

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DESCRIPCIÓN HOLOGRÁFICA DUAL DE PLASMAS DE TEORÍAS DE YANG-MILLS

TESINA DE LICENCIATURA EN FÍSICA

Lucía Cabrera
lucia.mcabrera@gmail.com

Director:
Dr. Martin Schvellinger
IFLP - UNLP

*A la memoria de mi padre,
Julio Daniel Cabrera
1948-2019*

Índice general

Agradecimientos	IX
Prefacio	XI
1. Introducción	1
1.1. Plasma de Quarks y Gluones: Una mirada cualitativa	2
1.2. Colisiones de Iones Pesados	3
1.2.1. Flujo Elíptico	5
2. Ingredientes de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills	7
2.1. Teorías de <i>gauge</i> no abelianas	7
2.1.1. Teorías de Yang-Mills	7
2.2. Teorías de <i>gauge</i> superconformes	10
2.2.1. $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills	11
3. Teoría de Cuerdas: <i>crash course</i>	15
3.1. Cuerdas	16
3.2. D-branas y Teorías de <i>gauge</i>	19
3.3. D-branas como una geometría espacio-temporal	22
4. Correspondencia AdS/CFT	25
4.1. Una primera mirada a la Conjetura de Maldacena	26
4.2. Dualidad <i>gauge</i> /gravedad	27
4.3. Generalización a temperatura finita	28
5. Viscosidad de corte de un plasma fuertemente acoplado de $\mathcal{N} = 4$ SYM	31
5.1. Viscosidad	31
5.2. La relación con la sección eficaz de absorción de un gravitón	32
6. Resultados y Discusión	35
6.1. Soluciones efectivas por región	35
6.2. Probabilidad de absorción y sección eficaz de absorción	43
6.3. Viscosidad de corte	47
6.4. Densidad de entropía	48
6.5. Discusión	50
7. Conclusiones globales	53
A. Variables de Mandelstam	55
A.1. Energía de centro de masa	55
B. $\mathcal{N} = 4$ AdS? El espacio anti-de Sitter	57

C. Temperatura de Hawking en una métrica general de una brana negra	59
C.1. Temperatura de una 3-brana negra no extremal	60
Referencias	61

Índice de figuras

1.1.	Dependencia de la constante de acoplamiento fuerte $\alpha_s = g^2/4\pi$. Para mayor energía (y menor distancia), la intensidad de la interacción disminuye. Notar la escala logarítmica en las abscisas.	2
1.2.	Una colisión <i>head-on</i> entre núcleos de oro en RHIC típicamente produce varios miles de partículas. Estos eventos se registran en los detectores STAR y PHENIX como trayectorias de partículas cargadas (mayormente piones) que emergen de colisiones individuales. Imágenes tomadas de [21].	4
1.3.	Una de las primeras colisiones entre núcleos de plomo en el LHC, registrada por ALICE en noviembre de 2010. Imagen tomada de [22].	4
1.4.	En colisiones no alineadas de núcleos pesados a energías muy altas, la región de forma oval calentada es elongada en la dirección y , perpendicular al plano de reacción (a). Las interacciones colectivas entre quarks y gluones producen gradientes de presión que resultan en flujo asimétrico. La distribución angular de los hadrones producidos es anisotrópica con respecto al plano de reacción, y sus momentos son mayores en dirección x (b).	5
3.1.	Hojas de mundo trazadas por una cuerda abierta (derecha) y una cerrada (izquierda).	17
3.2.	Interacciones ‘geométricas’ en teoría de cuerdas: Dos cuerdas cerradas en estados iniciales i y j pueden unirse formando una única cuerda de estado final k (derecha) o viceversa (izquierda).	18
3.3.	Suma sobre topologías que contribuyen a una amplitud de dispersión en un proceso de <i>scattering</i> dos a dos.	18
3.4.	Contribución de orden g_s^2 a un proceso de <i>scattering</i> de dos cuerdas cerradas en dos cuerdas cerradas (3.4a). El límite de bajas energías de este diagrama debe coincidir con el correspondiente diagrama de teoría de campos, que es proporcional a la constante de Newton G (3.4b).	19
3.5.	Apilamiento de D-branas.	20
3.6.	Cuerdas que se extienden entre dos branas separadas en distancia r	20
3.7.	Excitaciones del sistema en forma de cuerdas abiertas y cerradas.	21
3.8.	Excitaciones del sistema en la descripción de cuerdas cerradas.	24
6.1.	Gráficas correspondientes a las partes real e imaginaria de una función de forma general $(1 - r/r_0)^{\frac{-i\lambda}{4}}$, con $\lambda \ll 1$. A modo de ejemplo, se ilustra la forma de estas funciones para $r_0 = 1$ y $\lambda = 0,001$. Nota: La variación de la parte real con respecto a la coordenada radial es tan pronunciada que el software graficador no resuelve cifras significativas más allá de la unidad.	41
6.2.	Dependencia funcional de la razón η/s con la constante de acoplamiento de ‘t Hooft g^2N . La razón diverge para el límite $g^2N \rightarrow 0$, en tanto que alcanza la cota inferior calculada cuando $g^2N \rightarrow \infty$	51

6.3. La razón entre viscosidad de corte y entropía específica para algunas sustancias comunes: helio, nitrógeno y agua. La razón η/s es siempre apreciablemente superior al valor de la cota conjeturada en (6.5.5), representada por la línea horizontal etiquetada “Viscosity bound” en el gráfico. Imagen tomada de [54].	52
A.0.1 Diagrama de Feynman para una interacción en el canal s.	55

Agradecimientos

Quisiera agradecer, en primerísimo lugar, al director de este trabajo, Martín. Incontables dificultades se presentaron durante el desarrollo de esta tesina: personales, académicas, geográficas. Sin embargo, no puedo menos que destacar su incansable paciencia y buena voluntad. Su altísimo nivel humano e intelectual. Gracias.

Mi más profundo agradecimiento es también para Alejandra Martínez, a quien debería quizá referirme como mi docente, pero que en mis pensamientos y lenguaje se impone como mi *amiga*. Alejandra tuvo un rol crucial en mi permanencia en la carrera, y por eso le estoy eternamente agradecida.

A Luis Manuel, quien es para mí un mentor y modelo, agradezco no sólo por sus maravillosas clases, su saber inconcebiblemente vasto y su voluntad de compartirlo, sino también por su grandeza como persona, su confianza y apoyo. Constituye para mí una satisfacción muy grande poder discutir problemas y conceptos interesantes con él.

A Hugo Navone, uno de los docentes más eclécticos de nuestra Licenciatura (y Profesorado), por recordarme muchas veces a través de sus innovadoras clases que la física puede pensarse desde muchas aristas, todas ellas válidas.

Quiero también dar gracias particularmente a los docentes de las materias Mecánica Estadística, Adolfo Trumper y Sergio Koval, y de Materia Condensada, Ariel Dobry y Marcelo Stachiotti, sin el apoyo de quienes no podría estar hoy escribiendo estas líneas en mi trabajo final.

A quienes fueron mis compañeras y compañeros en incursiones en la docencia en las cátedras de Introducción a la Ciencia, Matemática Aplicada I y Matemática Aplicada II. Todos y cada uno de ellos son personas que valoro y respeto, y que siempre, de forma totalmente desinteresada, estuvieron prestos a ayudar.

A mis amigos Román y Valentín, compañeros de trabajos prácticos, cafés, e intercambios de toda clase. Gracias por, en tantas ocasiones, ayudarme a salir de mi letargo académico.

Y, sin más, a todo el cuerpo docente y a mis compañeros de la Licenciatura en Física de la FCEIA, mi segunda familia.

Agradezco a Soledad, a quien admiro y estimo profundamente. Sin su apoyo no hubiese sido capaz de conjurar el coraje necesario para llevar a cabo este trabajo.

A Federico, un amigo en todas las posibles acepciones positivas de esta palabra. También con él me disculpo si de alguna manera influyó en que hoy forme parte de las huestes de estudiantes de física de Argentina.

A Joel, por su infinito afecto, tan irracional como incondicional. Tack så mycket.

A mi mamá, que tuvo la voluntad de leer el manuscrito de este texto tantísimas veces, a pesar de que luego de cierto punto se tornase en “tan sólo una sucesión de símbolos incomprensibles”.

Y a mi papá, que hubiese querido leerlo.

Lucía Cabrera
Rosario, mayo de 2019.

Prefacio

El norte de este trabajo es el de presentar, motivar y saborear algunas cuestiones interesantes de la física teórica de altas energías actual, y mostrar cómo de esta plétora de desarrollos pueden calcularse resultados válidos, fehacientemente comparables con los que pueden medirse en algunos experimentos. Lejos está de ser un texto autocontenido. Usted, lector, si conoce a la autora, sabe la gran incomodidad *matemática* que ésto le genera. Incomodidad sin embargo superada con creces por el entusiasmo y fascinación que lo expuesto en estas páginas le transmite.

La organización con que nos manejaremos es aproximadamente la siguiente: haremos una introducción y motivación al estudio de ciertos tipos de plasmas, que hoy en día se producen de forma experimental en algunos de los aceleradores de partículas más populares, como el LHC y RHIC. En los tres capítulos siguientes se exponen a grandes rasgos los elementos teóricos necesarios para, apenas, empezar a hablar de la correspondencia *AdS/CFT*, que también llamaremos Conjetura de Maldacena, dualidad *gauge/strings*, dependiendo del contexto. En ellos nos focalizaremos en las herramientas que necesitamos para entender, muy livianamente, la propuesta de cálculo que haremos en el capítulo quinto, que nos conducirá a hallar de forma teórica una de las propiedades de transporte de los plasmas presentados al comienzo. De este resultado, haremos algunas interpretaciones físicas y concluiremos nuestra discusión con algunas perspectivas al respecto. También incluimos unos pocos apéndices que consideramos útiles para la comprensión de los temas tratados.

Si bien irremediablemente incompleta, hemos tratado de llevar a cabo esta exposición de forma constructiva y ordenada, y esperamos sea de un pasar ameno.

Capítulo 1

Introducción

In the beginning there was nothing, which exploded.

Terry Pratchett, *Lords and Ladies*

El descubrimiento en los años 90 de la correspondencia AdS/CFT y sus sucesivas generalizaciones (hoy denominadas en un todo como dualidad gauge/strings) fomentaron el estudio de ciertas teorías de campos no abelianas en el régimen de acoplamiento fuerte. Las herramientas provistas por este enfoque permitieron, en particular, el estudio de las propiedades de ciertos plasmas que estas teorías describen a temperaturas finitas, como ser sus coeficientes de transporte (viscosidad de corte y de volumen, conductividad eléctrica, tasas de fotoemisión, tasas de emisión de leptones y anti-leptones, por nombrar algunos). Entre estos plasmas de interés se encuentra el plasma de quarks y gluones, o QGP fuertemente acoplado. En la materia tal y como la conocemos quarks y gluones se encuentran confinados en forma de partículas compuestas, tales como protones y neutrones. A temperaturas suficientemente altas se produce su deconfinamiento, transicionando a la fase de plasma. El Universo temprano habría presentado temperaturas de $\sim 10^{12}$ K hasta $10 \mu\text{s}$ posteriores al Big Bang y, según las predicciones de la cromodinámica cuántica, éstas serían condiciones suficientes para que alojase a plasmas de quarks y gluones, aunque no así a nucleones compuestos por ellos [1, 2]. Con la posterior expansión y enfriamiento del Universo, este plasma habría entonces transicionado hacia un estado confinado para formar materia ordinaria. Así, la comprensión de la evolución de nuestro Universo demanda del entendimiento de la estructura y dinámica del plasma de quarks y gluones. El estudio de estos plasmas nos permite también investigar a la cromodinámica cuántica en condiciones extremas.

Gran parte de los esfuerzos realizados en esta dirección han sido resultado de la fenomenología de colisiones ultra relativistas de iones pesados. Particularmente, datos experimentales proporcionados por el Relativistic Heavy Ion Collider (Brookhaven National Laboratory, EE.UU.) y, más recientemente, el experimento ALICE (A Large Ion Collider Experiment), en el Large Hadron Collider (CERN, Suiza), han enfatizado la importancia del desarrollo de técnicas de cálculo teórico que conciernen a la fenomenología de estas colisiones, en las que intervienen iones masivos, como ser núcleos de oro o plomo. Éstos son acelerados y los cientos de nucleones que los conforman colisionan con energías de hasta $\sim 10^{12}$ eV cada uno, produciendo durante unos 10^{-22} s el buscado plasma de quarks y gluones. Uno de los resultados experimentales más sorprendentes obtenidos para esta fase de la materia es el bajo valor del cociente entre viscosidad de corte y entropía específica, η/s . Ésto constituye una diferencia cuantitativa con los cálculos que pueden realizarse suponiendo al

QGP como un fluido débilmente acoplado, hallándose además que los resultados teóricos para este régimen, y en contraposición con los del régimen fuertemente acoplado estudiado desde la dualidad gauge/strings, presentan tendencias funcionales totalmente dispares. Los experimentos, en tanto, avalan el acoplamiento fuerte en el caso del QGP, que presenta características de fluido ideal. En luz de ésto se hace evidente la utilidad de las técnicas provistas por la dualidad gauge/strings, métodos que presentan desde luego limitaciones, pero cuyos resultados son obtenidos desde primeros principios en teorías de campo no abelianas a temperaturas finitas.

1.1. Plasma de Quarks y Gluones: Una mirada cualitativa

More is different

Phil Anderson

Lo que llamamos materia nuclear se halla, como su nombre lo indica, constituyendo núcleos atómicos, así como también estrellas de neutrones. Los nucleones son formados a su vez por los ya mencionados quarks, ligados entre sí a través de la interacción fuerte, mediada por el intercambio de gluones. A diferencia de las partículas mediadoras de la interacción electromagnética, los fotones, que no poseen carga ni interactúan entre sí, los gluones presentan la denominada *carga de color*, el análogo a la carga eléctrica usual, aunque con algunas diferencias fundamentales. La presencia de un grupo de gauge no abeliano implica interacciones muy distintas en las teorías de Yang-Mills en comparación con la electrodinámica cuántica, cuyo grupo de gauge es el $U(1)$, un grupo abeliano. A través de su carga de color los gluones interactúan tanto entre sí como con los quarks, interacciones éstas que son descritas por la cromodinámica cuántica (QCD, cuyo grupo de gauge es $SU(3)$, el grupo de color).

La interacción fuerte presenta una cualidad muy peculiar: su intensidad disminuye para distancias pequeñas [3, 4], propiedad denominada “libertad asintótica”, en tanto que resulta muy intensa a distancias del orden del radio de un nucleón ($\sim 10^{-15}$ m), lo que determina el confinamiento de quarks y gluones en éstos.

Esta libertad asintótica es precisamente la característica que sugiere que protones y neutrones pueden calentarse hasta formar, a través del debilitamiento de su interacción fuerte, un plasma de sus partículas constitutivas fundamentales. Es razonable suponer entonces que este nuevo estado de la materia, con la interacción entre sus constituyentes severamente debilitada, podría comportarse como un gas de quarks y gluones libres. Esta suposición es, sorprendentemente, errónea, y desmentida por las abrumadoras evidencias experimentales colectadas en las colisiones de iones pesados [5, 6, 7, 8, 9, 10].

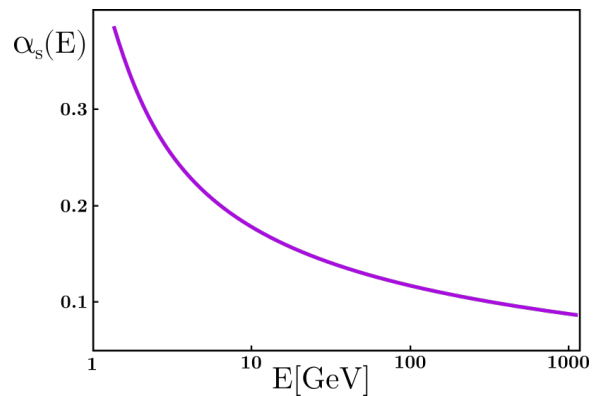


Figura 1.1: Dependencia de la constante de acoplamiento fuerte $\alpha_s = g^2/4\pi$. Para mayor energía (y menor distancia), la intensidad de la interacción disminuye. Notar la escala logarítmica en las abscisas.

El comportamiento de fluidos como líquidos o gases se modela a partir de la hidrodinámica. El tipo de flujo observado en el QGP puede ser descrito desde este punto de vista, pero una buena consistencia entre datos experimentales y teoría requiere de una prácticamente nula razón entre viscosidad de corte (medida de la resistencia de una sustancia a fluir, o de la imposibilidad de sus constituyentes de transportar momento) y su densidad de entropía [14, 15]. Ésto implica entonces que el QGP presenta las características de un fluido ideal, de viscosidad extremadamente baja, y capaz de alcanzar equilibrio térmico muy velozmente gracias al alto grado de interacción entre partículas. El plasma de quarks y gluones está lejos de ser el ingenuamente concebido gas débilmente interactuante que sugiere la libertad asintótica. En 1972, Phil Anderson acuñó la trascendental frase *more is different* [13] para señalar que volúmenes macroscópicos de materia (en su caso, materia condensada) son capaces de exhibir comportamientos exóticos, no predecibles a partir de las interacciones elementales entre sus constituyentes individuales, y que requieren de marcos teóricos propios para ser dilucidadas. El QGP es un claro ejemplo de esta situación. Una de las herramientas fundamentales para estudiar al QGP son los cálculos numéricos de teorías de gauge no abelianas en espacio-tiempo discretizado (*lattice gauge theory*). Este formalismo *ab initio* se basa en simular la función de partición de la cromodinámica cuántica en un espacio-tiempo discretizado. Los cálculos de *lattice QCD* son, sin embargo, por el momento limitados a propiedades estáticas, excluyendo resultados confiables para propiedades de transporte. La dualidad de la teoría de cuerdas en el espacio anti-de Sitter (AdS) y la teoría cuántica de campos conforme (CFT) provee una descripción exacta de algunos sistemas en régimen de acoplamiento fuerte [16, 17].

La importancia de la comprensión de este tipo de régimen en acoplamiento y correlación fuertes excede ampliamente al caso del plasma de quarks y gluones. Los sistemas de electrones fuertemente correlacionados son un ejemplo de acoplamiento fuerte en que la interacción elemental, si bien débil, se ve amplificada por el gran número de partículas involucradas. Sorprendentemente, también en este área existen ciertas descripciones simples de estos sistemas altamente complejos logradas a partir de dualidades holográficas [19, 20].

1.2. Colisiones de Iones Pesados

En un experimento de colisiones de iones pesados, núcleos atómicos grandes, como ser de oro en RHIC o plomo en ALICE, son acelerados hasta alcanzar velocidades ultra relativistas ($\sim 99\% c$). Su velocidad otorga a estos núcleos una energía de centro de masa \sqrt{s}^1 muy grande. En estas condiciones es que ocurre la colisión.

El motivo detrás del uso de “iones pesados” se relaciona con lo comentado en la sección anterior: estos núcleos permiten crear el mayor volumen de materia a alta densidad de energía por colisión, de forma tal de generar condiciones favorables para el estudio y discernimiento de fenómenos y propiedades que caractericen a la materia fuertemente acoplada en cantidades macroscópicas. Las colisiones elementales de alta energía (electrón-positrón en dispersión elástica profunda, protón-protón en el proceso de Drell-Yan) por el contrario generan un sistema final compuesto por hadrones que se interpretan como resultado de unas pocas fragmentaciones individuales, y no de un volumen macroscópico de materia interactuante.

En resumen, para entender al plasma de quarks y gluones no podemos acceder a un sistema del orden de un mol de quarks, pero el uso de iones pesados en estas colisiones nos acerca tanto como es posible a esta situación. El propósito de construir aceleradores de partículas

¹La cantidad s es una de las variables de Mandelstam. Una pequeña introducción a ellas puede verse en el apéndice A.

que alcancen energías de centro de masa cada vez más altas es sencillamente el de producir materia con mayor densidad de energía. En el sistema de referencia situado en el centro de masa de cualquiera de estos núcleos con velocidades ultra relativistas la longitud de los mismos experimenta una contracción de Lorentz en la dirección de la colisión. Así, en lugar de un núcleo aproximadamente esférico se tiene en cambio un disco de poquísimos espesores. El aumento en la energía de una colisión hace a estos discos aún más delgados. Cuando dos de ellos son coincidentes, es decir al momento de la colisión, la energía toda de los iones incidentes se concentra en un volumen más pequeño cuanto mayor sea \sqrt{s} . El alcance de la mayor densidad de energía posible es, según se vio, esencial para la creación del QGP.

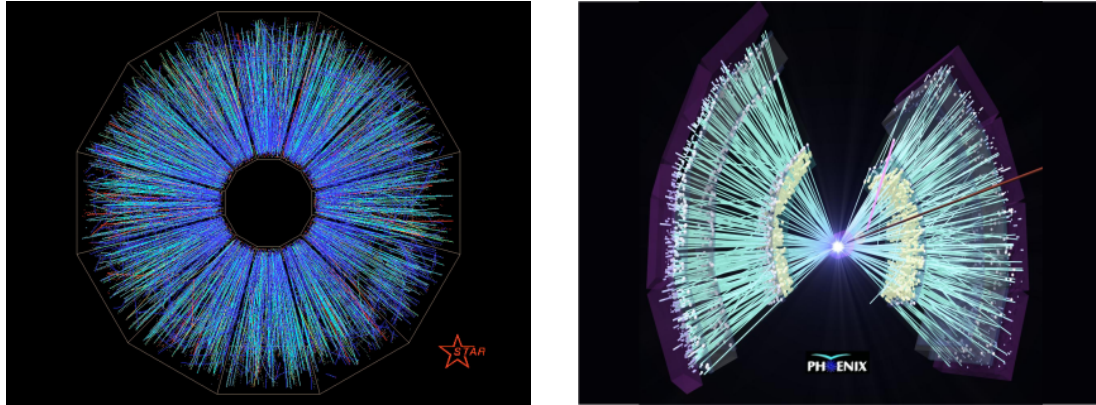


Figura 1.2: Una colisión *head-on* entre núcleos de oro en RHIC típicamente produce varios miles de partículas. Estos eventos se registran en los detectores STAR y PHENIX como trayectorias de partículas cargadas (mayormente piones) que emergen de colisiones individuales. Imágenes tomadas de [21].

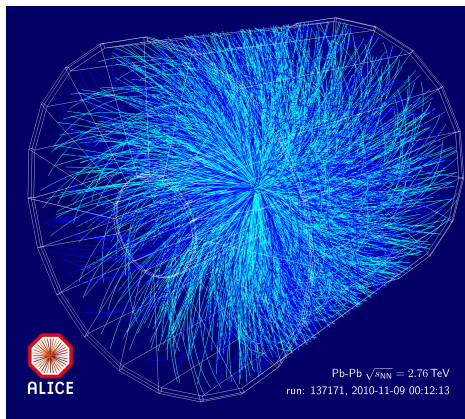


Figura 1.3: Una de las primeras colisiones entre núcleos de plomo en el LHC, registrada por ALICE en noviembre de 2010. Imagen tomada de [22].

La máxima energía alcanzada en los experimentos STAR y PHENIX de RHIC, que comenzara a operar en el año 2000, donde los iones pesados son núcleos de oro, es de $\sqrt{s} = 200$ GeV. Esto implica que cada nucleón individualmente colisiona con una energía de centro de masa de 200 GeV. Cada núcleo de oro consta de 197 nucleones, por lo que la energía total de la colisión más energética posible es de alrededor de 40 TeV. Una colisión de este tipo produce unas 5060 ± 250 partículas cargadas [8, 12]. El conteo de partículas producidas se realiza a través de las trayectorias registradas, lo cual implica que las partículas neutras escapan a este conteo. Por tanto, el número total de hadrones creados es superior al detectado.

Las colisiones más violentas se suceden cuando dos núcleos chocan “de lleno” (colisión *head-on*), ésto es, cuando su parámetro de impacto es mucho menor al radio nuclear. Estos eventos se denominan colisiones centrales. Por otro lado, las colisiones con parámetro de impacto mayores se denominan periféricas. Coloquialmente, el tipo de colisión que aquí describimos se nombra un *mini-bang* teniendo en cuenta que se supone la creación de materia

procede de forma similar a la formación de materia inmediatamente luego del Big Bang. ALICE, operativo desde 2010 en el LHC, donde las partículas colisionantes son núcleos de plomo, alcanza una energía máxima de colisión por nucleón de $\sqrt{s} = 3,5$ TeV. La energía total en una colisión es entonces del orden de 725 TeV por núcleo. En este experimento, las partículas son aceleradas a más de 99,99999 % de la velocidad de la luz, alcanzándose temperaturas de aproximadamente 10^5 veces la del centro solar. Similarmente a lo que ocurre en RHIC, el conteo de partículas generadas se realiza contando trayectorias de partículas cargadas. Se registran unas 3000 de éstas por colisión.

1.2.1. Flujo Elíptico

El término “flujo elíptico” hace referencia a un conjunto de observables experimentales en la física de iones pesados. La viabilidad de estos observables depende de la apropiada elección de eventos (colisiones), tales que el parámetro de impacto en los mismos se encuentre dentro de cierto rango especificado. Estos eventos son luego empleados para estudiar el flujo colectivo de la materia creada en la colisión.

Supongamos seleccionar un conjunto de eventos en que el parámetro de impacto es comparable al radio de los núcleos involucrados. A velocidades ultra relativistas, los núcleos experimentan una contracción de Lorentz en la dirección de su velocidad, es decir, la del haz. Si la colisión no se efectúa de forma totalmente alineada estos núcleos deformados en discos coincidirán en una región elongada a lo largo de un eje perpendicular al plano de reacción, esto es, el plano definido por la dirección del haz y la línea imaginaria que une a los centros de los núcleos en el instante de la colisión.

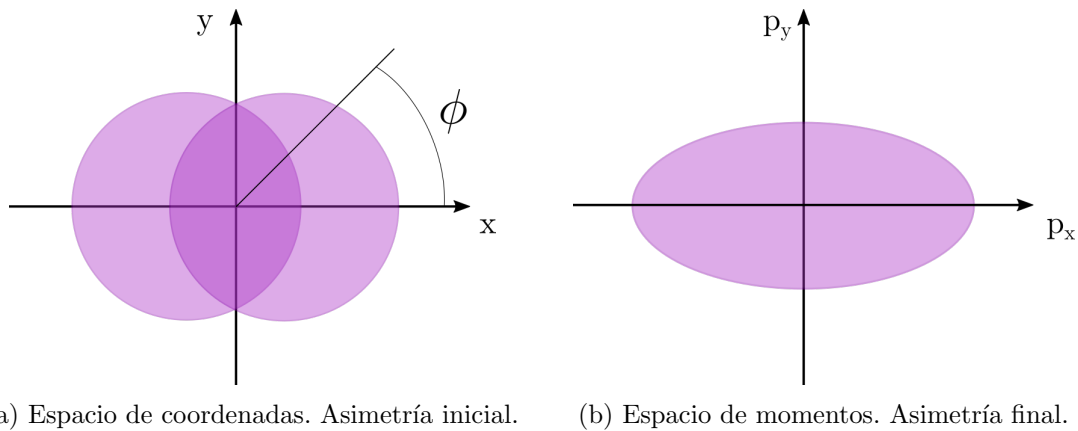


Figura 1.4: En colisiones no alineadas de núcleos pesados a energías muy altas, la región de forma oval calentada es elongada en la dirección y , perpendicular al plano de reacción (a). Las interacciones colectivas entre quarks y gluones producen gradientes de presión que resultan en flujo asimétrico. La distribución angular de los hadrones producidos es anisotrópica con respecto al plano de reacción, y sus momentos son mayores en dirección x (b).

Los fragmentos de estos núcleos que no participan en la colisión propiamente dicha (“nucleones espectadores”) continúan su trayectoria. Si los quarks y gluones que ocupan el volumen asimétrico inicial en el instante de la colisión interactúan de modo colectivo los gradientes de presión en la subsecuente expansión darán también lugar a una distribución anisotrópica de estas partículas. En el estado final, los miles de partones presentes son resultado de la colisión entre algunos cientos de nucleones ocurrida en la región elongada que hemos mencionado. Si, por el contrario, proviniesen de colisiones nucleón-nucleón inde-

pendientes, los hadrones resultantes se encontrarían en un estado final que los posicionaría con una distribución uniforme. Es decir, con ángulo azimutal ϕ (alrededor de la dirección del haz, eje z) variando isotrópicamente entre todos sus valores posibles, de 0 a 2π . Esta situación se descarta en vista de los datos experimentales. Si la colisión genera entonces partículas interactuantes que alcanzan un cierto grado de equilibrio local produciendo un fluido, la distribución esperada ya no es uniforme.

Si pensamos en la región elongada en que se produce la coincidencia de los núcleos al colisionar como una gota de fluido ideal, con presión muy baja en su frontera y alta en su centro, ésta desde luego se expande muy velozmente. Es decir, explota. Como los gradientes de presión son mayores a lo largo de la dirección x (ver figura 1.4) que a lo largo de y , esta explosión es azimutalmente asimétrica. En efecto, uno de los primeros y más importantes resultados provistos por RHIC es que estas asimetrías pueden ser muy significativas, y que la hidrodinámica es capaz de describir las situaciones observadas en colisiones con parámetro de impacto no nulo con un alto grado de fidelidad.

La consistencia entre los datos experimentales y la hidrodinámica de fluidos ideales revela que la viscosidad del plasma generado en colisiones de iones pesados debe ser baja. Más aún, un fluido de características cercanas al límite de hidrodinámica ideal, con una razón η/s pequeña, requiere de un alto grado de interacción entre constituyentes. Un bajo valor de η/s implica una virtual imposibilidad de transporte de momento, con lo cual no pueden entonces existir cuasipartículas bien definidas con camino libre medio significativo en un fluido de viscosidad baja, pues de existir el transporte de momento amortiguaría el flujo. La inexistencia de partículas de camino libre medio grande implica acoplamiento fuerte entre constituyentes.

El acoplamiento entre partones debe, además, efectivizarse poco después de la colisión. Por el contrario, si los partones pudiesen moverse con camino libre medio grande luego de la colisión, retrasando el alcance de un estado de equilibrio, la región elongada inicial evolucionaría hacia una forma circular, con lo que la asimetría azimutal de momentos producida por el comportamiento hidrodinámico no podría apreciarse.

Estas observaciones permiten concluir que las colisiones de iones pesados llevadas a cabo en RHIC o en el LHC producen un fluido fuertemente acoplado en equilibrio térmico local aproximadamente 10^{-22} s luego de la colisión [18]. Ésto justifica la conclusión de que la materia presente en el experimento puede ser descrita a través del lenguaje de la termodinámica y la hidrodinámica.

Capítulo 2

Ingredientes de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills

2.1. Teorías de *gauge* no abelianas

Una teoría en que un campo $A_\mu(x)$ se introduce a fin de obtener invariancia con respecto a transformaciones locales se denomina una teoría de *gauge*. El campo introducido se nombra un campo de gauge. La electrodinámica cuántica es, en cierto sentido, la teoría de gauge más simple. En ella, una simetría global se “promueve” a simetría local a través de la introducción del campo de gauge $A_\mu(x)$, que es un campo vectorial con $\mu = 0, 1, \dots, 3$, los cuales son los índices del espacio-tiempo en $(3 + 1)$ dimensiones, también conocidos como índices de Lorentz. El grupo de simetría de esta teoría, $U(1)$, es un grupo abeliano.

Ahora bien, nos interesaría describir no sólo la interacción electromagnética a través de campos de gauge, sino también las interacciones débil y fuerte. La primigenia dificultad para llevar a cabo esta tarea radica en que las simetrías locales de estas teorías involucran grupos de transformaciones más complicados y, además, no abelianos. Estos grupos son $U(1) \otimes SU(2)$ para la interacción débil, y $SU(3)$ para la fuerte.

2.1.1. Teorías de Yang-Mills

En 1954 Chen-Nin Yang y Robert Mills propusieron generalizar el argumento utilizado en la formulación de la teoría de electrodinámica cuántica a grupos de transformaciones más generales, entre ellos grupos no abelianos. Actualmente, una teoría de gauge basada en el grupo $SU(N)$, y más en general en cualquier grupo de simetría no abeliano, se denomina una teoría de Yang-Mills. Veremos a continuación, con fines ilustrativos, el tratamiento correspondiente para una teoría de gauge basada en el grupo $SU(2)$.

Consideremos un doblete de campos de Dirac,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

En (2.1.1), $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ representan a dos tipos de fermiones, cada uno de ellos con masa m . El lagrangeano de Dirac es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad (2.1.2)$$

Este lagrangeano es invariante frente a una transformación global del grupo $SU(2)$,

$$\Psi \rightarrow e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}} \Psi, \quad (2.1.3)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ son las matrices de Pauli. Si nos limitamos a transformaciones infinitesimales,

$$\Psi \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right) \Psi \quad (2.1.4)$$

es sencillo ver que ésta es, a primer orden, una simetría del lagrangeano (2.1.2). A saber,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi &\rightarrow \mathcal{L} = \bar{\Psi} \left(1 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}\right) \Psi \\ &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi [1 + O(\boldsymbol{\alpha}^2)]. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Dado que $\boldsymbol{\alpha}$ es un infinitésimo y no posee dependencia en x , el lagrangeano se mantiene invariante.

Es ahora esta simetría la que promocionaremos para que posea un carácter *local*. Sea entonces $\boldsymbol{\alpha}$ una función de las variables de espacio-tiempo englobadas en la etiqueta x . El término de masa en (2.1.2) se mantendrá invariante naturalmente. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el término diferencial:

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)] \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x)] \Psi, \quad (2.1.6)$$

de modo que la derivada usual no permanece invariante. Es entonces este el momento en que debe introducirse un campo de gauge tal que permita eliminar al tercer término de (2.1.6). Llamaremos a este campo de gauge $\mathbf{W}_\mu(x) = (W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x))$, donde cada una de sus componentes tiene, a su vez, cuatro componentes que corresponden al subíndice μ . Definimos ahora una derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} g \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu(x), \quad (2.1.7)$$

donde g es la constante de acoplamiento de la teoría, análoga a la carga eléctrica de la electrodinámica cuántica, una teoría de gauge abeliana. Ésta es la cantidad que eventualmente determinará la intensidad de la interacción entre el campo de gauge $\mathbf{W}_\mu(x)$ y Ψ . Para que esta definición sea de utilidad, $D_\mu \Psi$ debe transformar en la misma forma que lo hace Ψ , es decir

$$D_\mu \Psi \rightarrow \left[1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)\right] D_\mu \Psi. \quad (2.1.8)$$

De forma explícita, esto es:

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &\rightarrow \left[1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)\right] D_\mu \Psi \\ &= \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} g \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) \Psi + \frac{i}{2} g \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x) \partial_\mu \Psi + \frac{1}{4} g [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)] [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu(x)] \Psi. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Supongamos ahora que la derivada covariante transforma según

$$D_\mu \rightarrow \partial_\mu - \frac{i}{2} g \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) - \frac{i}{2} g \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{W}_\mu(x), \quad (2.1.10)$$

donde $\delta\mathbf{W}_\mu(x)$ es la variación del campo de gauge con la transformación. Combinando esta definición con (2.1.4) se obtiene

$$\begin{aligned} D_\mu\Psi &\rightarrow \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu(x) - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{W}_\mu(x) \right) \left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha} \right) \Psi \\ &= \partial_\mu\Psi + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(x)]\Psi + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)\partial_\mu\Psi - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu(x)\Psi \\ &\quad + \frac{1}{4}g[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu(x)][\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)]\Psi - \frac{i}{2}g\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{W}_\mu(x), \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

en donde hemos descartado el término en $\boldsymbol{\alpha}\cdot\delta\mathbf{W}_\mu(x)$ por ser de segundo orden. Comparando los términos presentes en (2.1.9) y (2.1.1) vemos que, a fin de satisfacer la invariancia deseada, será necesario que

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{W}_\mu(x) = \frac{1}{g}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(x)] + \frac{i}{2}\{[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)][\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu(x)] - [\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu(x)][\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)]\}. \quad (2.1.12)$$

Haciendo uso de la identidad

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \quad (2.1.13)$$

podemos finalmente concluir que la condición (2.1.1) se reduce a

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\mathbf{W}_\mu(x) = \frac{1}{g}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(x)] - \boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{\alpha}(x)\times\mathbf{W}_\mu(x)]. \quad (2.1.14)$$

Como resultado, para este ejemplo el campo de gauge introducido deberá transformar según

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu \rightarrow \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{W}_\mu). \quad (2.1.15)$$

La pregunta natural que surge de este desarrollo es ¿cómo se acopla el campo de gauge introducido al campo fermiónico Ψ ? Este acoplamiento vendrá dado por el término del lagrangeano de Dirac que involucra a la derivada covariante que definimos en (2.1.1) :

$$\bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi = \bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \frac{g}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}_\mu\Psi. \quad (2.1.16)$$

Pensaremos a este caso a partir de analogías con el caso electromagnético, la teoría obtenida a partir de trabajar al grupo de simetría $U(1)$. En esta teoría, el término de acoplamiento en el lagrangeano resulta

$$\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi = \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}A_\mu\psi, \quad (2.1.17)$$

y las excitaciones en el campo de gauge $A_\mu(x)$ son las mediadoras de las interacciones entre electrones, a través de la carga e . Aquí, la regla de Feynman para esta interacción es que un vértice $\bar{\psi}\psi A_\mu$ contribuye en un factor de $-iq\gamma^\mu$. Por analogía, la teoría que hemos construido para el grupo $SU(2)$ sugiere que la regla de Feynman para un vértice $\bar{\Psi}\Psi\mathbf{W}_\mu$ es la contribución de un factor proporcional a $ig\boldsymbol{\sigma}\gamma^\mu$. Cuantizada la teoría, las excitaciones en el campo de gauge \mathbf{W}_μ mediarán las interacciones entre fermiones. Es decir, habrá partículas mediadoras no masivas W^1, W^2 y W^3 , análogas a fotones, cada una de ellas con dos polarizaciones posibles. Éstas se acoplarán al *isospin* del campo Ψ con una intensidad dada por la constante de acoplamiento g .

¿Qué contribución realiza entonces el campo $\mathbf{W}_\mu(x)$ al lagrangeano? Nuevamente por analogía con la teoría electromagnética, lo razonable sería agregar un término de la forma $-\frac{1}{4} \text{Tr} [\mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}^{\mu\nu}]$, siendo $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ un tensor análogo a $F_{\mu\nu}$. Resulta que la forma del tensor es

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu) . \quad (2.1.18)$$

La expresión final del lagrangeano de una teoría localmente invariante basada en el grupo $SU(2)$ es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} \text{Tr} [\mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}^{\mu\nu}] . \quad (2.1.19)$$

La no linealidad del tensor $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ da lugar a interacciones directas entre partículas que surgen como excitaciones del campo \mathbf{W}_μ . Este es un claro contraste con el caso del electromagnetismo, en que los fotones no poseen carga propia. Esta posibilidad de autointeracción brinda una explicación a una de las particularidades de mayor interés de las teorías de Yang-Mills, la libertad asintótica.

El siguiente paso lógico en el estudio de teorías de gauge no abelianas corresponde a la cuantización de su lagrangeano. Las técnicas para llevar a cabo esta cuantización involucran integrales de camino, y exceden la introducción conceptual que buscamos hacer en esta sección.

Una nota sobre supersimetría

Consideremos la posibilidad de que para toda especie de bosón en el Universo exista una especie de fermión correspondiente, y viceversa, y que la masa sea igual para cada uno de los elementos de estos pares. Ésto requeriría que un lagrangeano capaz de describir correctamente una teoría física exhiba la propiedad denominada *supersimetría*. Ésto es, que exista un conjunto de transformaciones que dejen invariante a la acción del sistema, y que a su vez implique que la variación de un campo bosónico sea proporcional a uno fermiónico, y recíprocamente. La motivación para una versión supersimétrica de las teorías de gauge podría basarse en el hecho de que la invariancia de gauge es consistente con la supersimetría. En las secciones siguientes aceptaremos ciertas cuestiones que escapan al alcance de este texto y que versan sobre la construcción de una teoría supersimétrica, exponiendo sin embargo los componentes de la teoría de *gauge* supersimétrica que nos interesa: la teoría de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills.

2.2. Teorías de *gauge* superconformes

Una *transformación conforme* es un cambio de coordenadas global $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, es decir un difeomorfismo, generado por un vector v^μ , y tal que

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x) , \quad (2.2.1)$$

donde $g_{\mu\nu}(x)$ es la métrica del espacio y $\Omega^2(x)$ un factor de escala. Una teoría de campos conforme (CFT) es una teoría definida en este espacio y que resulta invariante bajo estas transformaciones. Ésto implica que la física resulta la misma a toda escala de longitud. Es decir, las distancias en estas teorías no resultan importantes, aunque sí los ángulos.

En general será necesario requerir a las teorías cuánticas de campos invariancia frente a traslaciones, así como frente a transformaciones de Lorentz, que forman el grupo de

Poincaré. Estos dos tipos de transformación, sumadas a las transformaciones de escala, o *dilataciones*, se incluyen en el *grupo de simetrías conformes*. Los vectores v^μ que generarán entonces una transformación conforme son

- $v^\mu = a^\mu$, $a = cte$. Traslaciones con generador P^μ .
- $v^\mu = w^{\mu\nu}x^\nu$, $w^{\mu\nu} = -w^{\nu\mu}$. Transformaciones de Lorentz con generador L^μ .
- $v^\mu = \lambda x^\mu$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dilataciones con generador D .
- $v^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu(b \cdot x)$, $b^\mu \in \mathbb{R}$. Transformaciones conformes especiales con generador K^μ .

De acuerdo con el teorema de Noether, a cada simetría global continua corresponde una corriente que se conserva. En particular, para las transformaciones conformes, estas corrientes de conservación pueden escribirse en términos del tensor de energía-momento según [23]

$$J_\mu = T_{\mu\nu}v^\nu. \quad (2.2.2)$$

Es posible de esta relación deducir que, pidiendo a una teoría invariancia frente al conjunto de transformaciones agrupado arriba, se obtiene de forma directa invariancia frente al grupo conforme [23].

Éste será el caso de la teoría de Yang-Mills que nos interesa en este trabajo, que será además invariante frente a las transformaciones de supersimetría. Estas transformaciones vienen dadas por los generadores denominados *supercargas*, y representados por los espinores

$$\begin{aligned} Q_\alpha^a, \alpha = 1, 2, \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}a} = (Q_\alpha^a)^\dagger, \\ a = 1, \dots, \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

siendo éstos los espinores de Weyl izquierdos y derechos, respectivamente, y \mathcal{N} el número de supersimetrías independientes.

El álgebra de supersimetría es invariante ante transformaciones globales de todas las supercargas Q_α^a , conformando el grupo $SU(\mathcal{N})_R$. Si agregamos al grupo de Poincaré las transformaciones de supersimetría se obtiene la denominada álgebra de super-Poincaré, o también llamada superálgebra de Poincaré. Si, además, se incluyen las transformaciones conformes, sin embargo, no se obtiene un álgebra cerrada [23]. Resulta entonces necesaria la inclusión de un nuevo grupo de simetrías, las *supersimetrías conformes*. El resultado final es un álgebra superconforme.

2.2.1. $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills

Nos abocaremos en esta sección al estudio de la teoría de *gauge* supersimétrica de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías, y grupo de gauge $SU(N)$, definida en un espacio de Minkowski de 4 dimensiones. Esta teoría es invariante frente a las transformaciones tratadas en la sección anterior. Además de ello, agregaremos la restricción de que sea invariante frente a transformaciones de carga, paridad e inversión temporal (CPT, por sus siglas en inglés).

El motivo de esta restricción es que la invariancia frente a transformaciones CPT es una característica de las teorías cuánticas de campos así como de la teoría de cuerdas, que reseñaremos más adelante.

Esta invariancia restringe el espectro de partículas posible, resultando uno simétrico frente a un cambio de signo en la helicidad. El contenido de campos en esta teoría quedará determinado por la supersimetría [23]. El espectro correspondiente de campos se presenta en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Espectro de campos del supermultiplete de gauge para $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Helicidad	Número de campos
1	1
1/2	4
0	6
-1/2	4
-1	1
Total	16

Este espectro está compuesto entonces por partículas vectoriales de *spin* 1, fermiones de Weyl izquierdos *spin* 1/2 y escalares de *spin* 0, todas ellas no masivas y en la representación adjunta¹ del grupo de gauge $SU(N)$. El conjunto de estos campos puede representarse como un *supermultiplete* único de la simetría superconforme, compuesto por un campo de gauge A_μ , cuatro espinores de Weyl izquierdos λ_α^a ($a = 1, \dots, 4; \alpha = 1, 2$), y seis escalares reales Φ^i ($i = 1, \dots, 6$).

El supermultiplete $(A_\mu, \lambda_\alpha^a, \Phi^i)$ es invariante frente a transformaciones de supersimetría como las que hemos mencionado. Si restringimos el número de supersimetrías independientes a $\mathcal{N} = 4$ obtenemos entonces el grupo superconforme $SU(2, 2|4)$, conformado por:

- Simetría Conforme: generada por las traslaciones P^μ , las transformaciones de Lorentz $L^{\mu\nu}$, las dilataciones D , y las transformaciones conformes especiales K^μ . Éstas conforman el grupo $SO(2, 4)$.
- Simetría R : generada por las matrices T^A ($A = 1, \dots, 15$). Forma el grupo $SO(6)_R \sim SU(4)_R$.
- Supersimetría de Poincaré: generada por las supercargas Q_α^a y sus complejas conjugadas $\bar{Q}_{\dot{\alpha}a}$ ($a = 1, \dots, 4$), es decir un total de 16 supercargas.
- Supersimetría conforme: generada por las supercargas $S_{\alpha a}$ y sus complejas conjugadas $\bar{S}_{\dot{\alpha}^a}$ ($a = 1, \dots, 4$). Es decir, 16 supersimetrías conformes.

El lagrangeano de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM es único y viene dado por [23]:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = \text{Tr} \{ & -\frac{1}{2g_{YM}} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i (D_\mu \Phi^i)^2 \\
 & + g_{YM} \sum_{a,b,i} C_i^{ab} \lambda_a [\Phi^i, \lambda_b] + g_{YM} \sum_{a,b,i} \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [\Phi^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{i,j} [\Phi^i, \Phi^j]^2 \},
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

¹Recordemos que, en la representación adjunta, todos los campos se expresan como $A_\mu = A_\mu^b t^b$, siendo t^b los generadores del grupo $SU(N)$, con $b = 1, \dots, N^2 - 1$. En esta representación, los generadores del álgebra de Lie son las funciones de estructura del álgebra de Lie: $(t^b)_{ac} = i f^{abc}$.

donde g_{YM} es la constante de acoplamiento de la teoría SYM, θ_I es el ángulo del instantón, y las constantes C_i^{ab} y \bar{C}_{iab} están relacionadas con las matrices de Clifford-Dirac para $SO(6)_R \sim SU(4)_R$. La derivada covariante es $D_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda + i[A_\mu, \lambda]$, σ^μ son las matrices de Pauli. El tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$, en tanto que $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$.

Este lagrangeano es, por construcción, invariante ante las $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías cuyas transformaciones vienen dadas por

$$\begin{aligned}\delta\Phi^i &= [Q_\alpha^a, \Phi^i] = C^{iab}\lambda_{ab}, \\ \delta\lambda_{b\beta} &= [Q_\alpha^a, \lambda_{b\beta}] = F_{\mu\nu}^+(\sigma^{\mu\nu})_\beta^\alpha \delta_b^a + [\Phi^i, \Phi^j] \epsilon_{\alpha\beta} (C_{ij})_b^a, \\ \delta\bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^b &= [Q_\alpha^a, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^b] = C_i^{ab}\bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^\mu D_\mu \Phi^i, \\ \delta A_\mu &= [Q_\alpha^a, A_\mu] = (\sigma_\mu)_\alpha^{\dot{\beta}} \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}^a,\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

siendo $F_{\mu\nu}^+ = (F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu})/2$.

Todos los términos en el lagrangeano (2.2.4) son de dimensión 4, de lo cual surge su invariancia de escala. En una teoría de campos relativista, la invariancia de escala e invariancia de Poincaré se combinan en una simetría mayor, la *simetría conforme*, formando el grupo $SO(2,4)$. Más aún, la combinación de la $\mathcal{N} = 4$ supersimetría de Poincaré y la invariancia conforme da lugar a la *simetría superconforme*, dada por el grupo $SU(2,2|4)$. La teoría es además invariante de escala a nivel cuántico, y el grupo superconforme $SU(2,2|4)$ es una simetría cuántica.

Por último, cabe destacar que esta teoría tiene dos fases dinámicas. El término potencial de (2.2.4) está dado por

$$-g_{YM}^2 \sum_{i,j} \text{Tr} [\Phi^i, \Phi^j]^2.\tag{2.2.6}$$

El estado fundamental tiene lugar cuando $[\Phi^i, \Phi^j] = 0$. Esta ecuación tiene dos tipos de soluciones:

- La *fase conforme*, donde $\langle \Phi^i \rangle = 0 \forall i = 1, \dots, 6$. En este caso todas las simetrías de la teoría se conservan, y sigue sin haber una escala de energía característica.
- La *fase de Coulomb* o *fase de ruptura espontánea*, donde $\langle \Phi^i \rangle \neq 0$ para al menos un valor de i . En este caso el valor de expectación del vacío no nulo introduce una escala de energía, habiendo así una ruptura espontánea de la simetría conforme.

Aquí concluimos este vuelo de pájaro, apenas rasando la superficie de lo que es el conjunto enorme de teorías de gauge de interés para la física. Volveremos a tratar a las teorías de $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills en los próximos capítulos, ya en el contexto de la dualidad AdS/CFT.

Capítulo 3

Teoría de Cuerdas: *crash course*

The trend of mathematics and physics towards unification provides the physicist with a powerful new method of research into the foundations of his subject [...] The method is to begin by choosing that branch of mathematics which one thinks will form the basis of the new theory. One should be influenced very much in this choice by considerations of mathematical beauty.

Paul A. M. Dirac

Durante cierto tiempo, la electricidad y el magnetismo fueron concebidos como fenómenos físicos independientes. Sin embargo, el avance natural de las investigaciones sugirió las hoy conocidas conexiones entre ellos. En 1865 James Clerk Maxwell logró finalmente construir un conjunto de ecuaciones consistentes, capaces de describir a los fenómenos electromagnéticos. Hoy sabemos que las ecuaciones de Maxwell unifican a la electricidad y el magnetismo en un *todo* consistente.

Otro importante cambio de paradigma tuvo lugar cuando Albert Einstein introdujera su teoría de la relatividad especial. La unificación de los conceptos de espacio y tiempo en un único *continuum* constituyó un cambio en la forma de pensar al terreno en que se desarrollan los fenómenos físicos en general. La mecánica newtoniana fue entonces reemplazada por la mecánica relativista, y las caducas ideas de tiempo absoluto fueron abandonadas. Masa y energía se tornaron intercambiables.

En este mismo espíritu unificador, otro de los logros de la física teórica fue la unificación de la teoría especial de la relatividad, la teoría clásica de campos y la mecánica cuántica. De éstas nace lo que hoy conocemos como teoría cuántica de campos relativista, en gran medida desarrollada a partir de los años 30.

Hacia finales de la década del 60 el modelo de Glashow-Salam-Weinberg de la interacción electrodébil aglomeró al electromagnetismo y la fuerza débil en un marco de trabajo unificado. En la electrodinámica cuántica, el fotón resulta ser un cuanto de campo electromagnético. La teoría de la interacción débil es también una teoría cuántica de campos. La teoría unificadora correspondiente es la teoría cuántica electrodébil.

El proceso de cuantización se lleva a cabo también en el caso de la interacción fuerte, donde la teoría resultante es la ya mencionada cromodinámica cuántica. Los portadores de la fuerza de color son los gluones que, al igual que los quarks, no pueden ser observados de forma aislada.

La teoría electrodébil, junto a la cromodinámica cuántica, conforman el Modelo Estándar. Si bien en él existe cierto intercambio entre ambas teorías, ya que algunas partículas experimentan ambos tipos de interacción, no existe una unificación real de la fuerza electrodébil y fuerza de color. Este modelo, si bien elegante y de cierta robustez, presenta dos limitaciones muy significativas: en primer lugar, no incluye a la gravedad. En segundo lugar, sí incluye unos veinte parámetros adimensionales que no pueden calcularse desde primeros principios.

En general los físicos piensan al Modelo Estándar como tan sólo un paso hacia la formulación de una teoría completa de la física. Es también la opinión de muchos que, a muy altas energías, las fuerzas electrodébil y fuerte pueden unificarse eventualmente en una Gran Teoría de Unificación (GUT, *Grand Unified Theory*). Otra posibilidad atractiva es que el Modelo Estándar pueda ser adaptado para albergar supersimetría. El problema central para acceder a estas tentadoras unificaciones es que el Modelo Estándar es una teoría cuántica, en tanto que la relatividad general es una teoría clásica. Dado el amplio éxito de las teorías cuánticas, en general pensamos que el camino a seguir involucra lograr transformar a la gravedad también en una teoría cuántica.

La teoría de cuerdas es una buena candidata para la unificación de todas las fuerzas de la naturaleza. Es una teoría cuántica y, ya que incluye a la gravitación, es una teoría de gravedad cuántica. ¿En qué nos basamos para hacer esta afirmación? El concepto más fundamental de la teoría de cuerdas es que cada partícula se identifica con un modo vibracional particular de una cuerda microscópica, unidimensional. Uno de los modos vibracionales de estas cuerdas es el gravitón, el cuanto de campo gravitatorio. Dado que sólo hay un tipo de cuerda, y todas las partículas emergen como modos vibracionales de ellas, naturalmente el total de partículas se incorpora en una única teoría. Además, en contraposición con lo que sucede en el Modelo Estándar, el cual presenta una veintena de parámetros libres, la teoría de cuerdas cuenta con un único parámetro, la longitud de la cuerda ℓ_s .

Sin más preámbulo, hacemos a continuación una exposición de los conceptos de la teoría de cuerdas necesarios para entender este trabajo.

3.1. Cuerdas

A diferencia de una teoría cuántica de campos relativista, que describe la dinámica de partículas puntuales, la teoría de cuerdas es una teoría cuántica de objetos unidimensionales interactuantes y relativistas. Se caracteriza por la tensión de la cuerda, T_{str} , y por una constante de acoplamiento adimensional, g_s , que controla la intensidad de las interacciones. Es usual escribir a la tensión de la cuerda en términos de una escala de longitud fundamental, la ya nombrada longitud de la cuerda ℓ_s , según

$$T_{str} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad , \quad \alpha' \equiv \ell_s^2 . \quad (3.1.1)$$

Describiremos ahora los pasos conceptuales involucrados en la definición de la teoría en una formulación de primera cuantización. Es decir, consideraremos la dinámica de una única cuerda propagante, en un espacio-tiempo fijo. Por el momento, nos restringiremos a cuerdas cerradas.

La acción para una cuerda relativista deberá ser un funcional su trayectoria. Tal y como una partícula traza una curva en el espacio-tiempo, el movimiento de una cuerda genera una superficie. En el caso de la partícula, esta curva se llama su *línea de mundo*. La superficie bidimensional dibujada por el movimiento de la cuerda en el espacio-tiempo se denomina

una *hoja de mundo*. Una cuerda cerrada, como es nuestro caso, generará un tubo, en tanto que una cuerda abierta producirá una cinta.

La hoja de mundo en el caso de una cuerda cerrada no posee frontera. Postularemos que la acción que gobierna su dinámica es, sencillamente, el área de esta hoja de mundo. Esta es una generalización natural de la acción de una partícula relativista, que es simplemente el largo de su línea de mundo.

Parametrizaremos a la hoja de mundo con coordenadas locales¹ σ^α , con $\alpha = 0, 1$. Para un tiempo fijo, $\sigma^0 = cte.$, y la coordenada σ^1 parametrizará a la longitud de la cuerda. Sean x^M con $M = 0, \dots, D-1$ las coordenadas espacio-temporales. La trayectoria de la cuerda se describe entonces especificando x^M como función de σ^α . En términos de estas funciones, la métrica bidimensional $g_{\alpha\beta}$ inducida en la hoja de mundo de la cuerda tiene componentes

$$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^M \partial_\beta x^N g_{MN}, \quad (3.1.2)$$

donde g_{MN} es la métrica del espacio-tiempo considerado. Si las coordenadas x^M son cartesianas en un espacio-tiempo plano, luego tendremos $g_{MN} = \eta_{MN} = \text{diag}(- + \dots +)$. La acción de la cuerda está entonces dada por

$$S_{str} = -T_{str} \int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{MN}}. \quad (3.1.3)$$

Para construir los estados de una cuerda es necesario cuantizar esta acción. La cuantización impone ciertas restricciones o *constraints* sobre el espacio-tiempo: no todos los espacio-tiempos que podemos concebir permiten una propagación consistente de la cuerda. Si comenzamos con un espacio de Minkowski D -dimensional, una teoría de cuerdas bosónica consistente es posible sólo para $D = 26$. En el caso de una teoría de cuerdas supersimétrica, lo será en $D = 10$.

Físicamente, estados distintos en el espectro de la hoja de mundo bidimensional corresponden a diferentes modos vibracionales de la cuerda. Desde el punto de vista del espacio-tiempo, cada uno de estos modos emerge como una partícula de una dada masa y *spin*. El espectro típicamente contiene un número finito de modos no masivos y un número infinito de modos masivos, con masas del orden de $m_s \equiv \ell_s^{-1}$. Una característica crucial de una teoría de cuerdas cerradas es que uno de estos modos no masivos es una partícula de *spin* 2, el gravitón. Es ésta la razón del porqué, en particular, la teoría de cuerdas es una teoría de gravedad cuántica. El gravitón describe fluctuaciones pequeñas en la métrica espacio-temporal, lo cual implica que el espacio-tiempo ‘fijo’ que consideramos inicialmente es, en realidad, dinámico.

Diversas teorías de cuerdas pueden construirse a partir de agregar grados de libertad a la hoja de mundo de la cuerda. La teoría que será aquí de interés es una teoría de cuerdas supersimétrica, la llamada teoría de supercuerdas tipo IIB [27, 28], que puede ser obtenida

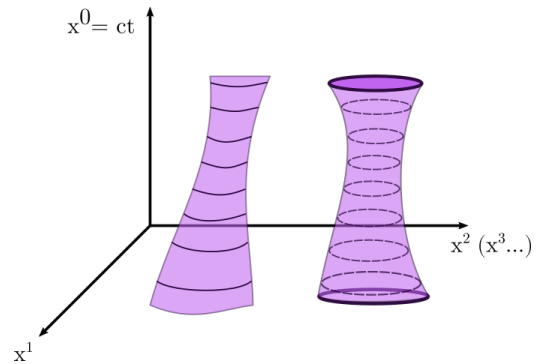


Figura 3.1: Hojas de mundo trazadas por una cuerda abierta (derecha) y una cerrada (izquierda).

¹Notar que estos σ nada tienen que ver con las matrices de Pauli, sino que son sólo parámetros.

al adicionar dos fermiones a la acción (3.1.3). Además del gravitón, el espectro no masivo del tipo IIB incluye dos escalares, un cierto número de tensores antisimétricos de campo, y varios supercompañeros fermiónicos, como lo requiere la supersimetría. Uno de los escalares en particular, el llamado dilatón Φ , veremos, tendrá un importante rol.

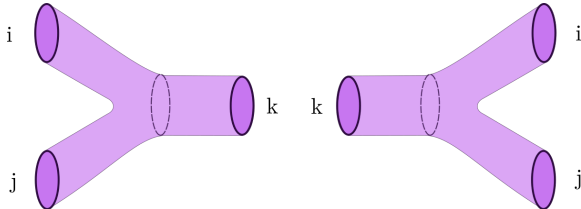


Figura 3.2: Interacciones ‘geométricas’ en teoría de cuerdas: Dos cuerdas cerradas en estados iniciales i y j pueden unirse formando una única cuerda de estado final k (derecha) o viceversa (izquierda).

Las interacciones de la teoría pueden ser introducidas geoméricamente postulando que dos cuerdas pueden unirse para formar una, y que una única cuerda puede dividirse en dos a través de un vértice de fuerza g_s , ver figura 3.2. Observables físicos como amplitudes de dispersión pueden hallarse sumando sobre propagaciones de la cuerda (incluyendo todas las posibles uniones y divisiones de las mismas) entre estados inicial y final. Luego de fijar todas las simetrías de gauge en las hojas de mundo, esta suma se reduce a una suma sobre

las topologías de superficies bidimensionales, con contribuciones de superficies con h agujeros, pesados por un factor de g_s^{2h-2} . Ésto se ilustra en la figura 3.3 para una amplitud de dispersión dos a dos.

A bajas energías $E \ll m_s$, los modos masivos de la cuerda no participan de la dinámica del sistema, ya que están en una escala de energía mucho mayor a la accesible. Éstos pueden descartarse y se obtiene entonces una teoría efectiva de baja energía para los modos sin masa. Dado que el espectro no masivo de una teoría de cuerdas cerradas contiene siempre un gravitón, y a segundo orden de derivadas, la acción efectiva de baja energía tiene la forma

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{R} + \dots, \tag{3.1.4}$$

donde \mathcal{R} es el escalar de Ricci para el espacio-tiempo con D dimensiones espaciales y en donde los puntos suspensivos indican términos adicionales asociados con el resto de modos no masivos. Para la teoría de supercuerdas tipo IIB, la acción completa de baja energía viene dada por la llamada supergravedad tipo IIB [29, 30], que es una generalización supersimétrica de (3.1.4) con $D=10$.

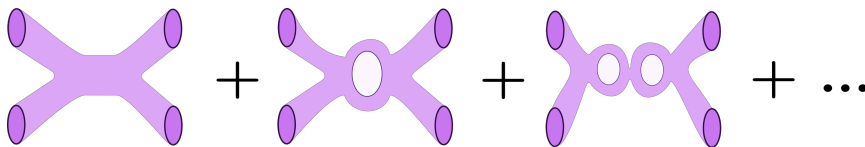


Figura 3.3: Suma sobre topologías que contribuyen a una amplitud de dispersión en un proceso de *scattering* dos a dos.

Concluiremos esta sección con dos comentarios importantes. Primero, cabe destacar que la constante de Newton en diez dimensiones para la teoría de supergravedad tipo IIB puede ser expresada en términos de la constante de acoplamiento de la cuerda g_s y la longitud de la cuerda ℓ_s , según

$$G = \frac{(2\pi)^7}{16\pi} g_s^2 \ell_s^8. \tag{3.1.5}$$

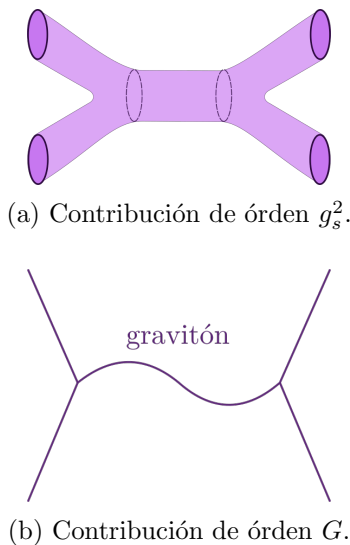


Figura 3.4: Contribución de orden g_s^2 a un proceso de *scattering* de dos cuerdas cerradas en dos cuerdas cerradas (3.4a). El límite de bajas energías de este diagrama debe coincidir con el correspondiente diagrama de teoría de campos, que es proporcional a la constante de Newton G (3.4b).

La dependencia en ℓ_s deriva del análisis dimensional, ya que en un número de dimensiones D , la constante G queda dimensionada como $[\text{longitud}]^{D-2}$. En tanto la dependencia para con g_s sigue de considerar una dispersión dos a dos. El diagrama de dispersión dos a dos de la figura 3.4a es proporcional a g_s^2 , ya que es obtenido a partir de unir los dos diagramas que esquematizamos en la figura 3.3. El correspondiente diagrama en la teoría de supergravedad, en la figura 3.4b, es proporcional a G . El pedir que ambas amplitudes de dispersión obtengan el mismo resultado para energías mucho más bajas que la escala de energía de las cuerdas implica entonces que $G \propto g_s^2$.

Por otro lado, la constante de acoplamiento de la cuerda g_s no es un parámetro libre, sino que viene dada por el valor de expectación del campo del dilatón Φ según $g_s = e^\Phi$. Como resultado de ello g_s podrá variar en el espacio-tiempo. En estas circunstancias sin embargo podremos aún hablar de la “constante de acoplamiento de la cuerda”, en fórmulas como (3.1.5), con lo que nos referiremos al valor asintótico del dilatón en el infinito, esto es $g_s = e^{\Phi_\infty}$.

3.2. D-branas y Teorías de *gauge*

Perturbativamente, la teoría de cuerdas es, tal y como su nombre lo indica, una teoría de objetos unidimensionales, cuerdas. No perturbativamente, la teoría contiene además una variedad de objetos solitónicos^{II}. Las D-branas [31] son una clase particularmente importante de solitones.

Consideremos una teoría de supercuerdas (por ejemplo, tipo IIB o IIA) en un espacio-tiempo plano de Minkowski en 10 dimensiones, de coordenadas $t \equiv x_0$ y x_1, \dots, x_9 las coordenadas espaciales. Una Dp -brana es entonces un “defecto” donde sucede que las cuerdas cerradas pueden abrirse, y donde las cuerdas abiertas pueden “apoyar” sus extremos, y que ocupa un subespacio p -dimensional (ver figura 3.5, donde con x resumimos todas las direcciones paralelas a la brana, y con y todas las que son perpendiculares a ella). Cuando una cuerda cerrada se rompe, se convierte en una cuerda abierta. Los extremos de una cuerda abierta pueden moverse libremente a lo largo de las direcciones de la Dp -brana, sin poder abandonarla a menos de mover sus extremos en alguna de las direcciones que le son transversales.

Las D-branas son objetos dinámicos. Una Dp -brana dará lugar a un *volumen de mundo* $(p+1)$ -dimensional en el espacio-tiempo. Las D0-branas son objetos puntuales, las D1-branas son unidimensionales, como las cuerdas, las D2-branas serán similares a membranas, etc. Las Dp -branas estables en la teoría de supercuerdas tipo IIA existen sólo para

^{II}En física y matemática, un solitón es un paquete de ondas solitario que se propaga a velocidad constante en un medio no lineal, sin deformarse.

$p = 0, 2, 4, 6, 8$, en tanto que para el tipo IIB la estabilidad se da cuando $p = 1, 3, 5, 7$ [31]. Ésto puede verse como consecuencia de varias causas en las que no ahondaremos, pero destacamos que, por ejemplo, es en éstos casos que las Dp -branas correspondientes preservan una fracción de la supersimetría de la teoría subyacente.

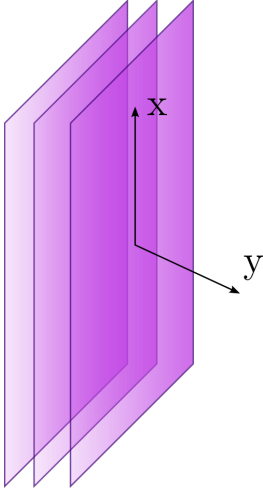


Figura 3.5: Apilamiento de D-branas.

La introducción de una D-brana amplía las posibilidades de la teoría que estamos exponiendo, donde sólo hemos tratado cuerdas cerradas. Su presencia habilita la existencia de cuerdas abiertas, cuyos extremos satisfacen la condición de borde que les impone estar sujetas a la D-brana.

Recordemos que en el caso de cuerdas cerradas comenzamos nuestro estudio con un espacio-tiempo fijo y descubrimos, luego de la cuantización, que el espectro de las cuerdas cerradas corresponde a fluctuaciones dinámicas del espacio-tiempo. Una situación análoga se presenta con el estudio de las cuerdas abiertas en una D-brana. Sea una Dp -brana extendida en las direcciones $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^p)$, con direcciones ortogonales $y^i = (x^{p+1}, \dots, x^9)$, donde tomamos como espacio-tiempo de fondo al de Minkowski en 10 dimensiones. Análogamente a lo que sucedió con las cuerdas cerradas, luego de la cuantización obtendremos un espectro de cuerdas abiertas, que puede identificarse con fluctuaciones en la Dp -brana.

El espectro de la cuerda abierta consiste de un número finito de modos no masivos, y una cantidad infinita de modos masivos de masa $m_s \sim \ell_s^{-1}$. Para una sola Dp -brana, el espectro no masivo consiste de un campo de gauge abeliano $A_\mu(x)$ con $\mu = 0, 1, \dots, p$, $(9 - p)$ campos escalares $\phi^i(x)$, $i = 1, \dots, (9 - p)$, y sus correspondientes compañeros supersimétricos. Como estos campos están definidos en la Dp -brana, dependerán sólo de las coordenadas x^μ en que se dibuja el volumen de mundo, y no así en las coordenadas transversales y^i . Las $(9 - p)$ excitaciones escalares ϕ^i describen fluctuaciones de la D-brana en las direcciones transversales y^i , incluyendo deformaciones de su forma y movimiento.

Una cualidad de las D-branas es la emergencia de una teoría de gauge no abeliana cuando múltiples D-branas se “apilan” una sobre otra [32]. Además de los grados de libertad correspondientes a cada D-brana, existirá en estos casos también la posibilidad de que cuerdas abiertas sitúen sus extremos en dos D-branas diferentes. Por ejemplo, consideremos dos branas paralelas, separadas entre sí en una distancia r , como se muestra en la figura 3.6. En esta situación tenemos cuatro tipos posibles de cuerdas abiertas, dependiendo de en qué brana se apoyan sus extremos. Las cuerdas que ubican ambos de sus extremos en una misma brana dan lugar, como comentásemos anteriormente, a dos vectores de gauge no masivos, que notaremos $(A_\mu)_1^1$ y $(A_\mu)_2^2$, donde el índice superior (inferior) indica a la brana donde la cuerda

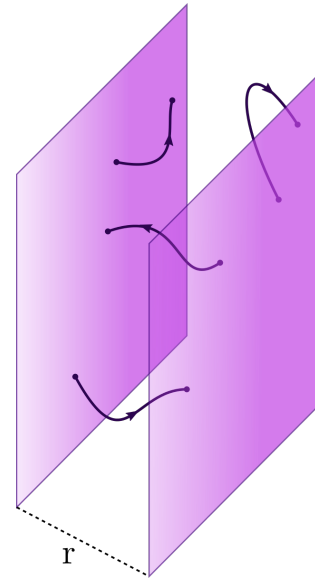


Figura 3.6: Cuerdas que se extienden entre dos branas separadas en distancia r .

comienza (finaliza). Análogamente, las cuerdas que se extiendan entre las dos branas darán lugar a campos vectoriales de gauge adicionales $(A_\mu)_2^1$ y $(A_\mu)_1^2$, que tendrán una masa dada por la tensión de la cuerda multiplicada por la distancia entre branas, $m = r/2\pi\alpha'$. Asimismo, éstos campos se volverán no masivos cuando las branas se encuentren “pegadas”, es decir, a $r = 0$. En este caso habrá cuatro campos de gauge vectoriales no masivos $(A_\mu)_b^a$ con $a, b = 1, 2$ que además se corresponden exactamente con los campos de gauge del grupo de gauge no abeliano $U(2)$. De modo similar, hallamos que los $(9 - p)$ campos escalares no masivos se tornan en matrices 2×2 , $(\phi^i)_b^a$, que transforman en la representación adjunta de $U(2)$. En el caso general de N D p -branas coincidentes, lo que resulta es un multiplete de campos no abelianos del grupo de gauge $U(N)$, con $(9 - p)$ campos escalares en la representación adjunta de $U(N)$. La dinámica de bajas energías de estos modos puede determinarse, como hicieramos anteriormente, descartando los modos masivos que no son accesibles al sistema, y resulta ser gobernada por una teoría de gauge no abeliana [32].

De forma más específica, consideremos un apilamiento de N D3-branas en la teoría tipo IIB. El espectro no masivo consiste del campo de gauge A_μ , seis campos escalares ϕ^i , $i = 1, \dots, 6$, y cuatro fermiones de Weyl, todos ellos en la representación adjunta de $U(N)$, pudiendo ser escritos como matrices $N \times N$. La acción efectiva para estos modos resulta ser justamente [32] la correspondiente a la teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, con grupo de gauge $U(N)$, en $(3 + 1)$ dimensiones.

La parte bosónica de su lagrangeano puede ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^i D^\mu \phi^i + [\phi^i, \phi^j]^2 \right), \quad (3.2.1)$$

con la constante de acoplamiento de Yang-Mills dada por

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \quad (3.2.2)$$

La expresión (3.2.1) es de hecho la parte bosónica del lagrangeano renormalizable más general posible consistente con una supersimetría global $\mathcal{N} = 4$. Dado su alto número de supersimetrías, la teoría tiene varias propiedades interesantes, por ejemplo que la constante de acoplamiento es independiente de la escala.

El total del sistema contiene además modos correspondientes a cuerdas cerradas (como gravitones), que se propagan en el interior o *bulk* del espacio-tiempo 10-dimensional (ver figura 3.7), y la teoría completa incluye además interacciones entre cuerdas abiertas y cerradas. La fuerza de las interacciones entre modos de cuerdas cerradas es gobernada por la constante gravitatoria de Newton, G , por lo que la constante adimensional de acoplamiento para una energía E es GE^8 . Esta cantidad tiende a cero para bajas energías, por lo que en este límite las cuerdas cerradas se tornan no interactuantes. Las interacciones entre cuerdas cerradas y abiertas son controladas por el mismo parámetro, ya que la gravedad se acopla universalmente a todas las formas de la materia. Por tanto, en este límite, cuerdas cerradas se desacoplan de cuerdas abiertas. En

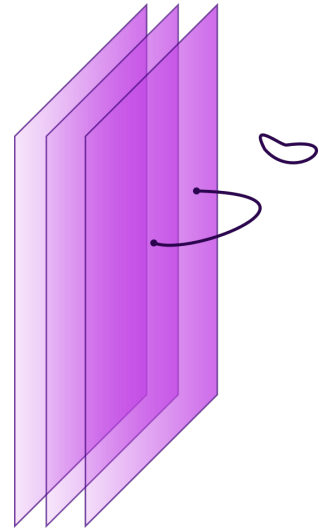


Figura 3.7: Excitaciones del sistema en forma de cuerdas abiertas y cerradas.

vistas de ello concluimos entonces que, a bajas energías, las interacciones se reducen a una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con grupo de gauge $SU(N)$ en cuatro dimensiones.

Antes de concluir con esta sección, destacamos que para una única Dp -brana, con $F_{\mu\nu}$ y $\partial_\mu\phi^i$ constantes, todas las correcciones a (3.2.1) (o sus generalizaciones p -dimensionales) de orden superior en α' pueden resumirse de manera exacta en la llamada acción de Dirac-Born-Infeld (DBI)[35]:

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1}x e^{-\Phi} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\ell_s^2 F_{\mu\nu})}, \quad (3.2.3)$$

donde

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s \ell_s^{p+1}} \quad (3.2.4)$$

es la tensión de la brana, es decir, su masa por unidad de volumen espacial. Esta es una acción efectiva de bajas energías, en el límite de desacoplamiento entre cuerdas abiertas y cerradas. En ella, Φ es el dilatón que mencionamos anteriormente, y $g_{\mu\nu}$ denota a la métrica sobre la brana. En un espacio plano, la métrica puede escribirse de forma más explícita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (2\pi\ell_s^2)^2 \partial_\mu\phi^i \partial_\nu\phi^i. \quad (3.2.5)$$

En (3.2.5), el primer término proviene del espacio-tiempo plano a lo largo de las direcciones del volumen de mundo de la brana, y el segundo surge de las fluctuaciones en direcciones ortogonales.

La expansión de la acción (3.2.3) a orden cuadrático en F y $\partial\phi$ nos permite recobrar la versión abeliana del lagrangeano (3.2.1).

3.3. D-branas como una geometría espacio-temporal

Como las D-branas se extienden infinitamente en las direcciones que hemos agrupado en la etiqueta x , la masa total de la Dp -brana es infinita. Sin embargo, la masa por unidad de p -volumen, la *tensión* de la brana, es finita y viene dada en términos de parámetros fundamentales por la ecuación (3.2.4). La dependencia de la tensión con la longitud de la cuerda ℓ_s deriva del análisis dimensional. La dependencia inversa en la constante de acoplamiento g_s es un resultado familiar para solitones en el marco de la teoría cuántica de campos [36, 37], y señala la naturaleza no perturbativa de las D-branas, ya que implica que éstas se tornan infinitamente masivas, aún por unidad de volumen, y por tanto se desacoplan del espectro en el límite perturbativo $g_s \rightarrow 0$. La diferencia crucial es, sin embargo, que la tensión de las D-branas tiene una dependencia en $1/g_s$, y no en $1/g^2$ (donde g podría bien ser g_{YM}) como es típico en las teorías de campos de solitones. Veremos que esta dependencia será de gran importancia en la dualidad de *gauge/strings*.

Como sabemos, y recalamos en la sección 3.2, en una teoría de gravedad todas las formas de materia gravitan. Y las D-branas no son ninguna excepción. Su presencia deforma el espacio-tiempo que las rodea. La métrica del espacio tiempo que rodea a un apilamiento de N Dp -branas puede hallarse resolviendo de forma explícita las ecuaciones de movimiento de supergravedad [38, 39, 40]. Para el caso particular de D3-branas en una teoría de cuerdas tipo IIB, resulta

$$ds^2 = H(r)^{-1/2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (3.3.1)$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, y la métrica dentro del segundo paréntesis es sencillamente la métrica plana de las direcciones y transversales a la D3-brana escrita en coordenadas esféricas, con coordenada radial $r^2 = y_1^2 + \dots + y_6^2$. La función $H(r)$ en tanto está dada por

$$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad (3.3.2)$$

donde

$$R^4 = 4\pi g_s N \ell_s^4. \quad (3.3.3)$$

Dado que las D3-branas se extienden a lo largo de tres direcciones espaciales su efecto gravitacional es similar al de una partícula puntual con masa $M \propto NT_{D3}$, con T_{D3} la tensión de las branas, en las seis direcciones transversales. Así, la métrica (3.3.1) sólo depende de las 6 direcciones transversales a través de la coordenada radial r . Para $r \gg R$, se tiene que $H \simeq 1$ y la métrica se reduce a la de un espacio plano, con una pequeña corrección del orden de

$$\frac{R^4}{r^4} \sim \frac{Ng_s \ell_s^4}{r^4} \sim \frac{GM}{r^4}, \quad (3.3.4)$$

en donde hemos tenido en cuenta las expresiones (3.1.5) y (3.2.4), con $p = 3$. La corrección (3.3.4) puede interpretarse como el potencial gravitatorio debido a un objeto de masa M en seis dimensiones espaciales^{III}.

El parámetro R puede entonces considerarse como la escala de longitud característica del rango de los efectos gravitacionales de las N D3-branas. Estos efectos son débiles para $r \gg R$, pero no despreciables para $r \ll R$. En este último límite se tiene $H \simeq R^4/r^4$, en cuyo caso la métrica (3.3.1) se reduce a

$$ds^2 = ds_{AdS_5}^2 + R^2 d\Omega_5^2, \quad (3.3.5)$$

siendo

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + d\bar{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 \quad (3.3.6)$$

es la métrica de un espacio-tiempo anti-de Sitter 5-dimensional^{IV}. Así, vemos que en la región en que los efectos gravitatorios no son despreciables, la métrica 10-dimensional inicial se factoriza como $AdS_5 \times S^5$.

Llegamos entonces a la conclusión de que la geometría inducida por la presencia de las D3-branas toma la forma que esquematizamos en la figura 3.8. En la región alejada de las branas, el espacio-tiempo es plano, un espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones. Por otro lado, cerca de las branas aparece lo que llamamos una *garganta* que desemboca en una geometría de la forma $AdS_5 \times S^5$ en el límite de horizonte cercano. El diámetro de esta garganta en cada punto es gobernado por el factor de escala de longitud R dado en (3.3.3).

^{III}Recordemos que un objeto masivo de masa M en D dimensiones espaciales genera un potencial gravitatorio de la forma GM/r^{D-2} a una distancia r de su posición.

^{IV}Escrito en términos de $r = R^2/z$, ver Apéndice B.

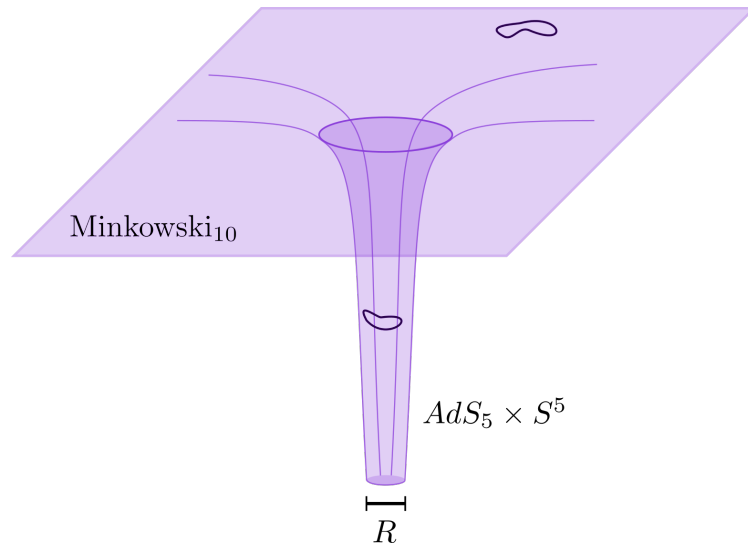


Figura 3.8: Excitaciones del sistema en la descripción de cuerdas cerradas.

Capítulo 4

Correspondencia AdS/CFT

Tenemos, los que vivimos,
una vida que es vivida
y otra vida que es pensada.
Y la única que tenemos
es la vida dividida
entre la verdadera y la errada.

Fernando Pessoa

En este capítulo discurriremos sobre la ya tan mencionada correspondencia *AdS/CFT*, la sorprendente equivalencia entre una teoría de *gauge* supersimétrica del grupo $SU(N)$ y una teoría que surge en el límite de bajas energías de la teoría de supercuerdas tipo IIB en un conjunto de N D3-branas coincidentes en el límite de horizonte cercano [16].

Si bien las teorías de *gauge* surgen naturalmente como un límite de baja energía de una teoría de cuerdas abiertas, la correspondencia en cuestión involucra una teoría de cuerdas *cerradas*. Más aún, estas cuerdas cerradas no “viven” en un espacio de Minkowski plano, donde sí lo hacen las teorías de *gauge*, sino que el espacio de Minkowski vendrá a ser una especie de frontera de aquél en que se alojen las teorías de cuerdas cerradas. La correspondencia es a veces llamada una *dualidad* ya que la misma física puede ser descrita a través de dos sistemas aparentemente muy dispares, la teoría de cuerdas cerradas y la teoría de *gauge*.

La correspondencia es a veces también nombrada una dualidad *holográfica*, debido a que el espacio-tiempo AdS_5 , con cinco dimensiones, tiene como frontera al espacio-tiempo de Minkowski en cuatro dimensiones, en analogía a la información tridimensional que se guarda en figuras planas como son los hologramas que todos conocemos.

Cuando hablamos de equivalencia o correspondencia, nos referimos a que existe un mapeo uno a uno, es decir, inyectivo, entre los estados y los campos de la teoría de cuerdas y los operadores de la teoría conforme, así como también entre las funciones de correlación de ambas.

No dejaremos además de mencionar aquí que la correspondencia no se encuentra a la fecha formalmente demostrada en un marco matemático riguroso. Sin embargo, sí su validez se ha verificado a lo largo de los años desde que fuera propuesta, y no hay por el momento buenos motivos para argüir en pos de su invalidez. Su demostración es un problema abierto.

Antes de pasar de lleno a su estudio, queremos dejar en claro que, ya que la teoría de cuerdas en estudio es una teoría de gravedad cuántica, y que la gravedad clásica de Einstein

surge como su límite a bajas energías, en las siguientes páginas nos referiremos de forma indistinta a la supergravedad como teoría, y a la teoría de cuerdas.

4.1. Una primera mirada a la Conjetura de Maldacena

En el capítulo anterior nos introdujimos a dos descripciones diferentes de las D3-branas: en la sección 3.2, a la que nos referiremos como la *descripción de cuerdas abiertas*, las D-branas corresponden a un hiperplano en un espacio-tiempo plano. En ella las excitaciones de las D-branas son cuerdas abiertas, sujetas a las branas, y las cuerdas cerradas se propagan fuera de las mismas (como esquematizamos en la figura 3.7).

Por otro lado, en la sección 3.3, que llamaremos la *descripción de cuerdas cerradas*, las D-branas dan lugar a una geometría espacio-temporal en donde únicamente hay propagación de cuerdas cerradas, como dibujamos en la figura 3.8. Esta descripción carece enteramente de cuerda abierta alguna. En este caso, el límite de baja energía incluye tan sólo excitaciones de energía arbitrariamente pequeña con respecto a un observador situado en la región asintóticamente plana, cuyo límite es un espacio de Minkowski. Los grados de libertad en este límite y en la garganta no serán los mismos. Por un lado, en el espacio plano, los únicos modos que sobreviven son los correspondientes al supermultiplete no masivo de gravedad 10-dimensional. Más aún, a bajas energías estos modos se desacoplan, pues sus interacciones son proporcionales a GE^8 . Por otro lado, en la región en que se ubica la garganta, sobreviven todos los modos masivos de excitación de las cuerdas. Esto se debe a que un modo cualquiera ubicado en la garganta debe “vencer” el potencial gravitatorio a fin de alcanzar la región asintóticamente plana. Como consecuencia, una cuerda cerrada de energía propia arbitrariamente alta en la garganta puede ser observada como una de energía arbitrariamente baja por un observador desde el límite plano. A medida que nos enfocamos en modos menos y menos energéticos, éstos se encontrarán más y más profundamente ubicados en la garganta, por lo que se desacoplan de los que ocupan la región asintóticamente plana. Concluimos de ello que, en la descripción de las branas de cuerdas cerradas, el sector del sistema que admite interacciones a bajas energías se reduce a uno de cuerdas cerradas en $AdS_5 \times S^5$.

A modo de resumen, diremos que las dos descripciones de N D3-branas y sus límites de bajas energías que hemos visto hasta aquí son:

- Un hiperplano en un espacio-tiempo plano con cuerdas abiertas de extremos fijos a él. El límite de baja energía es descrito por una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM (3.2.1), con grupo de *gauge* $SU(N)$.
- Una geometría de espacio-tiempo curvo (3.3.1) en el que sólo hay propagación de cuerdas cerradas. El límite de baja energía es descrito por la teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$.

He aquí entonces lo que motiva la original conjetura de Maldacena. Es natural suponer que estas dos descripciones que hemos discutido son equivalentes. En particular, poniendo en correspondencia sus límites de baja energía, se conjetura que

$$\{\text{Teoría } \mathcal{N} = 4 \text{ } SU(N) \text{ SYM}\} \equiv \{\text{Teoría de cuerdas tipo IIB en } AdS_5 \times S^5\}. \quad (4.1.1)$$

De las ecuaciones (3.2.2) y (3.3.3) que presentamos en el capítulo anterior podemos deducir cómo se relacionan los parámetros de ambas teorías, a saber:

$$g_s = \frac{g_{YM}^2}{4\pi} \quad \wedge \quad \frac{R}{\ell_s} = (g_{YM}^2 N)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.1.2)$$

Podemos también, a partir de (3.1.5), escribir lo anterior en términos de la constante de Newton 10-dimensional,

$$\frac{G}{R^8} = \frac{\pi^4}{2N^2} \quad \wedge \quad \frac{R}{\ell_s} = (g_{YM}^2 N)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.1.3)$$

En particular, la expresión (4.1.2) implica que el criterio que mencionamos anteriormente sobre los regímenes pertinentes al parámetro $g_s N$ pueden traducirse entonces a criterios sobre la constante de acoplamiento de 't Hooft de la teoría de *gauge*, $\lambda = g_{YM}^2 N$. Por lo tanto la cuestión de cuál descripción de las D-branas nos interesa dependerá ahora de si la teoría de *gauge* que queremos tratar es débil o fuertemente acoplada.

La discusión que hasta aquí realizamos relaciona a la teoría de cuerdas con una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura cero. Desde el lado de supergravedad, esto corresponde a la denominada *solución extremal*. Copiamos aquí por conveniencia la métrica resultante, y la componente AdS_5 en la misma:

$$ds^2 = H(r)^{-1/2} (-dt^2 + d\bar{x}^2) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (4.1.4)$$

$$ds_{AdS_5}^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + d\bar{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2, \quad (4.1.5)$$

en las que, como vimos, $H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}$. Este resultado puede sin embargo generalizarse sin mayores complicaciones para una temperatura finita T excitando los grados de libertad de las D3-branas, lo cual corresponde [40, 42, 43] a la denominada *solución no extremal*. Resulta que el único efecto de esta variación es el de modificar la parte de la métrica correspondiente al espacio AdS_5 según

$$ds_{AdS_{5,T \neq 0}}^2 = \frac{r^2}{R^2} (-f(r)dt^2 + d\bar{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} f(r)^{-1} dr^2, \quad (4.1.6)$$

donde la función que transforma a la métrica está dada por

$$f(r) = 1 - \frac{r_0^4}{r^4}. \quad (4.1.7)$$

Con este cambio, la métrica completa que constituye la solución *no extremal* será

$$ds^2 = H(r)^{-1/2} (-f(r)dt^2 + d\bar{x}^2) + H(r)^{1/2} (f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (4.1.8)$$

y representa a una denominada *brana negra* en un espacio tiempo AdS , con un horizonte situado en $r = r_0$, y que se extiende en tres direcciones espaciales. El radio del horizonte r_0 está relacionado con la temperatura de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM según

$$r_0 \propto T, \quad (4.1.9)$$

sobre la cual hablaremos más en detalle en la sección siguiente. Así, concluimos que la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM a temperatura finita es descrita por la teoría de cuerdas en una geometría AdS de 3-branas negras.

4.2. Dualidad *gauge*/gravedad

Como hemos ya mencionado, la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM es invariante de escala, caracterizada por dos parámetros: la constante de acoplamiento de Yang-Mills, g_{YM} , y el número de colores N . La teoría correspondiente al lado derecho de (4.1.1) es una gravedad cuántica en

un espacio-tiempo maximalmente simétrico, caracterizado por la constante de Newton G , la escala de la cuerda ℓ_s y el radio de curvatura R . Las relaciones entre estos parámetros vienen dadas por (4.1.3) y (4.1.2). Dado que $G \sim \ell_p^8$, estas relaciones implican

$$\frac{\ell_p^8}{R^8} \propto \frac{1}{N^2} \quad \wedge \quad \frac{\ell_s^2}{R^2} \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.2.1)$$

donde, como mencionamos anteriormente, $\lambda = g_{YM}^2 N$ es la constante de 't Hooft. La teoría de cuerdas tipo IIB completa en el espacio-tiempo $AdS_5 \times S^5$ es compleja, por lo que no nos extenderemos aquí en su tratamiento. Sin embargo, mencionaremos que en el límite

$$\frac{\ell_p^8}{R^8} \ll 1 \quad \wedge \quad \frac{\ell_s^2}{R^2} \ll 1, \quad (4.2.2)$$

la teoría se simplifica drásticamente, pudiendo ser aproximada por una de supergravedad clásica de tipo IIB. Una consecuencia inmediata de las relaciones (4.2.1) es que el límite (4.2.2) corresponde al caso

$$N \gg \lambda \gg 1. \quad (4.2.3)$$

Con este límite en mente, la expresión de correspondencia (4.1.1) implica que el límite de acoplamiento fuerte de la teoría de SYM puede ser descrito usando sencillamente supergravedad clásica.

4.3. Generalización a temperatura finita

Como vimos en la sección 4.1, la equivalencia planteada en la relación (4.1.1) se puede generalizar para temperaturas finitas reemplazando la métrica puramente AdS_5 (4.1.6) por la que corresponde a una 3-brana negra en AdS_5 , (4.1.6). Ésta última tiene un horizonte en $r = r_0$, y las regiones por fuera de éste corresponden a $r \in (r_0, \infty)$. Esta generalización podría directamente deducirse de (4.1.1), dado que la brana negra de métrica (4.1.6) es la única que, desde el punto de vista de gravedad, satisface:

- I. Es asintóticamente AdS_5 .
- II. Es invariante traslacional a lo largo de todas las direcciones de la frontera, e invariante rotacional en todas las direcciones espaciales de la frontera.
- III. Tiene una temperatura, y satisface las leyes de la termodinámica.

Es entonces natural identificar la temperatura y otras propiedades termodinámicas de (4.1.6) con las de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM para temperatura finita.

La temperatura de Hawking¹ de una brana negra se calcula a través del método usual [44], pidiendo que la continuación Euclídea de la métrica (4.1.6) obtenida luego de efectuar la transformación $t \rightarrow -it_E$,

$$ds_E^2 = \frac{r^2}{R^2} (f(r) dt_E^2 + d\bar{x}^2) - \frac{R^2}{r^2} f(r)^{-1} dr^2, \quad (4.3.1)$$

¹Este método puede consultarse en el Apéndice C, donde además calculamos expresamente la temperatura de la ecuación (4.3.2)

sea regular en $r = r_0$. Ésto requiere que t_E sea identificado periódicamente con un período β dado por

$$\beta = \frac{1}{T} = \pi \frac{R^2}{r_0} . \quad (4.3.2)$$

La temperatura T se identifica con la temperatura de la teoría SYM en la frontera ya que t_E se corresponde exactamente con la coordenada de tiempo Euclídea de la teoría de borde.

Capítulo 5

Viscosidad de corte de un plasma fuertemente acoplado de $\mathcal{N} = 4$ SYM

Presentamos aquí el problema central que este texto busca resolver, sobre el cual trabajaremos en el capítulo siguiente. En primer lugar, usando los resultados presentados anteriormente de la dualidad *AdS/CFT*, relacionaremos la viscosidad de corte η de un plasma en la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM con la probabilidad de absorción de un gravitón de baja energía que cae perpendicularmente a un apilamiento de N D3-branas negras *cuasiextremales* ($0 \lesssim T$).

5.1. Viscosidad

Consideremos un plasma apenas fuera del equilibrio, de modo tal que exista equilibrio térmico local pero permitiendo a su vez que la velocidad media y temperatura varíen lentamente. Se define para todo punto el marco de referencia local como aquél en que la componente T_{0i} de su tensor de energía-momento se anula. La forma general de este tensor, en este marco de referencia, está dada por la relación constitutiva [45]

$$T_{ij} = \delta_{ij}p - \eta \left(\partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_k u_k \right) - \zeta \delta_{ij} \partial_k u_k \quad (5.1.1)$$

donde u_i es la velocidad de flujo, p es la presión, y η y ζ son las viscosidades de corte y de volumen.

Todos los coeficientes de transporte pueden expresarse a través de las relaciones de Kubo como las funciones de correlación de las correspondientes corrientes de Noether [46]. Para la viscosidad de corte, el correlador correspondiente es el del tensor de energía-momento,

$$\begin{aligned} \eta &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega} \int dt d\bar{x} e^{i\omega t} \langle [T_{xy}(t, \bar{x}), T_{xy}(0, \bar{0})] \rangle \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega i} [G_A(\omega) - G_R(\omega)], \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

en donde el valor medio es tomado en el equilibrio térmico, y G_A y G_R son las funciones de Green avanzada y retardada, respectivamente, del tensor T_{xy} . A través de la expresión (5.1.2), en principio, puede calcularse la viscosidad de corte para teorías débilmente acopladas.

Para teorías de *gauge* en acoplamiento débil, $g^2 N \ll 1$, donde g es la constante de interacción de la teoría (que, para nosotros, será siempre $g \equiv g_{YM}$), la viscosidad de corte presenta el comportamiento paramétrico

$$\eta = C \frac{N^2 T^3}{(g^2 N)^2 \log(1/g^2 N)}. \quad (5.1.3)$$

Es decir, aquí η es proporcional al producto de la densidad de energía $\varepsilon \sim N^2 T^4$ por el tiempo libre medio $\tau \sim \left[(g^2 N)^2 \log(1/g^2 N) T \right]^{-1}$.

5.2. La relación con la sección eficaz de absorción de un gravitón

La clave para hacer esta correspondencia consiste en tener presente que la ecuación (5.1.2) escrita en términos de la función de correlación de T_{xy} se sabe proporcional a la sección eficaz de absorción de gravitones por D3-branas [47, 48].

Según vimos anteriormente, si consideramos un apilamiento de N D3-branas en la teoría de cuerdas tipo IIB, su límite de bajas energías es la teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills. Por otro lado, si N es grande, la configuración de D3-branas tiene una tensión alta, lo que curvará el espacio-tiempo. En el límite de acoplamiento fuerte, con constante de 't Hooft $g_{YM}^2 N \gg 1$, la geometría de las D3-branas tiene una curvatura pequeña y puede ser descrita desde la supergravedad.

Si enviamos un gravitón al apilamiento de D3-branas, existirá una cierta probabilidad de que sea absorbido. Desde la teoría de gravedad, la sección eficaz de absorción puede calcularse resolviendo la ecuación de onda en la métrica de fondo. Desde el punto de vista de la teoría de *gauge*, la tasa de absorción del gravitón mide la parte imaginaria del correlador para el tensor energía-momento, ya que los gravitones polarizados paralelamente a la brana se acoplan al tensor energía-momento de los grados de libertad accesibles en ella. La relación entre la sección eficaz de absorción $\sigma(\omega)$ de un gravitón de energía ω , polarizado paralelo a las D3-branas (por ejemplo, a lo largo de las direcciones x e y), y que se aproxima con una trayectoria ortogonal a ellas, se relaciona con el correlador del tensor energía-momento según [47, 48]

$$\sigma(\omega) = \frac{\kappa^2}{\omega} \int dt d\bar{x} e^{i\omega t} \langle [T_{xy}(t, \bar{x}), T_{xy}(0, \bar{0})] \rangle, \quad (5.2.1)$$

donde $\kappa = \sqrt{8\pi G}$ es la constante de Newton en diez dimensiones. Esta relación ha sido explícitamente verificada para temperatura cero, es decir, el caso extremal. Ahora bien, a nosotros nos interesará el caso de temperatura finita, según discutimos en la sección 4.3. A temperaturas no nulas, la ecuación (5.2.1) relaciona a la sección eficaz de absorción del gravitón por una D3-brana negra *cuasiextremal*, con temperatura de Hawking T , con un correlador en la teoría de SYM [49].

Si otorgamos a la ecuación (5.2.1) un carácter predictivo, tomando el límite $\omega \rightarrow 0$ podemos relacionar una sección eficaz $\sigma(\omega = 0)$ con la viscosidad de corte de un plasma de la teoría de SYM, en virtud de comparar y reordenar las ecuaciones (5.1.2) y (5.2.1):

$$\eta = \frac{1}{2\kappa^2} \sigma(0). \quad (5.2.2)$$

Esta ecuación implica directamente que para 3-branas negras cuasiextremales la sección eficaz de absorción del gravitón no debe anularse en el límite de $\omega \rightarrow 0$. Calculando entonces

el valor de $\sigma(\omega)$ para $\omega = 0$ estamos en condiciones de acceder al valor de la viscosidad de corte de un plasma caliente en la teoría correspondiente de SYM. El problema entonces de calcular esta viscosidad se reduce a un problema de gravedad clásica.

La métrica de una 3-brana negra no extremal, según lo visto en el capítulo 4, es de la forma (4.1.8), y para nosotros el límite relevante será el *cuasiextremal*, $r_0 \ll R$. Vimos, además, que la temperatura de Hawking de la métrica está dada por (4.3.2). La relación entre R y N , además, es dada por (3.3.3). Con estas relaciones en mente, nos enfocaremos en el próximo capítulo en resolver la ecuación de onda para un campo escalar mínimamente acoplado, la componente escalar de un tensor h_{xy} correspondiente a un gravitón polarizado paralelamente a las branas coincidentes. Este campo escalar surge de analizar a h_{xy} a partir de las ecuaciones de Einstein, las que para este tipo de polarización se reducen a una ecuación de Klein-Gordon [54], que es satisfecha un por campo escalar:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0, \quad (5.2.3)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica ambiente, g su determinante¹, y ϕ desde luego el campo escalar.

¹No debemos confundir a esta g con las constantes de acoplamiento a lo largo de este trabajo.

Capítulo 6

Resultados y Discusión

It is good to have an end to journey toward; but it is the journey that matters, in the end.

Ursula K. Le Guin, *The Left Hand of Darkness*

Nos enfocaremos en esta sección en calcular, a través de todas las herramientas que expusimos hasta aquí, un resultado valioso desde la correspondencia *AdS/CFT*, la viscosidad de corte η que introdujimos en el capítulo anterior.

6.1. Soluciones efectivas por región

Recordemos que cerramos el capítulo 5 planteándonos resolver la ecuación de onda (5.2.3) de un escalar ϕ (el gravitón) mínimamente acoplado en una métrica de fondo, que es la correspondiente a una 3-brana negra cuasiextremal. La solución general de esta ecuación de onda es [53]

$$\phi'' + \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)}\phi' + \omega^2 \frac{r^4 (r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2} \phi = 0. \quad (6.1.1)$$

La estrategia a emplear para resolver esta expresión para la función de onda $\phi(r)$ consiste en analizar las ecuaciones diferenciales efectivas y sus soluciones en tres regiones:

- I. Justo por fuera del horizonte de eventos, donde $r \gtrsim r_0$ pero $(r - r_0) \ll r_0$.
- II. La región intermedia, donde $r_0 < r \ll \omega^{-1}$.
- III. En el infinito, donde $r_0 \ll R \ll r$.

Estas soluciones deberán ser consistentes entre sí y solaparse cuando se produzca una superposición de sus zonas de validez. El caso de interés corresponde al límite en que la frecuencia $\omega \rightarrow 0$, por lo que en toda instancia suponemos $\omega \ll T$.

A continuación estudiaremos entonces la forma a que se reduce la ecuación (6.1.1) en cada región y las soluciones admisibles.

Consideremos la zona más próxima al horizonte de eventos, $r \gtrsim r_0$ y $(r - r_0) \ll r_0$. Los coeficientes, dependientes de r , de los términos segundo y tercero de (6.1.1) admiten, por ser r muy próximo a r_0 , descomposiciones en series de Taylor:

$$\frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)} = \frac{1}{(r - r_0)} + \frac{5}{2r_0} - \frac{5(r - r_0)}{4r_0^2} + \dots \quad (6.1.2)$$

$$\omega^2 \frac{r^4 (r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2} = \omega^2 \left[\frac{r_0^4 + R^4}{16r_0^2 (r - r_0)^2} + \frac{5r_0^4 + R^4}{16r_0^3 (r - r_0)} + \dots \right]. \quad (6.1.3)$$

Reemplazando entonces los coeficientes de la ecuación (6.1.1) por sus aproximaciones a primer orden se tiene:

$$\begin{aligned} \phi'' + \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)} \phi' + \omega^2 \frac{r^4 (r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2} \phi \\ \simeq \phi'' + \frac{\phi'}{(r - r_0)} + \omega^2 \frac{(r_0^4 + R^4)}{16r_0^2 (r - r_0)^2} \phi \\ = \phi'' + \frac{\phi'}{(r - r_0)} + \omega^2 \frac{\left(r_0^2 + \frac{R^4}{r_0^2}\right)}{16(r - r_0)^2} \phi \\ = 0 \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

donde en el tercer término de la última línea sencillamente hemos sacado factor común r_0^2 tanto en el numerador como en el denominador, cancelándolos.

Ahora bien, por tratarse del caso cuasiextremal ($r_0 \ll R$), la siguiente aproximación resulta válida:

$$r_0^2 + \left(\frac{R^2}{r_0}\right)^2 \simeq \left(\frac{R^2}{r_0}\right)^2 \quad (6.1.5)$$

y, empleándola, la ecuación de onda se reduce a

$$\phi'' + \frac{\phi'}{(r - r_0)} + \omega^2 \frac{(R^2/r_0)^2}{16(r - r_0)^2} \phi = 0. \quad (6.1.6)$$

La temperatura de Hawking para la métrica de una 3-brana negra, como es nuestro caso, se expresa según vimos $T = \frac{r_0}{\pi R^2}$, por lo que la expresión (6.1.6) se reescribe

$$\phi'' + \frac{\phi'}{(r - r_0)} + \omega^2 \frac{(\pi T)^{-2}}{16(r - r_0)^2} \phi = 0. \quad (6.1.7)$$

Definiendo¹ ahora $\lambda = \frac{\omega}{\pi T} \ll 1$, puesto que $\omega \ll T$, se obtiene finalmente la ecuación de onda en esta región según

$$\phi_I'' + \frac{\phi_I'}{(r - r_0)} + \frac{\lambda^2}{16} \frac{\phi_I}{(r - r_0)^2} = 0. \quad (6.1.8)$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial son de la forma

$$\phi_I(r) = C_I^{(1)} \cos\left(\frac{\lambda}{4} \log(r_0 - r)\right) + C_I^{(2)} \sin\left(\frac{\lambda}{4} \log(r_0 - r)\right). \quad (6.1.9)$$

O bien, en términos de funciones exponenciales complejas

$$\phi_I(r) = \frac{C_I^{(1)}}{2} \left(e^{i\frac{\lambda}{4} \log(r_0 - r)} + e^{-i\frac{\lambda}{4} \log(r_0 - r)} \right) + \frac{C_I^{(2)}}{2i} \left(e^{i\frac{\lambda}{4} \log(r_0 - r)} - e^{-i\frac{\lambda}{4} \log(r_0 - r)} \right) \quad (6.1.10)$$

¹Notar que este λ no es aquí más que una constante, y nada tiene que ver con la constante de acoplamiento de 't Hooft.

con constantes indeterminadas $C_I^{(1)}$ y $C_I^{(2)}$. Las condiciones de contorno del problema son aquellas correspondientes al caso de un agujero negro clásico. Esto implica que la función de onda del gravitón no debe tener componente de onda saliente alguna. Es decir, los términos que en (6.1.10) representan este tipo de comportamiento, las funciones exponenciales complejas de exponente no negativo, deben anularse. Ésto sucederá sólo si $\frac{C_I^{(2)}}{2i} = -\frac{C_I^{(1)}}{2}$. Por tanto se tiene

$$C_I^{(2)} = -iC_I^{(1)}. \quad (6.1.11)$$

La función $\phi_I(r)$ será entonces

$$\begin{aligned} \phi_I(r) &= \frac{C_I^{(1)}}{2} \left(e^{i\frac{\lambda}{4} \log(r_0-r)} + e^{-i\frac{\lambda}{4} \log(r_0-r)} \right) - \frac{C_I^{(1)}}{2} \left(e^{i\frac{\lambda}{4} \log(r_0-r)} - e^{-i\frac{\lambda}{4} \log(r_0-r)} \right) \\ &= C_I^{(1)} e^{\log(r_0-r) \frac{-i\lambda}{4}} \\ &= C_I^{(1)} (r_0 - r)^{\frac{-i\lambda}{4}}. \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Esta expresión puede simplificarse más todavía, según

$$\begin{aligned} \phi_I(r) &= C_I^{(1)} (r_0 - r)^{\frac{-i\lambda}{4}} \\ &= C_I^{(1)} \left[(-r) \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \right]^{\frac{-i\lambda}{4}} \\ &= \left[C_I^{(1)} (-r)^{\frac{-i\lambda}{4}} \right] \left[\left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \right]^{\frac{-i\lambda}{4}} \\ &= A(r) \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{-i\lambda}{4}}, \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

donde hemos definido $A(r) = C_I^{(1)} (-r)^{\frac{-i\lambda}{4}}$. Si λ es muy pequeño luego $A(r) \simeq A$, una constante. Entonces, y dado que $\lambda = \frac{\omega}{\pi T} \ll 1$, la ecuación (6.1.8) admite la solución efectiva

$$\phi_I(r) = A \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{-i\lambda}{4}} \quad (6.1.14)$$

que será la función de onda del gravitón de frecuencia ω en la región más próxima al horizonte de eventos.

La siguiente región de interés se ubica fuera del horizonte de eventos, $r_0 < r$, excluyendo el caso en que r se aproxima a r_0 exponencialmente, y donde además $r \ll \omega^{-1}$. Veremos a continuación que en este caso el tercer término de la ecuación (6.1.1) resulta despreciable.

El coeficiente de la función ϕ en (6.1.1) puede ser reescrito según

$$\frac{\omega^2 r^4 (r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2} = \left[\frac{\omega^2 r^8}{(r^4 - r_0^4)^2} + \frac{\omega^2 r^4 R^4}{(r^4 - r_0^4)^2} \right]. \quad (6.1.15)$$

El primer término de la derecha de (6.1.15) puede, en sucesivos pasos, ser llevado a la

forma

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^2 r^8}{(r^4 - r_0^4)^2} &= \frac{\omega^2 r^8}{[(r^2 - r_0^2)(r^2 + r_0^2)]^2} \\
 &\simeq \frac{\omega^2 r^8}{[(r^2 - r_0^2)(2r^2)]^2} \\
 &= \frac{\omega^2 r^8}{4r^4 (r^2 - r_0^2)^2} \\
 &= \frac{\omega^2 r^4}{4(r^2 - r_0^2)^2} \tag{6.1.16}
 \end{aligned}$$

donde en la segunda línea nos hemos valido de las condiciones de la región II, donde $r_0 \lesssim r$ y por tanto la cantidad $(r^2 + r_0^2)$ se reemplaza por $2r^2$. La expresión obtenida puede acotarse superiormente según

$$\frac{\omega^2 r^4}{4(r^2 - r_0^2)^2} < \frac{\omega^2 r^4}{(r^2 - r_0^2)^2}. \tag{6.1.17}$$

Trabajando entonces sobre esta cota, se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^2 r^4}{(r^2 - r_0^2)^2} &= \frac{\omega^2 r^4}{[(r - r_0)(r + r_0)]^2} \\
 &\simeq \frac{\omega^2 r^4}{[(r - r_0)(2r)]^2} \\
 &= \frac{\omega^2 r^4}{4r^2 (r - r_0)^2} \\
 &= \frac{\omega^2 r^2}{4(r - r_0)^2} \tag{6.1.18}
 \end{aligned}$$

donde nuevamente se emplea la aproximación $r \simeq r_0$ en la segunda igualdad. Por tratarse de cantidades positivas, la expresión final de (6.1.18) satisface

$$\frac{\omega^2 r^2}{4(r - r_0)^2} < \frac{\omega^2 r^2}{(r - r_0)^2} \tag{6.1.19}$$

Más aún, en la región en estudio la distancia r es tal que $r \ll \omega^{-1}$. Luego $\omega r \ll 1$ y

$$\frac{\omega^2 r^2}{(r - r_0)^2} \ll \frac{1}{(r - r_0)^2}. \tag{6.1.20}$$

Teniendo en cuenta que (6.1.20) es cota superior de (6.1.16) finalmente se tiene

$$\frac{\omega^2 r^8}{(r^4 - r_0^4)^2} \ll \frac{1}{(r - r_0)^2}. \tag{6.1.21}$$

Analizaremos entonces a continuación el segundo término de (6.1.15) de modo similar.

Reescribiéndolo, y haciendo uso de la misma aproximación sobre r que en el caso anterior

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^2 r^4 R^4}{(r^4 - r_0^4)^2} &= \frac{\omega^2 r^4 R^4}{[(r^2 - r_0^2)(r^2 + r_0^2)]^2} \\
 &\simeq \frac{\omega^2 r^4 R^4}{[(r^2 - r_0^2)(2r^2)]^2} \\
 &= \frac{\omega^2 r^4 R^4}{4r^4 (r^2 - r_0^2)^2} \\
 &= \frac{\omega^2 R^4}{4(r^2 - r_0^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{6.1.22}$$

Evidentemente esta cantidad verifica

$$\frac{\omega^2 R^4}{4(r^2 - r_0^2)^2} < \frac{\omega^2 R^4}{(r^2 - r_0^2)^2}. \tag{6.1.23}$$

Según se mencionó previamente, en todo momento se supone $\omega \ll T = \frac{r_0}{\pi R^2}$. En vistas de ello, se tiene que $\omega^2 \ll \frac{r_0^2}{R^4}$ y por tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega^2 R^4}{(r^2 - r_0^2)^2} &\ll \frac{r_0^2}{R^4} \frac{R^4}{(r^2 - r_0^2)^2} \\
 &= \frac{r_0^2}{(r^2 - r_0^2)^2} \\
 &= \frac{r_0^2}{[(r - r_0)(r + r_0)]^2} \\
 &\simeq \frac{r_0^2}{4r_0^2 (r - r_0)^2} \\
 &= \frac{1}{4(r - r_0)^2}
 \end{aligned} \tag{6.1.24}$$

donde, en el último renglón, nuevamente hemos considerado $r \simeq r_0$. La cantidad obtenida en (6.1.24) es menor a $(r - r_0)^{-2}$. Por tanto la combinación de (6.1.22) y (6.1.24) resulta en la desigualdad

$$\frac{\omega^2 r^4 R^4}{(r^4 - r_0^4)^2} \ll \frac{1}{(r - r_0)^2}. \tag{6.1.25}$$

La suma de las desigualdades (6.1.21) y (6.1.25) provee una cota superior para el coeficiente de la función ϕ en (6.1.1)

$$\frac{\omega^2 r^4 (r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2} = \left[\frac{\omega^2 r^8}{(r^4 - r_0^4)^2} + \frac{\omega^2 r^4 R^4}{(r^4 - r_0^4)^2} \right] \ll \frac{2}{(r - r_0)^2}. \tag{6.1.26}$$

Ahora bien, ¿por qué (6.1.26) implica que el término en ϕ pueda despreciarse? La respuesta a esta pregunta surge al estudiar el coeficiente que acompaña a ϕ' , en el segundo

término de (6.1.1)

$$\begin{aligned}
 \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)} &= \frac{4r^4 + (r^4 - r_0^4)}{r(r^4 - r_0^4)} \\
 &= \frac{4r^4}{r(r - r_0)(r + r_0)(r^2 + r_0^2)} + \frac{(r^4 - r_0^4)}{r(r^4 - r_0^4)} \\
 &= \frac{4r^4}{r(r - r_0)(2r)(2r^2)} + \frac{1}{r(r^4 - r_0^4)} \\
 &= \frac{1}{r - r_0} + \frac{1}{r}.
 \end{aligned} \tag{6.1.27}$$

Fuera de la zona más próxima al horizonte de eventos es válido suponer que $(r - r_0) > 1$, con lo que $(r - r_0)^{-1} \gg 2(r - r_0)^{-2}$. Resulta entonces para la ecuación (6.1.26)

$$\frac{2}{(r - r_0)^2} \ll \frac{1}{r - r_0} + \frac{1}{r} \simeq \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)}. \tag{6.1.28}$$

Finalmente, en vistas de (6.1.26) y (6.1.28) resulta que

$$\frac{\omega^2 r^4 (r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2} \ll \frac{2}{(r - r_0)^2} \ll \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)}. \tag{6.1.29}$$

Por lo tanto en esta región el tercer término de la ecuación de onda (6.1.1) puede desestimarse, y la ecuación diferencial efectiva es, para $r_0 < r \ll \omega^{-1}$,

$$\phi''_{II} + \frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)} \phi'_{II} = 0 \tag{6.1.30}$$

y las soluciones de la misma toman la forma

$$\phi_{II}(r) = C_{II}^{(1)} \left[\frac{\log(r^4 - r_0^4)}{4r_0^4} - \frac{\log(r)}{r_0^4} \right] + C_{II}^{(2)}. \tag{6.1.31}$$

La función solución de la ecuación de onda *efectiva* de la región II, (6.1.31), debe no sólo tener sentido físico sino también ser compatible con las soluciones de las regiones cercana al horizonte de eventos ($r \approx r_0$) y de r arbitrariamente grande ($r \rightarrow \infty$). Los términos dependientes de r en (6.1.31) divergen tanto para $r = r_0$ como para $r \rightarrow \infty$. Esta divergencia se salva fijando $C_{II}^{(1)} = 0$, con lo que (6.1.30) tendrá una solución trivial

$$\phi_{II}(r) = C_{II}^{(2)}. \tag{6.1.32}$$

A su vez, esta constante deberá empalmar suavemente con la función $\phi_I(r)$ en el límite de validez de esta última, el comienzo de la región II, $r_0 < r \ll \omega^{-1}$.

Una gráfica de las partes real e imaginaria de $\frac{\phi_I(r)}{A} = (1 - r_0/r)^{\frac{-i\lambda}{4}}$ para $\lambda \ll 1$ y $r > r_0$ evidencia el comportamiento asintótico de ambas. Por un lado, se observa para la parte real

$$\text{Re} \left\{ \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{-i\lambda}{4}} \right\} \rightarrow 1 \quad \text{si} \quad r_0 \ll r, \lambda \ll 1. \tag{6.1.33}$$

Este comportamiento se ilustra en la figura 6.1a.

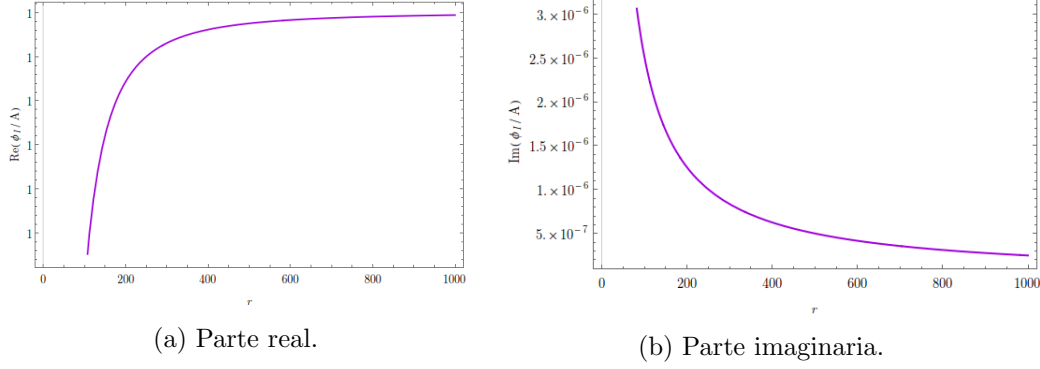


Figura 6.1: Gráficas correspondientes a las partes real e imaginaria de una función de forma general $(1 - r/r_0)^{\frac{-i\lambda}{4}}$, con $\lambda \ll 1$. A modo de ejemplo, se ilustra la forma de estas funciones para $r_0 = 1$ y $\lambda = 0,001$.

Nota: La variación de la parte real con respecto a la coordenada radial es tan pronunciada que el software graficador no resuelve cifras significativas más allá de la unidad.

Por otro lado, el comportamiento asintótico de la parte imaginaria, bosquejado en la figura 6.1b, muestra la tendencia de ésta a cero:

$$\text{Im}\left\{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{-i\lambda}{4}}\right\} \rightarrow 0 \quad \text{si } r_0 \ll r, \lambda \ll 1. \quad (6.1.34)$$

Por lo tanto en el límite de validez de la función de onda $\phi_I(r)$ y comienzo de la región dominada por $\phi_{II}(r)$ se tiene

$$\phi_{II}(r) = A \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{-i\lambda}{4}} \rightarrow A \quad \text{si } r_0 \ll r, \lambda \ll 1 \quad (6.1.35)$$

y la unión de ambas soluciones se consigue sencillamente fijando $C_{II}^{(2)} = A$, resultando

$$\phi_{II}(r) = A. \quad (6.1.36)$$

Finalmente, en la región más externa, región III, la condición característica es $r \gg R \gg r_0$. En primer lugar, para el coeficiente de ϕ' en (6.1.1) se tiene

$$\frac{5r^4 - r_0^4}{r(r^4 - r_0^4)} \simeq \frac{5}{r} \quad (6.1.37)$$

ya que la cantidad r_0^4 resulta nimia en comparación con $5r^4$ o r^4 pues $r \gg r_0$. Por otro lado, el coeficiente del término tercero, que acompaña a ϕ :

$$\omega^2 \frac{r^4 (r^4 + R^4)}{(r^4 - r_0^4)^2} \simeq \omega^2 \quad (6.1.38)$$

donde hemos tenido en cuenta que $r \gg R \gg r_0$. La ecuación diferencial efectiva en la región III es

$$\phi_{III}'' + \frac{5}{r} \phi_{III}' + \omega^2 \phi_{III} = 0. \quad (6.1.39)$$

La función $\phi_{III}(r)$ se escribirá entonces en términos de funciones de Bessel:

$$\phi_{III}(r) = \frac{C_{III}^{(1)} J_2(\omega r)}{(\omega r)^2} + \frac{C_{III}^{(2)} Y_2(\omega r)}{(\omega r)^2} \quad (6.1.40)$$

donde J_2 representa a la función de Bessel de primera especie y orden 2, en tanto que Y_2 es la función de Bessel de segunda especie y orden 2. Los rangos de validez de $\phi_{II}(r)$ y $\phi_{III}(r)$ se verán solapados cuando tanto las restricciones de la región II ($r_0 < r \ll \omega^{-1}$) como las de III ($r \gg R$) sean satisfechas. Así, $\phi_{III}(r)$ debe reducirse a la forma de $\phi_{II}(r) = A$ cuando $r \ll \omega^{-1}$, o $\omega r \ll 1$. Se vuelve necesario entonces estudiar los comportamientos límites de las funciones involucradas en (6.1.40):

$$\lim_{(\omega r) \rightarrow 0} \frac{J_2(\omega r)}{(\omega r)^2} = \frac{1}{8}$$

$$\lim_{(\omega r) \rightarrow 0} \frac{Y_2(\omega r)}{(\omega r)^2} = \infty.$$

El coeficiente del término divergente debe fijarse idénticamente nulo para mantener el sentido físico de la función de onda, $C_{III}^2 = 0$. Por otro lado, el remanente finito junto al coeficiente C_{III}^1 deberán verificar:

$$\lim_{(\omega r) \rightarrow 0} \phi_{III}(r) = \phi_{II}(r)$$

es decir

$$\frac{C_{III}^1}{8} = A,$$

de donde es directo que $C_{III}^1 = 8A$ y por tanto

$$\phi_{III}(r) = 8A \frac{J_2(\omega r)}{(\omega r)^2}. \quad (6.1.41)$$

La interpretación física de la función de onda (6.1.41) se hace más evidente al reescribirla en términos de funciones de Hankel:

$$H_\alpha^{(1)} := J_\alpha + iY_\alpha$$

$$H_\alpha^{(2)} := J_\alpha - iY_\alpha$$

denominadas funciones de Hankel de primer y segunda especie, respectivamente. La función de onda es entonces:

$$\phi_{III}(r) = 4A \left(\frac{H_2^{(1)}(\omega r)}{(\omega r)^2} + \frac{H_2^{(2)}(\omega r)}{(\omega r)^2} \right). \quad (6.1.42)$$

A primer orden y considerando grandes distancias, es decir $r \rightarrow \infty$ y con ello $\omega r \rightarrow \infty$, las series de los términos involucrados en (6.1.42) se reducen a

$$\frac{H_2^{(1)}(\omega r)}{(\omega r)^2} \simeq e^{i\omega r} O\left(\frac{1}{\omega r}\right)^{\frac{5}{2}} \quad (6.1.43)$$

$$\frac{H_2^{(2)}(\omega r)}{(\omega r)^2} \simeq e^{-i\omega r} O\left(\frac{1}{\omega r}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (6.1.44)$$

Por tanto, en el límite de $r \rightarrow \infty$ la función de onda puede descomponerse en una componente entrante ($\sim e^{i\omega r}$) y una saliente ($\sim e^{-i\omega r}$).

6.2. Probabilidad de absorción y sección eficaz de absorción

Consideremos de forma general la propagación de un campo escalar no masivo, como el de interés, en una geometría de forma genérica

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu}(r)dx^\mu dx^\nu + \tilde{f}(r)dr^2 + r^2h(r)d\Omega_{n+1} \quad (6.2.1)$$

donde $\gamma_{\mu\nu}(r)$ con $\mu, \nu = 0, 1, \dots, p$ es una métrica de signatura Lorentziana en un espacio $(p+1)$ -dimensional cuyos coeficientes dependen exclusivamente de la coordenada radial r . La geometría se supone asintóticamente plana:

$$\gamma_{\mu\nu}(r) \rightarrow \eta_{\mu\nu}$$

$$\tilde{f}(r), h(r) \rightarrow 1$$

cuando $r \rightarrow \infty$. El problema de absorción/dispersión se simplifica introduciendo la función auxiliar definida según:

$$U(r) := \left[\gamma \gamma^{tt} (r^2 h(r))^{n+1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.2.2)$$

donde γ representa al determinante de la métrica, $\gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}(r))$.

Según [55], el flujo de un campo escalar ϕ_ω está dado por:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2i} \frac{U(r)}{\sqrt{-\gamma^{tt} \tilde{f}(r)}} \left(\phi_\omega^* \frac{d\phi_\omega}{dr} - c.c. \right) \quad (6.2.3)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\mathcal{F} = \frac{U(r)}{\sqrt{-\gamma^{tt} \tilde{f}(r)}} \text{Im} \left\{ \left(\phi_\omega^* \frac{d\phi_\omega}{dr} \right) \right\} \quad (6.2.4)$$

y la probabilidad de absorción del mismo es la razón entre el flujo en $r = r_0$, \mathcal{F}_{r_0} , y el flujo entrante en el infinito, \mathcal{F}_∞ :

$$P = \frac{\mathcal{F}_{r_0}}{\mathcal{F}_\infty} \quad (6.2.5)$$

La geometría en estudio corresponde a una 3-brana negra no extremal, según ya vimos, de métrica:

$$ds^2 = H(r)^{-\frac{1}{2}} [-f(r)dt^2 + d\bar{x}^2] + H^{\frac{1}{2}}(r) [f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_5^2] \quad (6.2.6)$$

con $H(r) = 1 + \frac{R_0^4}{r^4}$ y $f(r) = 1 - \frac{r_0^4}{r^4}$. Comparando (6.2.6) con (6.2.1) pueden hacerse las siguientes asociaciones:

$$\tilde{f}(r) = H^{-\frac{1}{2}}(r) f(r)^{-1} \quad (6.2.7)$$

$$h(r) = H^{\frac{1}{2}}(r). \quad (6.2.8)$$

Es posible entonces escribir la forma explícita de la función $U(r)$ para el caso de interés:

$$\begin{aligned} U(r) &= \left[\gamma \gamma^{tt} (r^2 h(r))^{n+1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\gamma \gamma_{tt}^{-1} (r^2 h(r))^5 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

donde hemos hecho uso de la propiedad $\gamma^{tt} = (\gamma_{tt})^{-1}$, y reemplazado $n = 4$ como número de dimensiones del problema.

Sustituyendo ahora los coeficientes de la métrica pertinente, (6.2.7) y (6.2.8), se obtiene:

$$U(r) = \left[-\gamma H^{\frac{1}{2}}(r) f(r)^{-1} \left(r^2 H^{\frac{1}{2}}(r) \right)^5 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2.10)$$

El valor de γ , determinante de la métrica, es el resultado de efectuar el producto de sus elementos diagonales. Este resultado es $\gamma = -H(r)^{-\frac{4}{2}} f(r)$. Reemplazando esta cantidad en la expresión (6.2.10) finalmente se obtiene para la función auxiliar $U(r)$:

$$U(r) = r^5 H(r)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.2.11)$$

La raíz cuadrada presente en el denominador de (6.2.4) también debe ser reescrita acorde a las cantidades correspondientes a la geometría en tratamiento. Nuevamente, valiéndonos de la propiedad $\gamma^{tt} = (\gamma_{tt})^{-1}$ y de (6.2.7), se obtiene:

$$\sqrt{-\gamma^{tt} \tilde{f}(r)} = H(r)^{\frac{1}{2}} f(r)^{-1}. \quad (6.2.12)$$

El cociente entre (6.2.11) y (6.2.12) resulta ser:

$$\begin{aligned} \frac{U(r)}{\sqrt{-\gamma^{tt} \tilde{f}(r)}} &= \frac{r^5 H(r)^{\frac{1}{2}}}{H(r)^{\frac{1}{2}} f(r)^{-1}} \\ &= r^5 f(r) \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

Para llevar ahora a (6.2.4) a una forma explícita resta entonces calcular el producto $\phi_\omega^* \frac{d\phi_\omega}{dr}$ y tomar su parte imaginaria. La función de onda involucrada en el flujo en el horizonte de eventos, \mathcal{F}_{r_0} , es $\phi_I(r)$, dada por (6.1.14).

Teniendo en cuenta la propiedad:

$$(ab)^* = a^* b^* \quad \forall \quad a, b \in \mathbb{C}$$

la función compleja conjugada de $\phi_I(r)$ es:

$$\begin{aligned} \phi_I^*(r) &= \left[A \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{-\frac{i\lambda}{4}} \right]^* \\ &= A^* \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{i\lambda}{4}}. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Por otro lado, derivando a $\phi_I(r)$ respecto de la coordenada radial:

$$\frac{d\phi_I(r)}{dr} = A \left(\frac{-i\lambda}{4} \right) \left(\frac{r_0}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{-\frac{i\lambda}{4}-1}. \quad (6.2.15)$$

El producto de (6.2.14) y (6.2.15) resulta entonces una cantidad puramente imaginaria:

$$\phi_I^*(r) \frac{d\phi_I(r)}{dr} = |A|^2 \left(\frac{-i\lambda}{4} \right) \left(\frac{r_0}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_0}{r} \right)^{-1}. \quad (6.2.16)$$

El flujo en el horizonte de eventos puede ahora ser calculado directamente, haciendo uso de (6.2.13), en donde además reemplazaremos a $f(r)$ por su forma explícita, y de (6.2.16):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{r_0} &= -r^5 \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) |A|^2 \frac{\lambda r_0}{4 r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \\
 &= -\frac{|A|^2 \lambda}{4} r_0 r^3 \left(\frac{r}{r-r_0}\right) \left[\frac{(r^2 - r_0^2)(r^2 + r_0^2)}{r^4}\right] \\
 &= -\frac{|A|^2 \lambda}{4} r_0 \frac{(r-r_0)(r+r_0)(r^2 + r_0^2)}{(r-r_0)} \\
 &= -\frac{|A|^2 \lambda}{4} r_0 (r+r_0)(r^2 + r_0^2).
 \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Imponiendo la condición de contorno que caracteriza a la frontera del agujero negro, $r = r_0$, este flujo se reduce a:

$$\mathcal{F}_{r_0} = -|A|^2 \lambda r_0^4 \tag{6.2.18}$$

y cabe destacar que el signo negativo de esta cantidad se corresponde con el carácter de centro de absorción del agujero negro.

El flujo en el infinito \mathcal{F}_∞ debe calcularse haciendo uso de la función de onda de la región III, $\phi_{III}(r)$. Consideremos a esta función escrita según la expresión (6.1.42):

$$\phi_{III}(r) = 4A \left(\frac{H_2^{(1)}(\omega r)}{(\omega r)^2} + \frac{H_2^{(2)}(\omega r)}{(\omega r)^2} \right).$$

Teniendo en cuenta el comportamiento de estas funciones de Hankel a grandes distancias, reflejado en las expresiones (6.1.43) y (6.1.44), se observa entonces que el segundo término se anula para $r \rightarrow \infty$. Dado que este es el límite con que hemos de trabajar para el cálculo de \mathcal{F}_∞ , la forma de $\phi_{III}(r)$ se reduce a:

$$\begin{aligned}
 \phi_{III}(r \rightarrow \infty) &= \phi_\infty(r) = \frac{4A}{(\omega r)^2} H_2^{(1)}(\omega r) \\
 &= \frac{4A}{(\omega r)^2} (J_2(\omega r) + i Y_2(\omega r)).
 \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

Descomponiendo a la constante A en sus partes real e imaginaria, $A = A_{\mathbb{R}} + iA_{\mathbb{I}}$, y teniendo en cuenta que las funciones de Bessel poseen parte imaginaria nula, la función $\phi_\infty(r)$ queda reescrita de forma explícita:

$$\phi_\infty(r) = \frac{4}{(\omega r)^2} [(A_{\mathbb{R}} J_2 - A_{\mathbb{I}} Y_2) + i(A_{\mathbb{R}} Y_2 + A_{\mathbb{I}} J_2)] \tag{6.2.20}$$

en donde hemos omitido, para simplificar la notación, la dependencia en ωr de J_2 e Y_2 . Su función compleja conjugada entonces es:

$$\phi_\infty^*(r) = \frac{4}{(\omega r)^2} [(A_{\mathbb{R}} J_2 - A_{\mathbb{I}} Y_2) - i(A_{\mathbb{R}} Y_2 + A_{\mathbb{I}} J_2)]. \tag{6.2.21}$$

En tanto, la derivada de la función de onda de la región III respecto a la coordenada radial:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_\infty(r)}{dr} = & -\frac{8}{\omega^2 r^3} [(A_{\mathbb{R}} J_2 - A_{\mathbb{I}} Y_2) - i(A_{\mathbb{R}} Y_2 + A_{\mathbb{I}} J_2)] \\ & + \frac{4}{(\omega r)^2} \left[\left(A_{\mathbb{R}} \frac{dJ_2}{dr} - A_{\mathbb{I}} \frac{dY_2}{dr} \right) + i \left(A_{\mathbb{R}} \frac{dY_2}{dr} + A_{\mathbb{I}} \frac{dJ_2}{dr} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Haciendo uso de la siguiente igualdad de operadores diferenciales:

$$\frac{d}{dr} = \frac{d(\omega r)}{dr} \frac{d}{d(\omega r)} = \omega \frac{d}{d(\omega r)}$$

la expresión para $\frac{d\phi_\infty(r)}{dr}$ puede reescribirse de forma más conveniente, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_\infty(r)}{dr} = & -\frac{8}{\omega^2 r^3} [(A_{\mathbb{R}} J_2 - A_{\mathbb{I}} Y_2) - i(A_{\mathbb{R}} Y_2 + A_{\mathbb{I}} J_2)] \\ & + \frac{4}{\omega r^2} \left[\left(A_{\mathbb{R}} \frac{dJ_2}{d(\omega r)} - A_{\mathbb{I}} \frac{dY_2}{d(\omega r)} \right) + i \left(A_{\mathbb{R}} \frac{dY_2}{d(\omega r)} + A_{\mathbb{I}} \frac{dJ_2}{d(\omega r)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

La parte imaginaria del producto entre (6.2.21) y (6.2.23) se obtiene empleando la propiedad:

$$\text{Im}\{ab\} = \text{Im}\{a\} \text{Re}\{b\} + \text{Im}\{b\} \text{Re}\{a\} \quad \forall a, b \in \mathbb{C}.$$

Con ello presente, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ \phi_\infty^*(r) \frac{d\phi_\infty(r)}{dr} \right\} = & -\frac{4}{(\omega r)^2} (A_{\mathbb{R}} Y_2 + A_{\mathbb{I}} J_2) \\ & \times \left[-\frac{8}{\omega^2 r^3} (A_{\mathbb{R}} J_2 - A_{\mathbb{I}} Y_2) + \frac{4}{\omega r^2} \left(A_{\mathbb{R}} \frac{dJ_2}{d(\omega r)} - A_{\mathbb{I}} \frac{dY_2}{d(\omega r)} \right) \right] \\ & + \frac{4}{(\omega r)^2} (A_{\mathbb{R}} J_2 - A_{\mathbb{I}} Y_2) \\ & \times \left[-\frac{8}{\omega^2 r^3} (A_{\mathbb{R}} Y_2 + A_{\mathbb{I}} J_2) + \frac{4}{\omega r^2} \left(A_{\mathbb{R}} \frac{dY_2}{d(\omega r)} + A_{\mathbb{I}} \frac{dJ_2}{d(\omega r)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

Del trabajo algebraico sobre (6.2.24) resulta:

$$\text{Im} \left\{ \phi_\infty^*(r) \frac{d\phi_\infty(r)}{dr} \right\} = \frac{16|A|^2}{\omega^3 r^4} \left(J_2 \frac{dY_2}{d(\omega r)} - Y_2 \frac{dJ_2}{d(\omega r)} \right). \quad (6.2.25)$$

Ahora bien, no debe perderse de vista que tanto J_2 como Y_2 y sus respectivas derivadas son funciones de Bessel evaluadas en ωr . Estas funciones satisfacen de manera general:

$$J_i(x) \frac{dY_i(x)}{dx} - Y_i(x) \frac{dJ_i(x)}{dx} = \frac{2}{\pi x} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Observando entonces la expresión (6.2.25) e identificando $x = \omega r$, ésta se reduce a:

$$\text{Im} \left\{ \phi_\infty^*(r) \frac{d\phi_\infty(r)}{dr} \right\} = \frac{32|A|^2}{\pi \omega^4 r^5}. \quad (6.2.26)$$

Es directo ahora el cálculo del flujo en el infinito:

$$\mathcal{F}_\infty = \frac{32|A|^2}{\pi\omega^4} f(r). \quad (6.2.27)$$

En el límite $r \rightarrow \infty$, se tiene $f(r) = (1 - \frac{r_0}{r}) \rightarrow 1$. Aplicando esta condición de borde, el flujo finalmente resulta:

$$\mathcal{F}_\infty = \frac{32|A|^2}{\pi\omega^4}. \quad (6.2.28)$$

La razón entre (6.2.18) y (6.2.28) es la probabilidad de absorción del gravitón por la 3-brana negra buscada:

$$P = \frac{\mathcal{F}_{r_0}}{\mathcal{F}_\infty} = -\frac{\pi\omega^4}{32} \lambda r_0^4. \quad (6.2.29)$$

Reemplazando en ella el valor $\lambda = \omega/\pi T$, y empleando la fórmula para la temperatura de Hawking, $T = r_0/\pi R^2$, finalmente la forma de P se reduce a:

$$P = -\frac{\pi}{32} r_0^3 \omega^5 R^2. \quad (6.2.30)$$

La sección eficaz de absorción por unidad de ángulo sólido se relaciona a la probabilidad de absorción [55] según

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{n+1}}{\omega^{n+1} \Omega_{n+1}} P \quad (6.2.31)$$

donde el volumen de la $(n+1)$ -esfera de radio unidad es

$$\Omega_{n+1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \quad (6.2.32)$$

siendo $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$. Tomando el número de dimensiones pertinente, la sección eficaz de absorción para el gravitón es entonces

$$\sigma = \frac{32\pi^2}{\omega^5} P \quad (6.2.33)$$

donde insertando (6.2.30) finalmente se obtiene

$$\sigma = \pi^3 r_0^3 R^2. \quad (6.2.34)$$

En secciones subsiguientes se analizará la relación de esta cantidad con la que representa al área del horizonte de eventos del agujero negro.

6.3. Viscosidad de corte

Estamos entonces en condiciones de afirmar que, para el límite $\omega \rightarrow \infty$, se tiene $\sigma(\omega = 0) = \pi^3 r_0^3 R^2$. Esta última expresión se relaciona con la viscosidad de corte de un plasma SYM según (5.2.2)

$$\eta = \frac{1}{2\kappa^2} \sigma(0)$$

La viscosidad de corte se reescribe entonces utilizando (6.2.34) y (4.3.2)

$$\eta = \frac{\pi}{8} N^2 T^3. \quad (6.3.1)$$

Es esencial destacar que este resultado, un valor constante, es el adoptado por la viscosidad de corte cuando la constante de acoplamiento de 't Hooft tiende a infinito. Conocida la relación entre viscosidad de corte, densidad de energía y tiempo de relajación, $\eta \sim \varepsilon\tau$, y siendo que $\varepsilon \sim N^2T^4$, este comportamiento puede interpretarse como indicador de que el tiempo τ resulta del orden de T^{-1} , aún en este límite de acoplamiento fuerte.

De la expresión válida para η en el caso de acoplamiento débil ($g^2N \ll 1$), (5.1.3):

$$\eta = C \frac{N^2T^3}{(g^2N)^2 \log\left(\frac{1}{g^2N}\right)}$$

y de la correspondiente al límite de acoplamiento fuerte ($g^2N \gg 1$), (6.3.1):

$$\eta = \frac{\pi}{8}N^2T^3$$

puede conjeturarse que, dada una constante de 't Hooft finita, la viscosidad de corte responde a una relación de tipo

$$\eta = f(g^2N)N^2T^3$$

con una función subyacente $f(x)$ tal que $f(x) \sim x^{-2} \log^{-1}(1/x)$ para $x \ll 1$ y $f(x) = \pi/8$ cuando $x \gg 1$, siendo además ésta posiblemente una función monótona decreciente, cuya asíntota en el valor $\pi/8$, es alcanzada en el límite infinito de la variable independiente.

6.4. Densidad de entropía

La entropía de una brana negra es proporcional al área de su horizonte de eventos,

$$S = \frac{V_8}{4G} \tag{6.4.1}$$

siendo V_8 la mencionada área, y G la constante de gravitación de Newton 10-dimensional. Este área debe calcularse considerando la métrica *inducida* en el horizonte de eventos del agujero negro. En particular, en este horizonte, $r = r_0$. Por tanto, la forma de $f(r) = 1 - \frac{r_0^4}{r^4}$ se reduce a

$$r = r_0 \Rightarrow f(r_0) = 0 \tag{6.4.2}$$

mientras que, siendo $R \gg r_0$, $H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}$ se modifica según

$$r = r_0 \Rightarrow H(r_0) \simeq \frac{R^4}{r_0^4}. \tag{6.4.3}$$

De modo similar, al tomar la variable r un valor fijo,

$$r = r_0 \Rightarrow dr_0 = 0. \tag{6.4.4}$$

Estos cambios se introducen en la métrica de la 3-brana negra cuasi extremal (6.2.6), obteniéndose así la denominada métrica inducida:

$$ds^2|_{r=r_0} = \frac{r_0^2}{R^2}d\bar{x}^2 + R^2d\Omega_5^2. \tag{6.4.5}$$

A través del determinante de esta última, γ_i , se calcula la superficie del agujero negro:

$$V_8 = \int \sqrt{\gamma_i}d^8x. \tag{6.4.6}$$

El valor de este determinante es sencillamente $\gamma_i = r_0^6/R^6$. En tanto, el diferencial d^8x puede descomponerse en un diferencial de volumen tridimensional usual, $d^3x \equiv d\bar{x}$, y un diferencial de área de la 5-esfera Ω_5 , $d^5x \equiv dA_5$. Este último puede reescribirse en términos del diferencial de ángulo sólido $dA_5 = R^5 d\Omega_5$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} V_8 &= \int \frac{r_0^3}{R^3} R^5 d\Omega_5 d\bar{x} \\ &= \int r_0^3 R^2 d\Omega_5 d\bar{x} \\ &= r_0^3 R^2 \Omega_5 V_3 \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

siendo V_3 un volumen tridimensional usual y Ω_5 el volumen de una 5-esfera unitaria que, según (6.2.32) es en este caso igual a π^3 . Así, la entropía del agujero negro puede expresarse

$$S = \frac{V_8}{4G} = \frac{\pi^3 r_0^3 R^2 V_3}{4G}. \quad (6.4.8)$$

De particular interés es la entropía específica,

$$s = \frac{S}{V_3} = \frac{\pi^3 r_0^3 R^2}{4G}. \quad (6.4.9)$$

Considerando a la viscosidad de corte escrita con dependencia explícita de la sección eficaz de absorción $\sigma(0)$,

$$\eta = \frac{1}{2\kappa^2} \pi^3 r_0^3 R^2 \quad (6.4.10)$$

resulta evidente la proporcionalidad entre (6.4.9) y (6.4.10). La razón entre ambas cantidades,

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi} \quad (6.4.11)$$

El desarrollo del cálculo que desemboca en la relación (6.4.11) se ha realizado aquí en unidades naturales ($\hbar = c = k_B = 1$). Un sencillo análisis dimensional nos permite restaurar las unidades propicias para entender a esta cantidad. Por un lado, la viscosidad de corte:

$$[\eta] = \frac{M}{LT}$$

posee dimensiones de masa sobre distancia y tiempo. Por otro, la entropía específica tendrá dimensiones de entropía, $[S] = [k_B]$, donde k_B , la constante de Boltzmann, representa a la unidad de ésta, sobre dimensiones de volumen, $[V] = L^3$,

$$[s] = \frac{[k_B]}{L^3}.$$

De este análisis resulta que

$$\left[\frac{\eta}{s} \right] = \frac{ML^2}{T [k_B]}.$$

Ahora bien, ML^2/T son unidades de acción. En unidades naturales la constante de Planck \hbar asume el rol de cuanto de acción, con lo cual puede reescribirse lo anterior según

$$\left[\frac{\eta}{s} \right] = \frac{[\hbar]}{[k_B]}.$$

Así, restaurando las unidades de acción y entropía en el cociente adimensional (6.4.11):

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B}. \quad (6.4.12)$$

6.5. Discusión

El resultado (6.4.12) se verifica para toda teoría de *gauge* no abeliana en el límite $N \rightarrow \infty$, a temperatura finita y potencial químico nulo, siempre que éstas tengan un dual gravitatorio derivado de la teoría de cuerdas, y sugiere que (6.4.12) establece una cota inferior de la razón η/s

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{\hbar}{4\pi k_B}. \quad (6.5.1)$$

En particular, se encuentra que toda teoría de Yang-Mills con dual gravitatorio en diez dimensiones satura la desigualdad.

Desde el punto de vista teórico, la relación anterior puede justificarse a partir del principio de incertidumbre de Heisenberg. La viscosidad de un plasma es proporcional al producto entre su densidad de energía ϵ y el tiempo libre medio asociado a una cuasipartícula, τ_{mft} ,

$$\eta \sim \epsilon \tau_{mft}. \quad (6.5.2)$$

Por otro lado, su densidad de entropía es proporcional al número n de cuasipartículas,

$$s \sim n k_B. \quad (6.5.3)$$

El principio de incertidumbre establece que el producto entre la energía de una cuasipartícula y la escala de tiempo característica del sistema ha de ser mayor a la constante de Planck,

$$\frac{\epsilon}{n} \tau_{mft} \geq \hbar. \quad (6.5.4)$$

Es evidente entonces de (6.5.2) y (6.5.3) que la relación que nos compete verifica, al menos:

$$\frac{\eta}{s} \geq \frac{\hbar}{k_B}. \quad (6.5.5)$$

Las teorías de constante de acoplamiento pequeñas, en vista de (6.5.4), superan ampliamente el valor de esta cota, ya que sus tiempos libres medios son grandes. Para teorías $\mathcal{N} = 4$ SYM en régimen de acoplamiento débil η/s toma la forma [56, 57]:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{A}{(g^2 N)^2 \log \left(\frac{B}{\sqrt{g^2 N}} \right)} \quad (6.5.6)$$

donde $A = 6,174$ y $B = 2,36$. Opuesto a lo que sucede para $g^2 N \rightarrow \infty$, el resultado de este régimen presenta una fuerte dependencia de la constante de acoplamiento de 't Hooft, con una tendencia divergente para $g^2 N \rightarrow 0$. Este comportamiento refleja la estructura del plasma de quark y gluones: un gas de cuasipartículas “diluido”. Esta dilución implica un camino libre medio grande (y un τ_{mft} también grande). A medida que la constante de acoplamiento tiende a cero, el camino libre medio diverge y, en respuesta, también lo hace (6.5.6).

El cálculo de η/s para teorías $\mathcal{N} = 4$ SYM de constante de acoplamiento g^2N finita [58, 59, 60, 61] respalda también al rol de (6.4.12) como cota inferior de la cantidad. A saber, para estos casos, se tiene:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \left(1 + \frac{135\zeta(3)}{8(g^2N)^{\frac{3}{2}}} + \dots \right) \quad (6.5.7)$$

donde $\zeta(3) \approx 1,2020569$ es la función Zeta de Riemann evaluada en tres, también conocida como constante de Apéry. Así, la corrección a (6.4.12) es positiva.

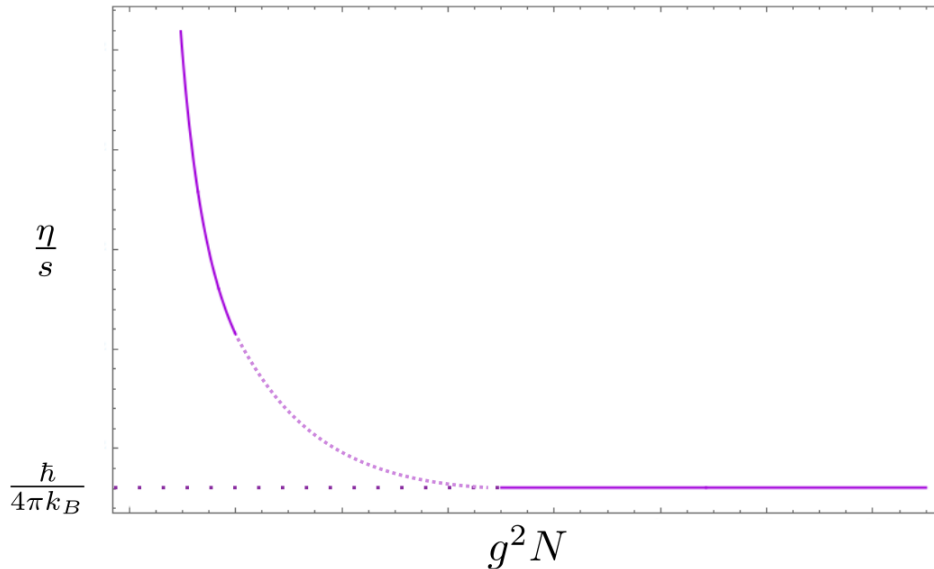


Figura 6.2: Dependencia funcional de la razón η/s con la constante de acoplamiento de 't Hooft g^2N . La razón diverge para el límite $g^2N \rightarrow 0$, en tanto que alcanza la cota inferior calculada cuando $g^2N \rightarrow \infty$.

Es razonable suponer, en vistas de (6.4.12), (6.5.6) y (6.5.7), que la dependencia general de η/s con la constante de acoplamiento g^2N reviste una relación monótona. La función presentaría un crecimiento asintótico y divergente para $g^2N \rightarrow 0$, decreciendo hasta alcanzar su mínimo, $\frac{\hbar}{4\pi k_B}$, en $g^2N \rightarrow \infty$. La figura 6.2 es una representación de la dependencia funcional de η/s con g^2N , donde la línea de puntos graficada es tan sólo una función interpolante.

Cabe además destacar la implicancia de las aparentemente inocuas constantes A y B, presentes en (6.5.6): estas pueden variar significativamente entre diferentes teorías dentro del régimen de acoplamiento débil, dependiendo del número de cuasipartículas involucradas. Es únicamente para el caso fuertemente acoplado que emerge naturalmente un límite universal al que se atienen todas las teorías SYM con dual gravitatorio derivado de las teorías de cuerdas tipo IIA y IIB. En particular, puede verse que un plasma fuertemente acoplado, en el marco de una teoría de *gauge*, no presenta cuasipartículas, lo que parece nuevamente ser un aval del resultado (6.5.1) .

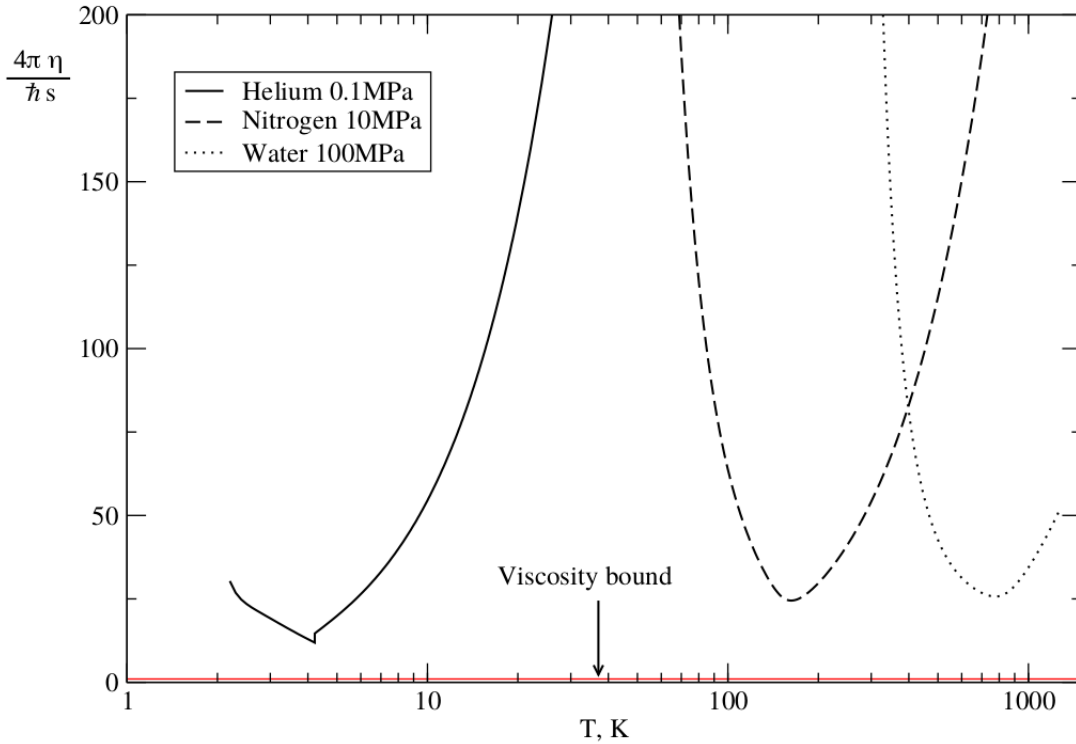


Figura 6.3: La razón entre viscosidad de corte y entropía específica para algunas sustancias comunes: helio, nitrógeno y agua. La razón η/s es siempre apreciablemente superior al valor de la cota conjeturada en (6.5.5), representada por la línea horizontal etiquetada “Viscosity bound” en el gráfico. Imagen tomada de [54].

Así desde la teoría, dado que en todo régimen de acoplamiento la cota inferior se mantiene como tal, resulta natural suponer su validez ya con un carácter universal. En la figura 6.3 se muestran algunos ejemplos de sustancias corrientes que superan ampliamente el valor mínimo conjeturado aquí. Es importante notar que (6.5.1) no involucra a la velocidad de la luz c . Esto avala la universalidad del resultado, posicionándolo como no trivial aún para sistemas no relativistas.

Para el caso de modelos duales holográficos no ya derivados de la teoría de cuerdas sino de otras teorías de gravedad y supergravedad, existen ejemplos de cálculos de η/s en que las correcciones al valor (6.4.12) son negativas, violando la cota inferior propuesta. Un caso es el de ciertas teorías de campo conformes, cuyo dual gravitatorio es la gravedad de Gauss-Bonnet [62]. En este caso particular, sin embargo, puede verse que un valor de la razón η/s tan bajo deriva en ciertas inconsistencias en la misma teoría de campo conforme, como en violaciones de microcausalidad, lo cual en definitiva termina por respaldar nuevamente la universalidad de (6.5.1).

Capítulo 7

Conclusiones globales

Begin thus from the first act, and proceed; and,
in conclusion, at the ill which thou hast done, be
troubled, and rejoice for the good.

Pitágoras

Llegamos así a las últimas páginas de este trabajo en que hemos pretendido presentar la potencia de las descripciones holográficas en física a través del ejemplo de la razón entre viscosidad de corte y entropía específica para un plasma de la teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills fuertemente acoplado, a través de las cuales obtuvimos el importante resultado $\eta/s = \hbar/4\pi k_B$. Una razón para el enfoque en esta teoría es pedagógico: $\mathcal{N} = 4$ SYM es quizá la teoría más sencilla y mejor comprendida en el contexto de la dualidad *gauge/strings*. Actualmente se conocen muchos ejemplos de duales más sofisticados desde la teoría de cuerdas para teorías de campos no supersimétricas, no conformes, que exhiben confinamiento, transiciones de fase térmicas, etc. Sin embargo, muchas de estas cualidades particulares pierden importancia en la fase deconfinada. Así, el propósito inicial de este texto, el de estudiar un plasma de quarks y gluones de QCD, sigue encontrando una respuesta satisfactoria en $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills, la cual no sólo aporta simplicidad sino que no provoca una pérdida de generalidad, al menos cualitativamente.

Debemos destacar, además, que bajo ningún punto de vista buscamos reducir la fenomenología de las colisiones de iones pesados a la dualidad *gauge/strings*, y que la utilidad de ésta última no debe meramente medirse a través de la consistencia de sus predicciones para con las mediciones experimentales. Más bien, su utilidad radica en la posibilidad de adquirir un mejor entendimiento de los problemas que con ella se tratan, y que no pueden abordarse con las herramientas que sus teorías específicas proveen en el marco del actual estado del arte. Es útil entonces encontrar teorías cercanamente relacionadas dentro de las cuales estos problemas puedan tratarse con las herramientas que sí están a nuestro alcance. Como mencionamos en la introducción de este texto, no se tiene acceso por el momento a cálculos controlados en el régimen de acoplamiento fuerte en QCD. En tanto, a través de la dualidad de *gauge/strings*, es y ha sido posible formular, así como resolver, estos mismos problemas para una amplia clase de teorías de campos no abelianas. Entre éstas, el caso de $\mathcal{N} = 4$ SYM en el límite de $N \rightarrow \infty$ provee el modelo más simple de un plasma fuertemente acoplado producido en colisiones de iones pesados.

A la fecha las aplicaciones numerosas y exitosas de la dualidad *gauge/strings* para la resolución de problemas de la física de colisiones de iones pesados la posiciona como una herramienta útil y novel. Más aún, no carece de ciertas indicaciones de que, en realidad,

nos provee con algo más que ésto: en la resolución de estos problemas, ciertas regularidades no previstas surgen en la forma de propiedades universales, con lo que nos referimos a propiedades que son comunes a todas las teorías en régimen fuertemente acoplado con duales gravitatorios en el límite de N muy grande. Estas incluyen, entre otras, a la calculada aquí, η/s .

El descubrimiento de estas propiedades universales, genéricas, es de gran importancia, ya que nos acercan a una comprensión más profunda de la cromodinámica cuántica. El hecho de que algunas de ellas sean válidas en una clase de plasmas de teorías de *gauge* tan amplia, con diferentes números de dimensiones, contenido de campos, con o sin potencial químico, etc., nos conduce a sospechar que algunas de estas propiedades podrían efectivamente ser universales para todos los plasmas en una clase de teorías que eventualmente incluye a QCD, exista o no de ella un dual en la teoría de cuerdas.

El dominio de aplicabilidad de esta conjeturada universalidad es actualmente desconocido y puramente especulativo. Con ello nos referimos a que no sabemos exactamente a qué teorías puede aplicarse, y que tampoco podemos *a priori* hacer predicciones sobre qué observables y qué fenómenos resultan universales.

En resumen, si bien es claro que se ha de mantener una mirada crítica al buscar extraer significados físicos de cálculos realizados a partir de la dualidad *gauge/strings*, es también claro que en los últimos años ésta ha permitido muchos cambios de paradigma y proporcionado resultados relevantes en la fenomenología de colisiones de iones pesados, además de generar nuevas líneas de investigación en diversas subáreas de la física.

Apéndice A

VARIABLES DE MANDELSTAM

Las denominadas variables de Mandelstam son cantidades numéricas usadas para codificar la energía, momento y ángulos en un proceso de dispersión de partículas. Su gran ventaja es ser invariantes de Lorentz, y se emplean para estudiar procesos de dispersión o *scattering* de dos partículas en dos partículas.

Se definen según:

$$\begin{cases} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \end{cases} \quad (\text{A.0.1})$$

donde p_1 y p_2 son los cuadrimentos de las partículas iniciales, y p_3 y p_4 de las partículas resultantes del proceso de dispersión.

Las cantidades s, t, u también se denominan *canal s*, *canal t* y *canal u*. Estos “canales” representan diferentes diagramas de Feynman correspondientes a distintos procesos de *scattering* en que la interacción involucra el intercambio de una partícula intermedia cuyo cuadrimento al cuadrado es igual a s , t o u , según corresponda.

El canal s corresponde a un proceso en que dos partículas 1 y 2 se unen en otra partícula intermedia que posteriormente se divide en las partículas finales 3 y 4.

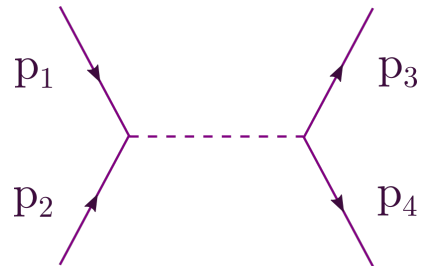


Figura A.0.1: Diagrama de Feynman para una interacción en el canal s .

A.1. Energía de centro de masa

Consideremos el caso de dos partículas que se aproximan viajando con igual energía y momento, pero en direcciones opuestas. Es decir, dirigiéndose a una colisión *de lleno*. Los cuadrimentos de estas partículas serán, considerando unidades naturales, $p_1 = (E, \vec{p})$ y $p_2 = (E, -\vec{p})$. Para esta situación, que es a grandes rasgos la que se sucede en la colisión

de nucleones pertenecientes a iones pesados en RHIC o LHC, la variable s queda dada por

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ &= ((E, \vec{p}) + (E, -\vec{p}))^2 \\ &= ((2E, \vec{0}))^2 \\ &= 4E^2. \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

Evidentemente, s es el cuadrado de la energía total de la colisión tal y como sería medida por un observador que se sitúa fijo en el centro de masa mutuo de las partículas colisionantes. Así, la energía de centro de masa es:

$$\sqrt{s} = 2E. \tag{A.1.2}$$

Apéndice B

¿AdS? El espacio anti-de Sitter

Si suponemos que una teoría de campos d -dimensional puede ser descrita por una teoría de cuerdas, o gravedad, $(d+1)$ -dimensional, podemos intentar derivar algunas propiedades del espacio-tiempo en $(d+1)$ dimensiones involucrado. La métrica más general en $(d+1)$ dimensiones consistente con la simetría d -dimensional de Poincaré puede ser escrita como

$$ds^2 = \Omega^2(z) (-dt^2 + d\bar{x}^2 + dz^2), \quad (\text{B.0.1})$$

siendo $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ y donde z es la dimensión espacial extra. Para que existan simetrías traslacionales en las direcciones t y \bar{x} , el factor Ω puede sólo depender de la coordenada adicional z .

Si consideramos teorías de campos conformes (CFT) podemos determinar la forma de $\Omega(z)$ a través de las restricciones de simetría. Una teoría con invariancia conforme es invariante bajo una transformación de escala

$$(t, \bar{x}) \rightarrow C(t, \bar{x}), \quad (\text{B.0.2})$$

con C una constante. Para que una teoría de gravedad correspondiente a la métrica (B.0.1) sea capaz de describir una teoría de campos como la que estamos proponiendo, (B.0.1) deberá respetar la simetría frente a la transformación (B.0.2), con el escalamiento simultáneo de la coordenada extra, según $z \rightarrow Cz$. Para que ambas sean válidas, el factor $\Omega(z)$ deberá transformar según

$$\Omega(z) \rightarrow C^{-1}\Omega(z). \quad (\text{B.0.3})$$

Esta condición determina de manera unívoca que

$$\Omega(z) = \frac{R}{z}, \quad (\text{B.0.4})$$

donde R es una constante. La métrica (B.0.1) puede ahora reescribirse según

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + d\bar{x}^2 + dz^2), \quad (\text{B.0.5})$$

que es precisamente la métrica de un espacio-tiempo $(d+1)$ -dimensional anti-de Sitter, AdS_{d+1} . Este último es un espacio-tiempo máximamente simétrico, con radio de curvatura R , y curvatura negativa y constante, proporcional a $1/R$ [41].

Apéndice C

Temperatura de Hawking en una métrica general de una brana negra

Calcularemos aquí la temperatura de Hawking para una clase general de métricas de branas negras de la forma

$$ds^2 = g(r) [-f(r)dt^2 + d\bar{x}^2] + \frac{1}{h(r)}dr^2, \quad (\text{C.0.1})$$

donde suponemos que las funciones $f(r)$ y $h(r)$ tienen polos de primer orden en el horizonte $r = r_0$, en tanto que $g(r)$ no se anula allí. Acorde al procedimiento estándar para este cálculo [44], pedimos que la continuación Euclídea de la métrica (C.0.1),

$$ds^2 = g(r) [f(r)dt_E^2 + d\bar{x}^2] + \frac{1}{h(r)}dr^2, \quad (\text{C.0.2})$$

obtenida a través del reemplazo $t \rightarrow -it_E$, sea regular en el horizonte. Si realizamos una expansión alrededor de $r = r_0$, obtendremos

$$ds^2 \approx \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 + g(r_0)d\bar{x}^2, \quad (\text{C.0.3})$$

en donde hemos introducido nuevas variables, definidas según

$$\begin{aligned} \rho &= 2\sqrt{\frac{r - r_0}{h'(r_0)}} \\ \theta &= \frac{t_E}{2}\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

Los dos primeros términos de (C.0.2) describen un plano en coordenadas polares, por lo que a fin de evitar una singularidad en $\rho = 0$ pediremos que θ tenga período 2π . De las ecuaciones (C.0.4) vemos entonces que el período $\beta = 1/T$ del tiempo Euclídeo deberá ser

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{4\pi}{\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}}. \quad (\text{C.0.5})$$

C.1. Temperatura de una 3-brana negra no extremal

La parte de la métrica correspondiente al espacio AdS de las 3-branas negras que consideramos en este trabajo viene dada por la expresión (4.1.6), que copiamos aquí por conveniencia:

$$ds_{AdS_{5T \neq 0}}^2 = \frac{r^2}{R^2} (-f(r)dt^2 + d\bar{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} f(r)^{-1} dr^2, \quad (C.1.1)$$

con

$$f(r) = 1 - \frac{r_0^4}{r^4}. \quad (C.1.2)$$

Identificando las cantidades que aparecen en (C.1.1) con las de la forma general (C.0.1), vemos que

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{r^2}{R^2} \\ f(r) &= \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) \\ h(r) &= \frac{r^2 f(r)}{R^2} = \frac{r^2}{R^2} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right). \end{aligned} \quad (C.1.3)$$

En vista de la expresión (C.0.5), vemos que la temperatura de Hawking expresamente escrita es

$$T = \frac{\sqrt{g(r_0)f'(r_0)h'(r_0)}}{4\pi}. \quad (C.1.4)$$

Reemplazando ahora las cantidades equivalentes para la métrica que nos concierne, es sencillo ver que resulta

$$T = \frac{r_0}{\pi R^2}. \quad (C.1.5)$$

Referencias

- [1] B. V. Jacak, B. Müller, *The Exploration of Hot Nuclear Matter*, Science **337** (2012) 310-314, 10.1126/science.1215901.
- [2] T. Ludlam, L. McLerran, *What Have We Learned From the Relativistic Heavy Ion Collider?*, Physics Today **56** 10 (2003) 48-54, doi.org/10.1063/1.1629004.
- [3] D. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30** 26 (1973) 1343-1346, 10.1103/PhysRevLett.30.1343.
- [4] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30** 26 (1973) 1346-1349, 10.1103/PhysRevLett.30.1346.
- [5] A. Adare et al., PHENIX Collaboration, *Detailed measurement of the e^+e^- pair continuum in $p+p$ and $Au+Au$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{ GeV}$ and implications for direct photon production*, Phys.Rev. **C81** (2010) 034911, arXiv:0912.0244 [nucl-ex].
- [6] I. Arsene et al., BRAHMS Collaboration, *Quark Gluon Plasma an Color Glass Condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment*, Nucl.Phys. **A757** (2005) 1-27, arXiv:nucl-ex/0410020.
- [7] K. Adcox et al., PHENIX Collaboration, *Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration*, Nucl.Phys. **A757** (2005) 184-283, arXiv:nucl-ex/0410003.
- [8] B. B. Back et al., PHOBOS Collaboration, *The PHOBOS Perspective on Discoveries at RHIC*, Nucl.Phys. **A757** (2005) 28-101, arXiv:nucl-ex/0410022.
- [9] B. Müller, J. L. Nagle, *Results from the Relativistic Heavy Ion Collider*, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. **56** (2006) 93-135, arXiv:nucl-th/0602029.
- [10] ALICE Collaboration, *Charged-particle multiplicity density at mid-rapidity in central Pb-Pb collisions at $\sqrt{s} = 2,76\text{ TeV}$* , Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 252301, arXiv:1011.3916 [nucl-ex].
- [11] ALICE Collaboration, *Elliptic flow of charged particles in Pb-Pb collisions at 2,76 TeV*, Phys.Rev.Lett. **105** (2010) 252302, arXiv:1011.3914 [nucl-ex].
- [12] B. B. Back et al., PHOBOS Collaboration, *The significance of the fragmentation region in ultrarelativistic heavy ion collisions*, Phys.Rev.Lett. **91** (2003) 052303, arXiv:nucl-ex/0210015.
- [13] P. W. Anderson, *More Is Different*, Science **177** (1972) 393-396, 10.1126/science.177.4047.393.
- [14] P.F. Kolb, P. Huovinen, U. Heinz, H. Heiselberg, *Elliptic flow at SPS and RHIC: from kinetic transport to hydrodynamics*, Phys.Lett.**B500** (2001) 232-240, arXiv:hep-ph/0012137.

- [15] D. Teaney, J. Lauret, E.V. Shuryak, *Flow at the SPS and RHIC as a Quark Gluon Plasma Signature*, Phys.Rev.Lett.**86** (2001) 4783-4786, arXiv:nucl-th/0011058.
- [16] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv.Theor.Math.Phys.**2** (1998) 231-252, arXiv:hep-th/9711200.
- [17] O. Aharony, S.S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, Phys.Rept.**323** (2000) 183-386, arXiv:hep-th/9905111.
- [18] P.F. Kolb, U. Heinz, *Hydrodynamic description of ultrarelativistic heavy-ion collisions*, arXiv:nucl-th/0305084.
- [19] S. Sachdev, *What can gauge-gravity duality teach us about condensed matter physics?*, Annual Review of Condensed Matter Physics **3** 9 (2012), arXiv:1108.1197 [cond-mat.str-el].
- [20] S. Hartnoll, *Stringing Together a Solid State*, Science **322** (2008) 1639-1640, 10.1126/science.1166668.
- [21] RHIC Images Collection.
- [22] ALICE Images Gallery.
- [23] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, *Supersymmetric Gauge Theories and the AdS/CFT Correspondence*, arXiv:hep-th/0201253.
- [24] T. Lancaster, S. J. Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, 1° Edición (2014), Oxford University Press.
- [25] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, 1° Edición (1995), Westview Press.
- [26] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, 2° Edición (2009), Cambridge University Press.
- [27] M. B. Green, J. H. Schwarz, *Supersymmetrical String Theories*, Phys. Lett. **B109** (1982) 444-448, doi.org/10.1016/0370-2693(82)91110-8.
- [28] J. H. Schwarz, *Superstring Theory*, Phys. Rept. **89** (1982) 223-322, doi.org/10.1016/0370-1573(82)90087-4.
- [29] J. H. Schwarz, P. C. West, *Symmetries and Transformations of Chiral N=2 D=10 Supergravity*, Phys. Lett. **B126** (1983) 301, doi.org/10.1016/0370-2693(83)90168-5.
- [30] J. H. Schwarz, *Covariant Field Equations of Chiral N=2 D=10 Supergravity*, Nucl. Phys. **B226** (1983) 269, doi.org/10.1016/0550-3213(83)90192-X.
- [31] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724-4727, arXiv:hep-th/9510017.
- [32] E. Witten, *Bound states of strings and p-branes*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 335-350, arXiv:hep-th/9510135.
- [33] L. Brink, J. H. Schwarz, J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills Theories*, Nucl. Phys. **B121** (1977) 77, doi.org/10.1016/0550-3213(77)90328-5.
- [34] F. Gliozzi, J. Scherk, D. I. Olive, *Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model*, Nucl. Phys. **B122** (1977) 253-290, doi.org/10.1016/0550-3213(77)90206-1.

-
- [35] R. G. Leigh, *Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2767, doi.org/10.1142/S0217732389003099.
- [36] S. R. Coleman, *Classical Lumps and their Quantum Descendents*, Subnucl. Ser. 13 (1977) 297, doi.org/10.1007/978-1-4613-4208-3_11.
- [37] R. Jackiw, *Quantum Meaning of Classical Field Theory*, Rev. Mod. Phys. **49** (1977) 681–706, doi.org/10.1103/RevModPhys.49.681.
- [38] G. W. Gibbons, K. Maeda, *Black Holes and Membranes in Higher Dimensional Theories with Dilaton Fields*, Nucl. Phys. **B298** (1988) 741-775, doi.org/10.1016/0550-3213(88)90006-5.
- [39] D. Garfinkle, G. T. Horowitz, A. Strominger, *Charged black holes in string theory*, Phys. Rev. **D43** (1991) 3140, doi.org/10.1103/PhysRevD.43.3140.
- [40] G. T. Horowitz, A. Strominger, *Black strings and P-branes*, Nucl. Phys. **B360** (1991) 197–209, doi.org/10.1016/0550-3213(91)90440-9.
- [41] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large scale structure of space-time*, (1973), Cambridge University Press.
- [42] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. W. Peet, *Entropy and Temperature of Black 3-Branes*, Phys. Rev. **D54** (1996) 3915–3919, arXiv:hep-th/9602135.
- [43] E. Witten, *Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 505–532, arXiv:hep-th/9803131.
- [44] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2752–2756, doi.org/10.1103/PhysRevD.15.2752.
- [45] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2^o Edición (1987) , Pergamon Press.
- [46] A. Hosoya, M. Sakagami, M. Takao, *Nonequilibrium Thermodynamics in Field Theory: Transport Coefficients*, Ann. Phys. **154** (1984) 229-252, doi.org/10.1016/0003-4916(84)90144-1.
- [47] I. R. Klebanov, *World Volume Approach to Absorption by Non-dilatonic Branes*, Nucl.Phys. **B496** (1997) 231-242, arXiv:hep-th/9702076.
- [48] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, A.A. Tseytlin, *String Theory and Classical Absorption by Threebranes*, Nucl.Phys. **B499** (1997) 217-240, arXiv:hep-th/9703040.
- [49] E. Witten, *Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, And Confinement In Gauge Theories*, Adv.Theor.Math.Phys. **2** (1998) 505-532, arXiv:hep-th/9803131.
- [50] B. Hassanain, M. Schvellinger, *Plasma photoemission from string theory*, arXiv:1209.0427 [hep-th].
- [51] B. Hassanain, M. Schvellinger, *Diagnostics of plasma photoemission at strong coupling*, arXiv:1110.0526 [hep-th].
- [52] B. Hassanain, M. Schvellinger, *Plasma conductivity at finite coupling*, arXiv:1108.6306 [hep-th].
- [53] G. Policastro, D.T. Son, A.O. Starinets, *Shear viscosity of strongly coupled $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills plasma*, Phys.Rev.Lett. **87** (2001) 081601, arXiv:hep-th/0104066.

-
- [54] P.Kovtun, D.T.Son, A.O.Starinets, *Viscosity in Strongly Interacting Quantum Field Theories from Black Hole Physics*, Phys.Rev.Lett. **94** (2005) 111601, arXiv:hep-th/0405231.
- [55] R. Emparan, *Absorption of Scalars by Extended Objects*, Nucl.Phys. **B516** (1998) 297-314, arXiv:hep-th/9706204.
- [56] P. B. Arnold, G. D. Moore, L.G. Yaffe, *Transport Coefficients in high temperature gauge theories. II: Beyond leading log*, JHEP **0305** (2003) 051, arXiv:hep-ph/0302165.
- [57] S. C. Huot, S. Jeon, G.D. Moore, *Shear viscosity in weakly coupled $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills theory compared to QCD*, Phys.Rev.Lett. **98** (2007) 172303, arXiv:hep-ph/0608062.
- [58] A. Buchel, J.T. Liu, A. O. Starinets, *Coupling constant dependence of the shear viscosity in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl.Phys. **B707** (2005) 56-68, arXiv:hep-th/0406264.
- [59] A. Buchel, *Shear viscosity of boost invariant plasma at finite coupling*, Nucl.Phys. **B802** (2008) 281-306, arXiv:0801.4421 [hep-th].
- [60] A. Buchel, *Resolving disagreement for η/s in a CFT plasma at finite coupling*, Nucl.Phys. **B803** (2008) 166-170, arXiv:0805.2683 [hep-th].
- [61] R. C. Myers, M. F. Paulos, A. Sinha, *Quantum corrections to η/s* , Phys.Rev. **D79** (2009) 041901, arXiv:0806.2156 [hep-th].
- [62] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, S. Yaida, *Viscosity Bound Violation in Higher Derivative Gravity*, Phys.Rev. **D77** (2008) 126006, arXiv:0712.0805 [hep-th].
- [63] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker, S. Yaida, *Viscosity Bound and Causality Violation*, Phys.Rev.Lett. **100** (2008) 191601, arXiv:0802.3318 [hep-th].