Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Depto. de Matemática - Escuela de Formación Básica
Cálculo IV - Año 2020.
Proforas: Doc. Inés Szeliga - Lic. Mariana Cisneros.

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En ingeniería se hace necesario construir modelos, es decir, representaciones simplificadas de la realidad que nos permitan estudiar los fenómenos físicos de interés. Con frecuencia, de estos modelos se obtiene una ecuación que contiene la función incógnita y algunas de sus derivadas, es decir, una ecuación diferencial para la función incógnita. Conociendo algunos valores iniciales, será posible obtener el comportamiento del sistema para distintos instantes de tiempo y predecir su comportamiento futuro.

Un tipo de modelo que aparece con frecuencia son **los modelos de crecimiento poblacional**. Estos modelos surgen en problemas muy diferentes como la desintegración de una sustancia radiactiva, el crecimiento de una población (que podría ser una población de bacterias en un cultivo, por ejemplo) o la propagación de enfermedades.

Dada la situación actual que estamos atravesando a nivel mundial por la propagación del COVID-19, vamos a plantear un problema de este último caso.

La variación del número de infectados por un cierto virus en una población en un dado instante t es **proporcional** al número de personas que están enfermas[1] en ese instante t. En este problema la variable de interés es el número de infectados por ese virus en un dado instante t, la llamaremos $N(t)$. Esta variable es, claramente, **discreta**, es decir, los valores N son naturales. Pero vamos a modelar el problema como si fuera una variable continua, es decir, los valores N son **reales** redondeando el resultado obtenido al resolverlo para que tenga sentido el resultado.

Actividad 1. ***Modelización:*** *Utilizando la descripción de un modelo poblacional escriba una ecuación que relacione las variables número de infectados y tiempo. Complete:*

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{variacion\ infectados} = \underbrace{\qquad}_{proporcional}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{infectados}$$

La ecuación que hemos obtenido se denomina **Ecuación Diferencial Ordinaria** y se nota **EDO**, más adelante formalizaremos las definiciones, pero continuemos con el estudio del modelo.

Actividad 2. ***Constante de proporcionalidad:*** *La constante de proporcionalidad puede variar de una población a otra (y también cambiaría si modeláramos otra enfermedad). Sin embargo, es posible analizar el signo de dicha constante. Complete la siguiente frase:*

Dado que el número de infectados está aumentando, la tasa de variación del número de infectados _____ tiene signo _______________ y como $N(t)$ es positiva, resulta que k debe tener signo _______________.

[1] Esto suponiendo que la población sea suficientemente grande como para que siempre haya gente nueva que se puede infectar, que no existan vacunas y sin tener en cuenta que las personas pueden recuperarse o morir.

Como todavía no sabemos resolver una EDO, es decir, encontrar una función (derivable en un intervalo) que cumpla la igualdad entonces realizaremos un estudio gráfico para poder comprender el comportamiento de las soluciones en este modelo. Para ello, les propongo antes de continuar leer la sección 2.3 del apunte Notas de clases, solo para poder dibujar el campo de pendientes de la EDO que estamos estudiando.

Actividad 3. *Dada la EDO definida en la actividad 1)*

1. *Realice distintos campos de pendientes para los valores de* $k = 1, 5, 10$. *Sugerencia: en geogebra el comando para graficar un campo de pendientes es **CampoDirecciones(F(x,y))**.*

2. *¿El comportamiento de las soluciones cambia para los distintos valores de* k*?*

3. *Complete:*

Las soluciones de la EDO ________________ *son* $\phi(t) = A$ _____^{k___}

Para encontrar las constantes A y k que aparecen en dicha ecuación debemos concentrarnos en una enfermedad y una población particular. Tomamos algunos datos del número de enfermos de COVID-19 en Estados Unidos (donde casi no se aplicaron medidas de aislamiento hasta el 16 de marzo, a pesar de recomendaciones de la OMS) El día 1 de marzo, el número de infectados ascendía a 89 personas, mientras que si se observan los registros correspondientes al 10 de marzo , el número de infectados ya llegaba a 1000 individuos.

Actividad 4. ***Análisis del modelo:***

1. *Formule el PVI que modela el problema.*

2. *Con lo visto en la actividad 3) resuelva para encontrar las constantes* A *y* k.

3. *Analice en base a ese modelo cuántos infectados había el 6 de marzo (el dato que tenemos es que había 444 enfermos).*

4. *Según este modelo, ¿cuál será el número de infectados el 15 de marzo? (comparen con el dato que tenemos, que era de 3505 infectados)*

Más allá que el error va creciendo a medida que nos alejamos en el horizonte de predicción, podrán observar que este simple modelo exponencial para la propagación del virus parece bastante razonable. Como ya se ha dicho en todos lados, la política de aislamiento intenta aplanar la curva que, matemáticamente hablando, es disminuir los valores de las constantes A y k.

Y por eso es que hoy es mejor que nos #quedemosencasa.