromodynamics. *The Astrophysical Journal*, 789(2):127, 2014.
- [19] Andreas Zacchi, Rainer Stiele, and Jürgen Schaffner-Bielich. Compact stars in a SU(3) quark-meson model. *Physical Review D*, 92(4):045022, 2015.

- 
- [20] Prashanth Jaikumar, Gautam Rupak, and Andrew W. Steiner. Viscous damping of r-mode oscillations in compact stars with quark matter. *Physical Review D*, 78(12):123007, 2008.
- [21] Krishna Rajagopal and Eugene Shuster. Applicability of weak-coupling results in high density QCD. *Physical Review D*, 62(8):085007, 2000.
- [22] Frithjof Karsch and Edwin Laermann. Susceptibilities, the specific heat, and a cumulant in two-flavor QCD. *Physical Review D*, 50(11):6954, 1994.
- [23] M. Cheng, N.H. Christ, S. Datta, J. Van der Heide, C. Jung, Frithjof Karsch, Olaf Kaczmarek, Edwin Laermann, R.D. Mawhinney, C. Miao, et al. QCD equation of state with almost physical quark masses. *Physical Review D*, 77(1):014511, 2008.
- [24] Walter Greiner, Stefan Schramm, and Eckart Stein. *Quantum chromodynamics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [25] Claude Itzykson and Jean-Bernard Zuber. *Quantum field theory*. Courier Corporation, 2012.
- [26] Yoichiro Nambu and Giovanni Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II. *Physical Review*, 124(1):246, 1961.
- [27] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. 246; for a review, see sp klevansky. *Rev. Mod. Phys*, 64(649):31, 1992.
- [28] Tetsuo Hatsuda and Teiji Kunihiro. QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian. *Physics Reports*, 247(5-6):221–367, 1994.
- [29] Thomas Schäfer and Edward V. Shuryak. Instantons in QCD. *Reviews of Modern Physics*, 70(2):323, 1998.
- [30] C.D. Roberts and A.G. Williams. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 1994.
- [31] Santiago Noguera. Non local Lagrangians: The pion. *International Journal of Modern Physics E*, 16(01):97–132, 2007.

- 
- [32] S. Noguera and N.N. Scoccola. Nonlocal chiral quark models with wavefunction renormalization: Sigma properties and  $\pi$ - $\pi$  scattering parameters. *Physical Review D*, 78(11):114002, 2008.
- [33] Maria B. Parappilly, Patrick O. Bowman, Urs M. Heller, Derek B Leinweber, Anthony G. Williams, and J.B. Zhang. Scaling behavior of the quark propagator in full QCD. *Physical Review D*, 73(5):054504, 2006.
- [34] Sadataka Furui and Hideo Nakajima. Unquenched Kogut-Susskind quark propagator in lattice Landau gauge QCD. *Physical Review D*, 73(7):074503, 2006.
- [35] E. Ruiz Arriola and L.L. Salcedo. Chiral and scale anomalies of non local Dirac operators. *Physics Letters B*, 450(1-3):225–233, 1999.
- [36] D. Blaschke, Yu L. Kalinovsky, G. Roepke, S. Schmidt, and M.K. Volkov.  $1/n$  c expansion of the quark condensate at finite temperature. *Physical Review C*, 53(5):2394, 1996.
- [37] Robert S. Plant and Michael C. Birse. Mesonic fluctuations in a nonlocal Nambu-Jona-Lasinio model. *Nuclear Physics A*, 703(3-4):717–744, 2002.
- [38] Robert S. Plant and Michael C. Birse. Meson properties in an extended non-local NJL model. *Nuclear Physics A*, 628(4):607–644, 1998.
- [39] Amir H. Rezaeian, Niels R. Walet, and Michael C. Birse. Baryon structure in a quark-confining nonlocal Nambu-Jona-Lasinio model. *Physical Review C*, 70(6):065203, 2004.
- [40] Barbara Szczerbinska and Wojciech Broniowski. Chiral restoration in effective quark models with non-local interactions. *Acta Phys. Pol. B*, 31:835, 2000.
- [41] D. Gomez Dumm and N.N. Scoccola. Characteristics of the chiral phase transition in nonlocal quark models. *Physical Review C*, 72(1):014909, 2005.
- [42] Chryssa Kouveliotou, S. Dieters, T. Strohmayer, J. Van Paradijs, G.J. Fishman, C.A. Meegan, K. Hurley, J. Kommers, I. Smith, D. Frail, et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft  $\gamma$ -ray repeater SGR1806-20. *Nature*, 393(6682):235–237, 1998.

- 
- [43] Dong Lai and Stuart L. Shapiro. Cold equation of state in a strong magnetic field—Effects of inverse beta-decay. *The Astrophysical Journal*, 383:745–751, 1991.
- [44] Debades Bandyopadhyay, Somenath Chakrabarty, and Subrata Pal. Quantizing magnetic field and quark-hadron phase transition in a neutron star. *Physical review letters*, 79(12):2176, 1997.
- [45] Efrain J. Ferrer, Vivian de La Incera, Jason P Keith, Israel Portillo, and Paul L. Springsteen. Equation of state of a dense and magnetized fermion system. *Physical Review C*, 82(6):065802, 2010.
- [46] Dmitri E. Kharzeev, Karl Landsteiner, Andreas Schmitt, and Ho-Ung Yee. Strongly interacting matter in magnetic fields: a guide to this volume. In *Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields*, pages 1–11. Springer, 2013.
- [47] Dmitri E. Kharzeev, Larry D. McLerran, and Harmen J. Warringa. The effects of topological charge change in heavy ion collisions: “Event by event P and CP violation”. *Nuclear Physics A*, 803(3-4):227–253, 2008.
- [48] V.P. Gusynin, V.A. Miransky, and I.A. Shovkovy. Catalysis of dynamical flavor symmetry breaking by a magnetic field in 2+1 dimensions. *Physical Review Letters*, 73(26):3499, 1994.
- [49] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, A. Schäfer, and K. K. Szabó. The QCD phase diagram for external magnetic fields. *Journal of High Energy Physics*, 2012(2), Feb 2012.
- [50] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, and A. Schäfer. QCD quark condensate in external magnetic fields. *Physical Review D*, 86(7), Oct 2012.
- [51] Florian Preis, Anton Rebhan, and Andreas Schmitt. Inverse magnetic catalysis in dense holographic matter. *Journal of High Energy Physics*, 2011(3):33, 2011.
- [52] Sidney S. Avancini, Débora P. Menezes, Marcus B. Pinto, and Constan ça Providência. QCD critical end point under strong magnetic fields. *Phys. Rev. D*, 85:091901, May 2012.

- 
- [53] Pablo G. Allen and Norberto N. Scoccola. Quark matter under strong magnetic fields in SU(2) NJL-type models: parameter dependence of the cold dense matter phase diagram. *Physical Review D*, 88(9):094005, 2013.
- [54] Ana G. Grunfeld, Débora P. Menezes, Marcus B. Pinto, and Norberto N. Scoccola. Phase structure of cold magnetized quark matter within the SU(3) NJL model. *Physical Review D*, 90(4), Aug 2014.
- [55] P. G. Allen, V. Pagura, and N. N. Scoccola. Cold magnetized quark matter phase diagram within a generalized SU(2) NJL model. *Phys. Rev. D*, 91:114024, Jun 2015.
- [56] P. Allen, A.G. Grunfeld, and N.N. Scoccola. Magnetized color superconducting cold quark matter within the SU(2)fNJL model: A novel regularization scheme. *Physical Review D*, 92(7), Oct 2015.
- [57] C Amsler. Particle Data Group Collaboration et al 2008 *Phys. Lett. B*, 667(1).
- [58] Gdt Hooft. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudo-particle. *Physical review: D*, 14(12):3432–3450, 1976.
- [59] Hans Gunter Dosch and Stephan Narison. Direct extraction of the chiral quark condensate and bounds on the light quark masses. *Physics Letters B*, 417(1-2):173–176, 1998.
- [60] Leonardo Giusti, F. Rapuano, M. Talevi, and A. Vladikas. The QCD chiral condensate from the lattice. *Nuclear Physics B*, 538(1-2):249–277, 1999.
- [61] U. Vogl and W. Weise. The Nambu and Jona-Lasinio model: its implications for hadrons and nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 27:195–272, 1991.
- [62] S. P. Klevansky. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, Jul 1992.
- [63] Michael Buballa. NJL-model analysis of dense quark matter phys. *Rept*, 407:205–376, 2005.
- [64] Georges Ripka. *Quarks Bound by Chiral Fields: The quark structure of the vacuum and of light mesons and baryons*. Number 21. Oxford University Press, 1997.

- 
- [65] Robert David Bowler and M.C. Birse. A nonlocal, covariant generalisation of the NJL model. *Nuclear Physics A*, 582(3-4):655–664, 1995.
- [66] Hiroshi Ito, Warren W Buck, and Franz Gross. Current conservation and interaction currents with relativistic separable interactions. *Physical Review C*, 43(6):2483, 1991.
- [67] Sebastian Schmidt, David Blaschke, and Yura L. Kalinovsky. Scalar-pseudoscalar meson masses in nonlocal effective QCD at finite temperature. *Physical Review C*, 50(1):435, 1994.
- [68] Robert S. Plant and Michael C. Birse. Meson properties in an extended non-local NJL model. *Nuclear Physics A*, 628(4):607–644, 1998.
- [69] Joseph I. Kapusta and Charles Gale. *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. Cambridge university press, 2006.
- [70] Michel Le Bellac. *Thermal field theory*. Cambridge university press, 2000.
- [71] J.A. Maruhn, P.G. Reinhard, P.D. Stevenson, and A.S. Umar. The tdhf code sky3d. *Computer Physics Communications*, 185(7):2195–2216, 2014.
- [72] D. Gómez Dumm, M.F. Izzo Villafaña, S. Noguera, Valeria Paula Pagura, and Norberto Nerio Scoccola. Strong magnetic fields in nonlocal chiral quark models. *Physical Review D*, 96(11):114012, 2017.
- [73] D. Gomez Dumm, A.G. Grunfeld, and N.N. Scoccola. Covariant nonlocal chiral quark models with separable interactions. *Physical Review D*, 74(5):054026, 2006.
- [74] D. Gomez Dumm, S. Noguera, and N.N. Scoccola. Pion radiative weak decays in nonlocal chiral quark models. *Physics Letters B*, 698(3):236–242, 2011.
- [75] Franz Gross and D.O. Riska. Current conservation and interaction currents in relativistic meson theories. *Physical Review C*, 36(5):1928, 1987.
- [76] Claude Bloch. On field theories with non-localized interaction. *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.*, 27:1–55, 1952.
- [77] V.I. Ritus. Method of eigenfunctions and mass operator in quantum electrodynamics of a constant field. Technical report, CM-P00067532, 1978.

- 
- [78] Michael Buballa. The problem of matter stability in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Nuclear Physics A*, 611(4):393–408, 1996.
- [79] A.S. Vshivtsev, K.G. Klimenko, and V. Ch. Zhukovsky. Pis' ma zh. éksp. Teor. Fiz. 64, 313 (1996)[JETP Lett. 64, 338 (1996)]. *Zh. Éksp. Teor. Fiz*, 111:1921, 1997.
- [80] A.S. Vshivtsev, V. Ch. Zhukovskii, and K.G. Klimenko. New critical properties of the Nambu-Jona-Lasinio model with nonzero chemical potential. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 84(6):1047–1053, 1997.
- [81] D. Ebert, K.G. Klimenko, M.A. Vdovichenko, and A.S. Vshivtsev. Magnetic oscillations in dense cold quark matter with four-fermion interactions. *Physical Review D*, 61(2):025005, 1999.
- [82] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. Path Integrals in Field Theory. In *Field Quantization*, pages 365–431. Springer, 1996.
- [83] Izrail Solomonovich Gradshteyn and Iosif Moiseevich Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.
- [84] Claude Amsler, Michael Doser, P. Bloch, A. Ceccucci, G.F. Giudice, A. Höcker, M.L. Mangano, A. Masoni, S. Spanier, N.A. Törnqvist, et al. Review of particle physics. *Physics Letters B*, 667(1-5):1–6, 2008.
- [85] J. Gasser and G.R.S. Zarnauskas. On the pion decay constant. *Physics Letters B*, 693(2):122–128, Sep 2010.
- [86] J.W. Bos, J.H. Koch, and H.W.L. Naus. Currents and Ward-Takahashi identities for nonlocal quantum field theories. *Physical Review C*, 44(1):485, 1991.
- [87] M.L. Goldberger and S.B. Treiman. Decay of the pi meson. *Physical Review*, 110(5):1178, 1958.