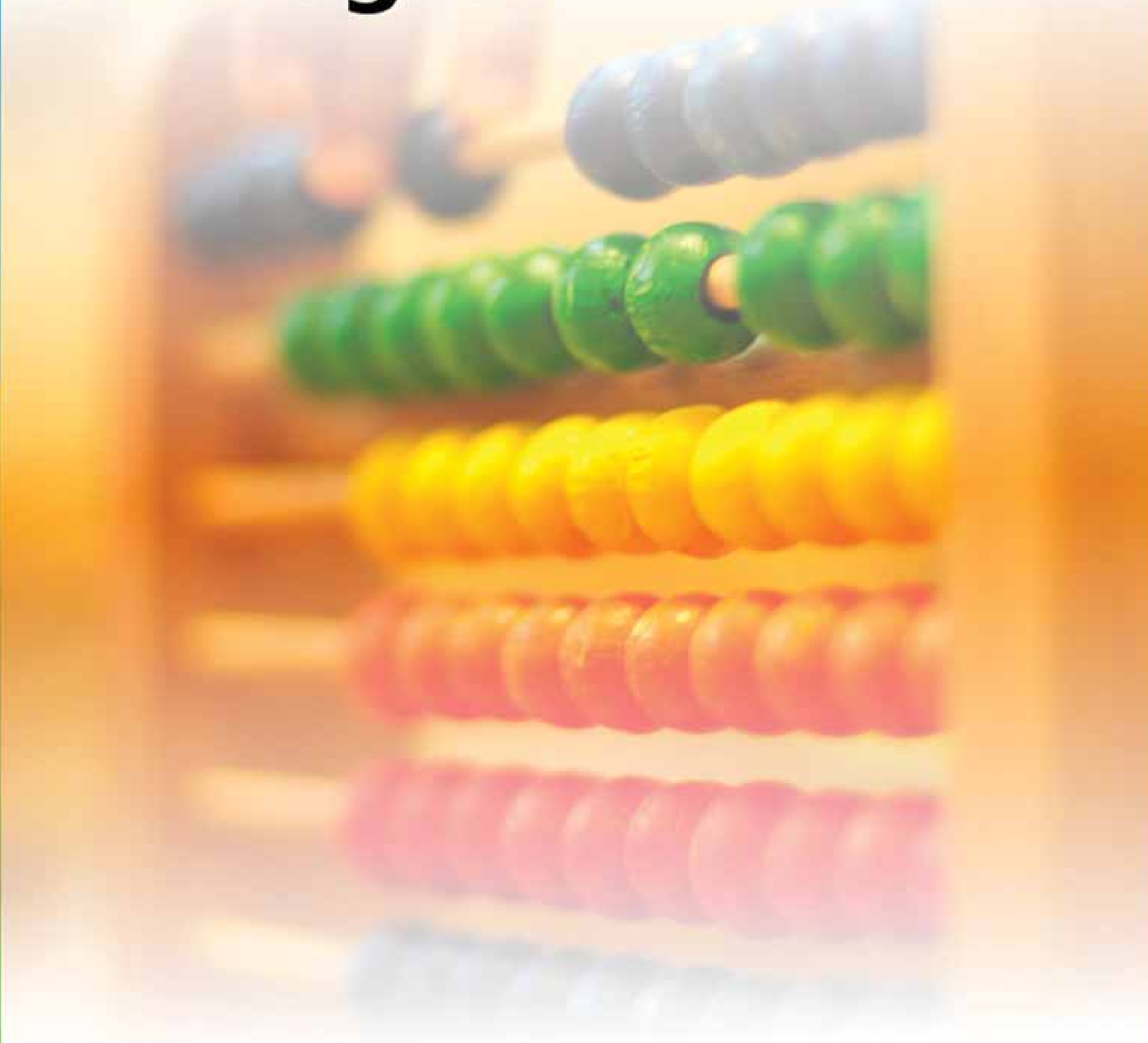
Proyecto LATIn
INICIATIVA LATINOAMERICANA DE LIBROS DE TEXTO ABIERTOS

Cálculo Diferencial e Integral



Autora: Marta Susana Bonacina
Colaboradores:
Claudia Teti
Alejandra Haidar
Santiago Andrés Bortolato
Valeria Philippe
Franco Lisandrini
Marisa Quiroga

TOMO II

(Segunda Edición)

Autora: Marta S. Bonacina

Colaboradores: Claudia M. Teti, Alejandra P. Haidar, Santiago A. Bortolato

Colaboradores 2º Edición: Claudia M. Teti, Alejandra P. Haidar, Santiago A. Bortolato Valeria Philippe, Franco Lisandrini, Marisa Quiroga

Cálculo Diferencial e Integral

1a ed. - Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn), 2014. 492 pag.

Primera Edición: Marzo 2014
Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn)
http://www.proyectolatin.org/

Segunda Edición: Marzo 2018

Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA IIIEuropeAid.

El Proyecto LATIn está conformado por: Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador (ESPOL); Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA), Universidad Católica de San Pablo, Perú (UCSP); Universidade Presbiteriana Mackenzie, Brasil(UPM); Universidad de la República, Uruguay (UdelaR); Universidad Nacional de Rosario, Argentina(UR); Universidad Central de Venezuela, Venezuela (UCV), Universidad Austral de Chile, Chile (UACH), Universidad del Cauca, Colombia (UNICAUCA), Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica (KUL), Universidad de Alcaá, España (UAH), Université Paul Sabatier, Francia (UPS).

Índice general: Tomo II

9 — La Integral

9.1 Introducción

El Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral son las dos áreas básicas de una rama de la matemática que se conoce como Análisis Matemático ó simplemente Cálculo**.**

Tanto el Cálculo Diferencial como el Integral se ocupan de los ***procesos de cambio.***

➲ El Cálculo Diferencial del estudio, cálculo y aplicaciones de las ***razones de cambio***. En particular, de determinar el ***cambio instantáneo*** de una magnitud.

➲ El Cálculo Integral, se ocupa de determinar ***qué cosa cambió y cuanto lo hizo.*** O sea, de determinar:

"el resultado ó efecto total de un proceso de cambio"

Por ejemplo el Cálculo Integral da respuestas a cuestiones tales cómo:

- si un objeto se mueve a una velocidad *variable*, ¿cuál es el *desplazamiento total* del objeto al cabo de t horas?
- si la velocidad a la que entra agua a un tanque es *variable*: ¿cuanto *aumenta el volumen de agua en el tanque* al cabo de t horas?
- si una varilla de metal tiene densidad *variable* (por ej., es más liviana en un extremo que en el otro), ¿cómo calculamos la *masa total* de la varilla?;
- si la tasa de variación de un cultivo de bacterias es *variable*, ¿cuánto *cambia* (*aumenta o disminuye*) *la cantidad de bacterias* al cabo t horas?
- de la Física elemental sabemos calcular el trabajo (W) realizado por una fuerza para mover un cuerpo sobre una recta, cuando la fuerza tiene la dirección del movimiento e intensidad *constante* (F)**:** W = F x desplazamiento; pero, ¿cómo calculamos el trabajo en el caso de una fuerza con intensidad *variable*?
- de la Geometría elemental sabemos calcular el área de rectángulos (R), regiones con altura *constante*: área R = base x altura; pero, ¿cómo hacemos para calcular el área de una región de *altura variable*; por ejemplo, en el caso que el contorno superior del rectángulo no sea recto sino *curvo*?

Si observamos las cuestiones que resuelve la integral, detectamos un rasgo común a todas ellas: que si la función del caso (velocidad, densidad, tasa de variación, intensidad de una fuerza, altura de una figura, etc) es "*constante*", $f(x) = k$ y definida en $I = [a\,;\,b]$, entonces la solución del problema viene dada por el producto: "k" x "*amplitud de* I ". O sea, abordamos aquí un tipo de problema que sabemos resolver si la "*función dato*" es "*constante*" pero cuya resolución desconocemos si tal función es "*variable*".

Observamos también que la problemática que da origen al Cálculo Integral, "*determinación del resultado total de un proceso de cambio*" tiene que ver con situaciones concretas, muchas de las cuales enfrentamos y resolvemos cotidianamente, aun sin tener conciencia de ello. Se ha observado que individuos sin conocimientos de Cálculo enfrentados a problemas de naturaleza "integral", los resuelven procediendo de la misma forma en que se hacia esto históricamente, antes de que se desarrollara y formalizara del Cálculo Integral.

Así, con el objetivo de promover un aprendizaje que permita tanto la cabal comprensión de los conceptos como el acertado y efectivo uso de "la integral", en lo que sigue se proponen las ideas básicas del Cálculo Integral a partir de lo intuitivo y relacionándolas con aplicaciones conocidas. Lograda la familiarización con tales ideas, se procede finalmente a la "formalización" de las mismas.

9.2 Cálculo del "resultado o efecto total del cambio"

Ejemplo:

Proceso: **entrada/salida de líquido** (agua, solución salina, etc.) en un tanque.
Función asociada, **V** = V(t), volumen de líquido *en el tanque* al instante **t .**

Incógnita: ΔV; ***variación de volumen*** en el tanque, en un intervalo de tpo **I = [t***i*** ; t***f***]**

Resolución: como todo problema, esta depende del dato de que se dispone:

❶ ***Dato***: V = *V*(t); **volumen total de líquido en el tanque, al instante t .**
Aquí, el cálculo de **ΔV** remite a una simple resta: **ΔV = V**(t_f) **- V**(t_i).

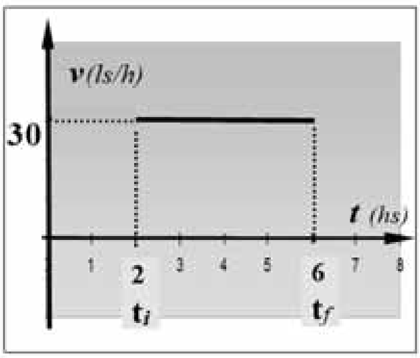
❷ ***Dato***: *v* = *V*´(t); o sea, **velocidad a la que se desarrolla el proceso**.
Este caso remite al **problema tipo** que resuelve el **cálculo integral;** o sea, Al caso en que la obtención de **ΔV** depende de cómo sea **"*v*"**:
*si ***v = cte*** , **ΔV** se calcula a través del simple producto **"*v* × Δt"**; pero,
*si ***v≠ cte***, ***no sabemos (hasta ahora) como proceder*** para obtener **ΔV.**

ⓘ Cuando el investigador se encuentra ante un problema cuya resolución desconoce lo primero que hace es simplificar hipótesis al efecto de transformar el problema en otro análogo cuya resolución conoce (*el "****caso simple****"*). Luego, y a partir de lo observado para el caso simple, idea, propone y prueba un proceso de resolución para el problema original.
ⓘ Con el objeto de resolver el problema del ***cálculo de ΔV***, ***variación de volumen en un Δt conocida la velocidad del proceso (v ≠ cte)***; comenzamos por el ***caso simple*** (***v = cte***).

(A) CASO SIMPLE (*v = cte*).

Cálculo de la *"variación de volumen"* para *"velocidad constante"*.

Problema 1: El gráfico adjunto corresponde al registro de la ***velocidad (v)*** con que entra agua a un tanque durante **4 hs.** y a partir de las **2 hs.** de ***iniciado el proceso***. Se desea conocer la **"*variación de volumen*"** en el tanque en este lapso de tiempo.



****Función del proceso:*** **V=** *V*(t)

V→ vol. de agua en el tanque, al instante **t**

****Incógnita***: ΔV = *variación de vol*. entre las **2** y las **6.**

****Datos:*** *v* = **30** (ls/h) **→*velocidad del proceso = cte* (*)**
Δt= t$_f$ –t$_i$ = 4 (**t$_f$** = **t**final; **t$_i$** = **t**inicial **)**

****Resolución***: por **(*)** $v = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V = v\,.\,\Delta t$

***v* = 30; Δt = 4 ⇒ ΔV= 30.4 = 120**

Rta: entre las **2** y las **6** el volumen de agua en el tanque **"*aumenta*" 120 ls.**

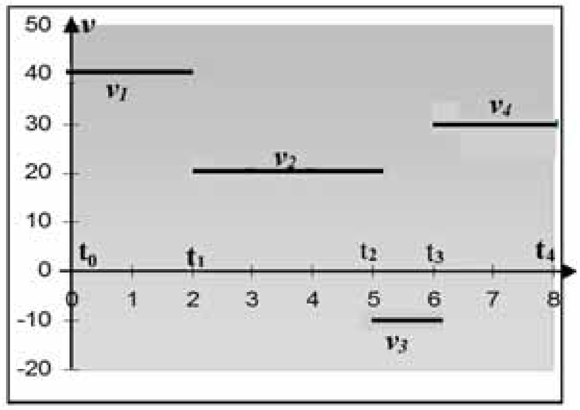
▸ **Conclusión:** *v = cte* ⇒ ΔV = *v* × Δt (*variación de vol.* = *"velocidad"* × *"tiempo"*)

▸ **Observación:** $\Delta V_{[2\,;6\,]} = V(6) - V(2) \Rightarrow V(6) = \Delta V_{[2\,;6]} + V(2) = 120 + V(2)$
Luego, de conocerse **V(2)** (***volumen*** de agua en el tanque a las **2** hs. de iniciado el proceso), se puede calcular **V(6)** (***volumen*** de agua en el tanque a las **6** hs. de iniciado el proceso).

(B) CASO *CUASI* SIMPLE *(*se resuelve en forma simple, aunque no sea el caso simple*).*

Cálculo de la *"variación de volumen"* para *"velocidad constante a tramos"*.

Problema 2 ***:*** El gráfico adjunto corresponde al registro de la ***velocidad* (*v*)** con que durante **8 hs** ***entra*** o ***sale*** agua de un tanque. Al respecto se desea conocer la ***"variación de volumen"*** de agua en el tanque, en ese intervalo de tiempo.



*****Función del proceso*:** **V** = $V(t)$

*****Incógnita***: **ΔV = variación de vol.** en **8** hs.

*****Datos*: *v = v(t)* → *velocidad del proceso***

v = v*$_{\text{graf}}$ → *velocidad ≠ cte

I = [0; 8] → $t_i = 0$; $t_f = 8$

$\Delta t = t_f - t_i = 8$

Observamos y concluimos*:*

→ v_{graf} ***constante "a tramos"***.

→ **4** subintervalos $I_i = [t_{i-1};\ t_i]$, i = ***1,2,3,4*** ; tal que $I_i \subset I$ y $v(t) = v_i$, $\forall\, t \in I_i$

Conclusión 1: en cada I_i estamos en el "caso simple" (***v = cte***); luego, y según la fórmula hallada en **(A)**; en cada I_i **:** $\Delta V_i = v_i \times \Delta t_i$.

Por ejemplo:

- $I_1 = [0; 2]$, $v_1 = 40 \Rightarrow \Delta V_1 = v_1 \times \Delta t_1 \Rightarrow \Delta V_1 = 40 \times 2 = 80$

  La *variación de volumen* (en este caso, ***aumento***) en las **2** primeras horas es de **80 lts.**

- $I_3 = [5; 6]$, $v_3 = -10 \Rightarrow \Delta V_3 = v_3 \times \Delta t_3 \Rightarrow \Delta V_3 = -10 \times 1 = -10$

  La *variación de volumen* (en este caso, ***disminución***) entre la **5ta** y **6ta** hora de iniciado el proceso, es de **30 lts.**

Conclusión 2: ΔV_i indica la ***"variación de volumen"*** en un ***subintervalo*** (→ I_i).
Luego, al ΔV_i lo llamamos ***"variación parcial"***.
Finalmente vemos que para obtener la ***"variación total"***; o sea, la correspondiente a las **8** hs. que dura el proceso, basta ***"sumar"*** las ***"variaciones parciales"*** .

CONCLUSIÓN FINAL para el problema 2:

v = cte a tramos ⇒ la ***variación total*** en **I** es la ***suma*** de las ***variaciones parciales***

$$\Delta V_{[0;8]} = \textit{suma de las "variaciones parciales"}$$

$$\Delta V_{[0;8]} = \sum_{i=1}^{4} v_i \times \Delta t_i$$

$$\Delta V_{[0;8]} = v_1 \times \Delta t_1 + v_2 \times \Delta t_2 + v_3 \times \Delta t_3 + v_4 \times \Delta t_4 .$$

<u>Resolución del Problema 2</u>: cálculo de la ***"variación total"*** de volumen en 8 hs.

tpo(hs)		I_i	Δt_i	v_i	$\Delta V_i\,[t_{i-1}\,;t_i]$ $v_i \times \Delta t_i$ = *variac. parcial*	*VARIACIÓN TOTAL* en $[\mathbf{t_o}\,;\mathbf{t_i}]$
t_0	**0**					------------------------------------
t_1	**2**	[0; 2]	$\Delta t_1 = 2$	**40**	40 x 2 = ***80*** (entran 80 ls)	$\Delta V_{[0;2]}$ = ***80***
t_2	**5**	[2; 5]	$\Delta t_2 = 3$	**20**	20 x 3 = ***60*** (entran 60 ls)	$\Delta V_{[0;5]}$ = 80 **+ *60***
t_3	**6**	[5; 6]	$\Delta t_3 = 1$	**-10**	-10 x 1 = ***-10*** (salen 10 ls)	$\Delta V_{[0;6]}$ = 80 + 60 ***-10***
t_4	**8**	[6; 8]	$\Delta t_4 = 2$	**30**	30 x 2 = ***60*** (entran 60 ls)	$\Delta V_{[0;8]}$ = 80 + 60 – 10 **+ *60 = 190***

Luego, $\Delta V_{[0;8]} = \boldsymbol{190}$; o sea, la ***variación de volumen*** *(o **volumen "acumulado"**)* en el tanque en **8 hs**. es de ***190 ls***.

<u>CONCLUSIÓN FINAL para el CASO B</u> :

Lo observado en el ejemplo puede generalizarse a cualquier proceso de cambio con ***velocidad cte a tramos***; es decir, la ***variación total*** al final del proceso se obtiene de:

1º) ***hacer el producto "v x tiempo" en cada I_i donde v = cte*** (*variación parcial)*

2º) ***sumar las "variaciones parciales"***. (*VARIACIÓN TOTAL*)

O sea, si subdividimos el intervalo genérico $\mathbf{I} = [\mathbf{t}_o\,;\,\mathbf{t}_n]$ en los $\boldsymbol{n}$ subintervalos $\mathbf{I_i} = [\mathbf{t}_{i-1}\,;\,\mathbf{t}_i]$ donde la velocidad permanece constante e igual a v_i ; tenemos que:

$$\Delta V_{[t_o;\,t_n]} = v_1 \times \Delta t_1 + v_2 \times \Delta t_2 + v_3 \times \Delta t_3 + \ldots\ldots + v_n \times \Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} v_i \times \Delta t_i$$

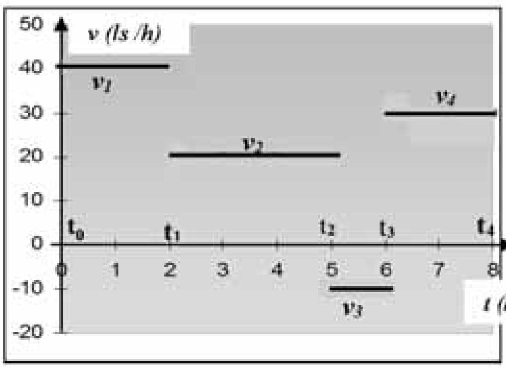
<u>Observación 1</u>: $\Delta V[a\,;b] = V(b) - V(a) \Rightarrow V(b) = \Delta V[a;b] + V(a)$.

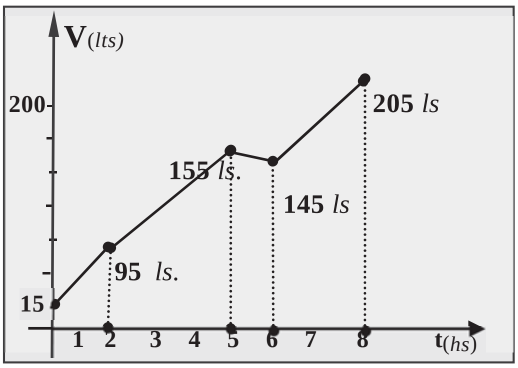
<u>Ejemplo</u>*:* si en el problema **2** se agrega el dato **V(0) = 15,** se puede hallar **V(8).**

$$V(8) = \Delta V_{[0;8]} + V(0) \Rightarrow V(8) = 190 + 15 = 205 \Rightarrow V(8) = 205 \ (ls.)$$

<u>Observación 2</u>: si v es ***<u>cte a tramos</u>*** entonces se puede ***<u>reconstruir</u>*** la función **V** tal que $V' = v$ pues en cada I_i donde v es **cte**, $V = V_i(t)$ con $V_i(t)$ ***<u>función lineal</u>***.

<u>Ejercicio</u>*:* para el problema 2, hallar y graficar **V** tal que $V' = v$.

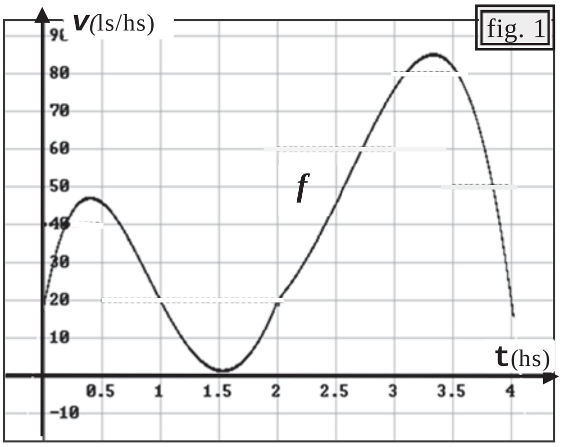




(C) CASO DESCONOCIDO

Cálculo de la *"variación de volumen"* para *"velocidad variable con continuidad"*

En la generalidad de los procesos físicos los cambios no son tan bruscos, a "saltos" como en el ejemplo anterior, sino que se desarrollan en forma continua. Así, lo natural es que si una función ***v* = *f* (*t*)** representa una ***razón de cambio*** o ***velocidad***, entonces ***f*** sea continua. El gráfico continuo adjunto es más representativo de la ***velocidad*** con que varía el volumen de agua dentro del tanque, que uno *escalonado*, como en el ejemplo anterior.



En este caso: ***¿cómo obtenemos* ΔV, *volumen acumulado en 4 hs.?***

> Y este es, en esencia, el problema que resuelve el cálculo integral:
> "***cálculo de la <u>variación total</u> debida a un proceso de cambio cuando la velocidad del mismo varía con continuidad***"

El primer paso para resolver este problema es "simplificarlo":

☞ ***¿Con que fin?***: llevarlo al caso conocido; aquí, al de velocidad constante a tramos.

☞ ***¿Cómo ?***: reemplazando el dato, ***f*** continua en **I = [a;b]** , por una función constante a tramos a la que llamamos **función escalera**: f_{esc} .(**)

☞ ***¿Qué logramos?***: construida la f_{esc} y aplicada a la misma la fórmula hallada en (**B**), logramos una ***aproximación*** del **ΔV** buscado.

(**) **Construcción de la** $f_{esc.}$; ***¿ancho y alto del "escalón(i)" de la "escalera" ?:***

a) *" ancho(i)"* → resulta de dividir **I** (intervalo dato) en ***n*** subintervalos (→ I_i).

b) *"altura(i)"* → resulta de elegir un $c_i \in I_i$, calcular $f(c_i)$ y tomar este valor como altura del ***escalón(i)*** → $altura_{(i)} = f(c_i)$.

Observaciones :

- La división de **I = [a;b]** en subintervalos se hace en ***"forma arbitraria" ;*** es decir, ***"n"*** puede ser cualquier ***"nro natural"***. De hecho, esta división se logra dando ***"n+1"*** puntos arbitrarios de **I** con la sola condición de que se tomen en forma creciente , que el primero y el último coincidan con los extremos de **I**.

  → $t_0 \equiv a < t_1 < t_2 < \ldots\ldots\ldots < t_{n-1} < t_n \equiv b$

  → $I_i = [t_{i-1}; t_i] \Rightarrow ancho_{(i)} = \text{longitud } I_i = \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

- Los c_i también se eligen en ***"forma arbitraria"*** (uno y sólo uno por cada **Ii**).

<u>Calculo de una aproximación de ΔV para *f* de la fig.1</u>

1º) Construimos una f_{esc} (fig. 2)

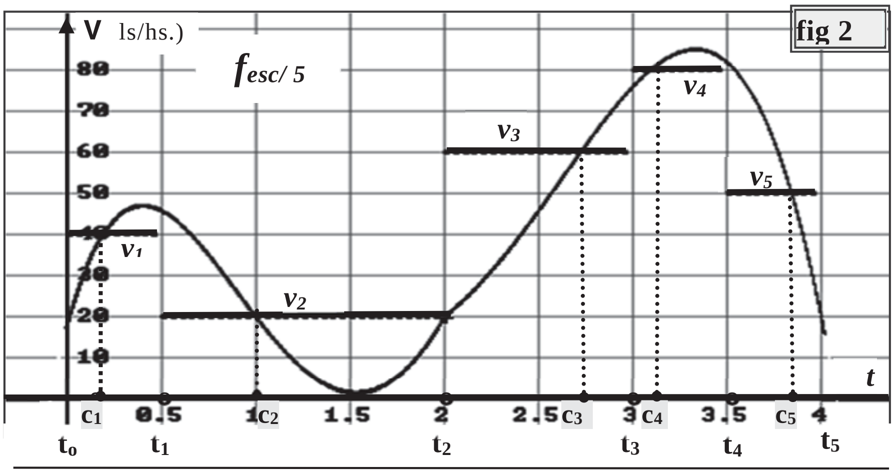
a) *ancho escalón* → dividimos **I** = [0; 4] en **n** subintervalos $I_i = [t_{i-1}; t_i]$

∗**EJ:** $n = 5$ → $\{t_0 \equiv 0 ;\ t_1 = 0.5 ;\ t_2 = 2 ;\ t_3 = 3 ;\ t_4 = 3.5 ;\ t_5 \equiv 4\}$

→ $I_i = [t_{i-1}; t_i]$; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, i = **1, 2, 3, 4, 5 .**

b) ***alto del escalón*** → elegimos un $\mathbf{c}_i$ en $\mathbf{I_i}$, $\mathbf{i} = 1, \dots, 5$;

→ calculamos $f(c_i) = v_i$. Hacemos $v(t) = v_i$; $\forall t \in I_i$.

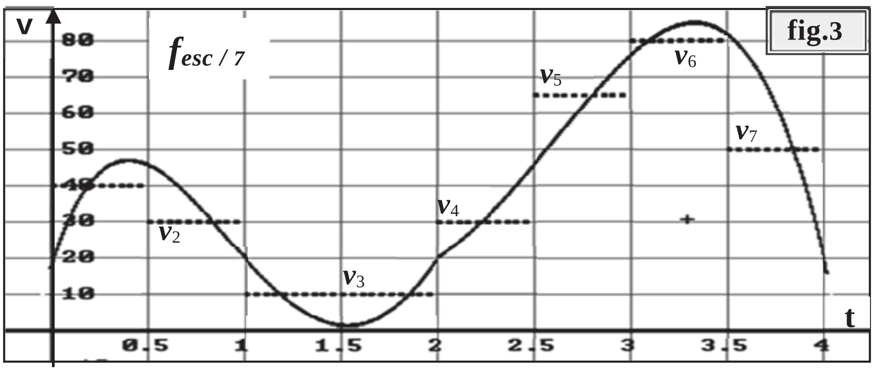


Ej: $c_1 \in I_1 = (0; 0.5)$; $v_1 = f(c_1) = 40$ → $f_{esc.}(t) = 40$; $\forall t \in I_1$ y $\Delta t_1 = 0.5$
$c_2 \in I_2 = (0.5; 2)$; $v_2 = f(c_2) = 20$ → $f_{esc.}(t) = 20$; $\forall t \in I_2$ y $\Delta t_2 = 1.5$
$c_3 \in I_3 = (2; 3)$; $v_3 = f(c_3) = 60$ → $f_{esc.}(t) = 60$; $\forall t \in I_3$ y $\Delta t_3 = 1$
$c_4 \in I_4 = (3; 3.5)$; $v_4 = f(c_4) = 80$ → $f_{esc.}(t) = 80$; $\forall t \in I_4$ y $\Delta t_4 = 0.5$
$c_5 \in I_5 = (3.5; 4)$; $v_5 = f(c_5) = 50$ → $f_{esc.}(t) = 50$; $\forall t \in I_5$ y $\Delta t_5 = 0.5$

2º) <u>Calculamos</u>: $\Delta V(f_{esc}) = \sum_{i=1}^{5} v_i \times \Delta t_i \Rightarrow \Delta V(f_{esc}) = 175$ (verificar)

3º) <u>Concluímos</u>: $\Delta V_{[0;4]} \cong \Delta V(f_{esc}) \Rightarrow \boxed{\Delta V_{[0;4]} \cong 175 \ (lts.)}$.

☞ Para **n =7** obtenemos otra f_{esc} (**fig 3**) cuyos escalones son "menos anchos" , "más finos" que en la (**fig 2**). Vemos que esta f_{esc} se "ajuste mejor" al ***graf f*** .



Calculando $\Delta V(f_{esc})$ para la f_{esc} de la **fig. 3**:

obtenemos: $\Delta V(f_{esc\,/7}) = \sum_{i=1}^{7} v_i \times \Delta t_i \Rightarrow \Delta V(f_{esc\,/7}) = 157,5$ (verificar)

<u>Concluimos</u>: $\Delta V_{[0;4]} \cong \Delta V(f_{esc\,/7}) \Rightarrow \boxed{\Delta V_{[0;4]} \cong 157,5 \ (lts.)}$

☞ El hecho que la f_{esc} correspondiente a **n =7** se "ajuste mejor" al ***graf f*** que la construida con **n = 5** induce a suponer que la aproximación obtenida con **n =7** tiene que ser "mejor" que la correspondiente a **n = 5** ; en otras palabras, que **157, 5** debe estar más próximo al **<u>verdadero valor</u>** de $\Delta V_{[0;4]}$, que **175**.

⌧ Así, el problema de hallar la "***variación total***" cuando la velocidad es ***"continua"*** queda ligado al de las funciones escaleras a través del siguiente interrogante:

> ***¿ podrán construirse funciones escaleras que permitan aproximar cada vez mejor y tanto como se quiera la " variación total " resultado de un proceso que se desarrolla a velocidad $v = f(t)$ con f continua ?***

Antes de investigar esta cuestión, reforzamos algunos conceptos e ideas:

Definición 1: llamamos ***función escalera*** a cualquier función ***constante a tramos***.

Reflexión:

Existen infinitas formas de construir funciones escalera (basta cambiar ancho y alto del "escalón"). En definitiva, existen infinitas formas de aproximar el resultado buscado. Así, el problema que se presenta ahora es determinar el "carácter" de estas aproximaciones, si realmente mejoran al afinar el ancho de los escalones; y, si lo hacen, ir por más, tratar de establecer que "comportamiento" tienen los sucesivos valores que se van obteniendo. Particularmente, determinar si tienen un "comportamiento definido", se acercan tanto como se quiera a un "único número". (en otras palabras, determinar que pasa con el límite de estas aproximaciones cuando el "ancho de los escalones" tiende a cero).

Definición 2: ***región escalonada***

Dada una función escalera, llamamos ***región escalonada*** a la región **R** que resulta de unir los rectángulos determinados por la ***graf. f*** y el ***eje x.***

Ejemplo: (f_{esc} fig. 4 = f_{esc} fig. 2)

Sea f definida por la gráfica de la fig 4.

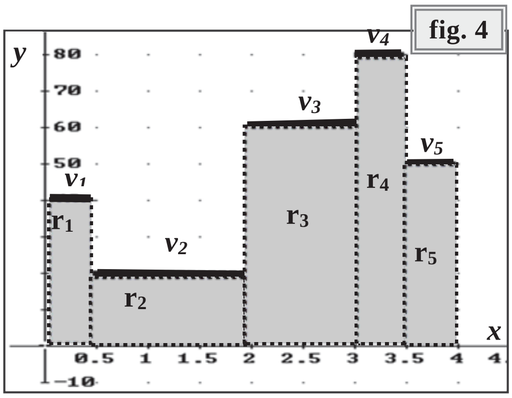
Luego: $\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^{5} \mathbf{r_i} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2 \cup \mathbf{r}_3 \cup \mathbf{r}_4 \cup \mathbf{r}_5$

Curiosidad: **¿área de R ??**

$$\textbf{área R} = \sum_{i=1}^{5} \textbf{área } \mathbf{r_i} = \mathbf{175} \text{ (verificar)}$$

¿***Casualidad?:*** $\Delta V(f_{esc}$ fig. 2 $)$ **= 175**

fig. 4



9.3 El problema y su contexto

9.3.1 Relación entre el cálculo de la "variación total" y el cálculo de "áreas"

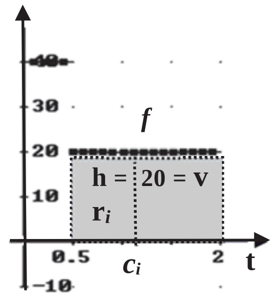
En el párrafo 2 para aproximar **ΔV** usamos una f_{esc} (fig.2), luego vimos que tal función define una región escalonada (**R**-fig.4). Calculada el **área de R** observamos que aun cuando ambos problemas son de naturaleza muy distinta (uno físico, el otro geométrico), se resuelven a través del mismo **"proceso de cálculo".**

Área de r:

En cada $\mathbf{I}_i$ donde f es cte.

$\mathbf{h}$ (alt.) = $f(c_i)$ (= 20)

$\mathbf{b}$ (base) = Δt_i (= 1.5)



Variación de volumen:

En cada $\mathbf{I}_i$ donde f es cte:

$\mathbf{v}$ (vel. en $\mathbf{I}_i$) = $f(c_i)$ (= 20)

(tpo de proceso) = Δt_i (= 1.5)

área $\mathbf{r}_i = \mathbf{h} \times \Delta t_i = 30$

área $\mathbf{r}_i = f(c_i) \times \Delta t_i$

$\Delta V_{[\,I_i\,]} = \mathbf{v} \times \Delta t_i = 30$

$\Delta V_{[\,I_i\,]} = f(c_i) \times \Delta t_i$

$$\boxed{\text{área } r_i = f(c_i) \times \Delta t_i = \Delta V_{[\,I_i\,]}}$$

Ídem: si f representa la intensidad de una fuerza aplicada sobre un cuerpo, entonces:

$$\boxed{\text{área } r_i = f(c_i) \times \Delta t_i = W_{[\,I_i\,]} \quad (\rightarrow \text{trabajo en } I_i)}$$

Conclusión: superficie del rectángulo (**h =** cte), variación de volumen para **v =** cte. y trabajo para f = cte. , se **calculan** de la misma forma.

Nota: por uso y costumbre es habitual referirse a estos resultados con expresiones como:

> ***≺ la variación de volumen en [a; b] es "igual" al área bajo la graf f ≻ ; ó,***
> ***≺ el trabajo realizado por f en [a; b] es "igual" al área bajo la graf f ≻***

Cabe observar que en estas oraciones el término "*igual*" está usado en "*sentido amplio*"; que esto, de no tenerse en cuenta, puede generar equívocos, puede llevar a "confundir" el "concepto" (por ejemplo: *trabajo*) con su "forma de cálculo". Hacemos algunas reflexiones al respecto.

- Lo correcto en un problema en el que intervienen magnitudes es que la **respuesta** incluya **"medida" y "unidad"**. Así, en el caso de la variación de volumen, el trabajo para f constante o la superficie del rectángulo, las **respuestas** son **30 ls, 30 joule** o **30 cm²** (por ej.); las cuales, y claramente, no son "iguales" (**30 ls.** de agua no es "lo mismo" que **30 cm²** de tela). Lo que se quiere remarcar aquí es que el hecho de que la **medida** de dos "cosas" se calcule de igual forma no hace a la "esencia" de estas cosas; esto es, **no implica** que sean **la misma cosa**.

- Entonces: ¿por qué el uso de estas expresiones?. Porque cuando una comunidad de trabajo hace suyo un concepto, lo **asimila**[1], todos en ella entienden de que se habla aun cuando no se lo haga con precisión. Así, se aceptan ciertos *deslizamientos* del lenguaje ya que los mismos alivianan la comunicación sin grandes riesgos en cuanto a que se desvirtúe su esencia.

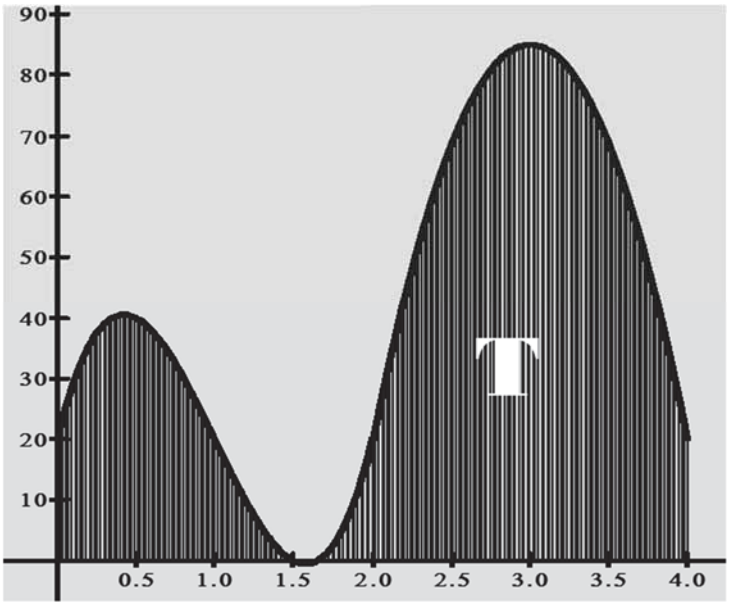
---

[1] **Asimilar**: comprender lo que se aprende, incorporarlo en forma efectiva y significativa a los conocimientos previos. Así, y por ejemplo, haber asimilado el concepto de "trabajo" permite interpretar correctamente la expresión "el trabajo realizado por **f** es **igual** al área bajo la **graf. f** " ; entender que lo que la misma dice es que aun cuando "trabajo" y "área de una figura" no son la misma "cosa", tienen **algo**, **una parte de si**, **donde se reconocen iguales**. En este caso, este **algo** donde se reconocen **iguales** es el **proceso matemático** por el cual se **calcula su medida** .

9.3.2 Resolución de Problemas y "pasaje de contexto"

Dada la función ***f (positiva)*** de la fig.1, la ***graf f*** determina con el ***eje x*** una región (T).

El contorno superior de esta región es ***"curvo"***; y esto plantea un problema para el cálculo del **área T**. (problema que, como dijimos en la introducción, es del "tipo" de los que resuelve la integral).



Lo antes visto indica que el *proceso* a seguir para hallar valores *aproximados* del **área T** es el mismo que el requerido para hallar valores *aproximados* de la **variación de volumen** en un tanque donde entra o sale agua a una velocidad $\boldsymbol{v = f}(t)$.

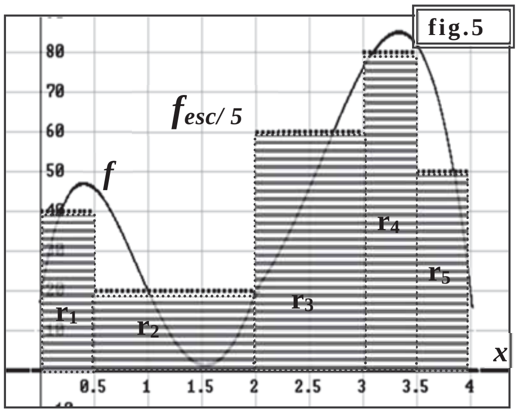
Ejemplos: aproximamos f por distintas funciones escaleras y concluimos:

a) Dada **R**, región escalonada de la fig.5 correspondiente a la $f_{esc/\,5}$; tenemos:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{\mathbf{i}=1}^{5} \mathbf{r_i} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2 \cup \mathbf{r}_3 \cup \mathbf{r}_4 \cup \mathbf{r}_5$$

$$\mathbf{a(R)} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{5} \mathbf{a(r_i)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{5} \mathbf{h_i \times \Delta t_i = 175}$$

$$\mathbf{a(R) \approx a(T) \quad \Rightarrow \quad a(T) \approx 175} \ .$$

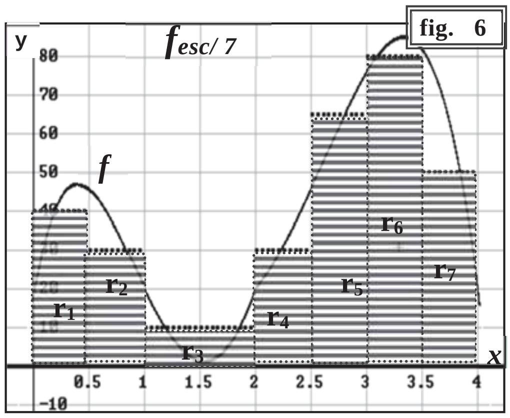


b) Dada **R**, región escalonada de la fig.6 correspondiente a la $f_{esc/\,7}$; tenemos:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{7} \mathbf{r}_{\mathrm{i}} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2 \cup \mathbf{r}_3 \ \ldots\ldots \cup \mathbf{r}_7$$

$$\mathbf{a\,(R)} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{7} \mathbf{a(r_i)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{7} \mathbf{h_i \times \Delta t_i = 157,\,5}$$

$$\mathbf{a(R) \approx a(T) \quad \Rightarrow \quad a(T) \approx 157{,}5} \ .$$



Observación 1: de los gráficos podemos "***ver***" que la región escalonada **R** formada por la función escalera más "***fina***" ($f_{esc/7}$) brinda una mejor aproximación del **área T** que la de la región **R** de escalones más "***anchos***" (la determinada por $f_{esc/5}$).
Estos ejemplos muestran como trabajar en el contexto geométrico permite ***visualizar*** mejor el ***carácter*** de las ***distintas aproximaciones***. En particular, ***ver*** que es factible construir funciones escaleras cuyo comportamiento sea el conveniente al objetivo propuesto**; o sea, que permitan acercarnos más y más, al "área T" (incógnita)**.

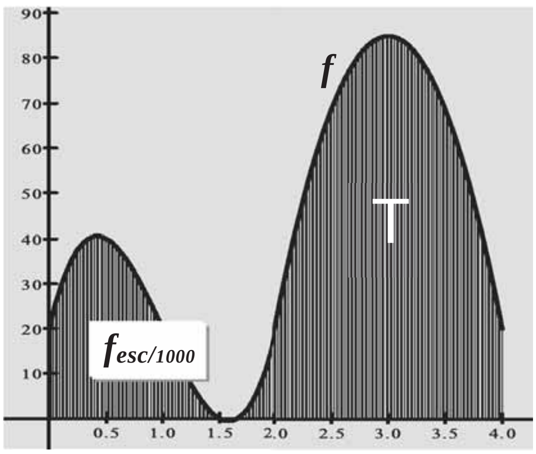
Observación 2: el hecho observado tiene una aplicación práctica al momento de resolver problemas que aun cuando de distinta naturaleza al del "cálculo del área" basan su resolución en el mismo proceso matemático que este último. Entre ellos y como vimos: el cálculo de la "variación total" debida a un proceso cuya velocidad describe la curva, del "trabajo" requerido para mover un cuerpo por una fuerza cuya intensidad describe la curva, etc. En particular este hecho habilita una muy poderosa herramienta de la Matemática: "el pasaje del problema del contexto original a otro contexto donde la resolución se facilita". En el caso que nos ocupa, **"**el pasaje del problema del contexto original al contexto geométrico" (donde, y según mostramos, la "visualización" del problema facilita su resolución).

Cabe aclarar que para un proceso de cambio relativo a un fenómeno físico *la interpretación del resultado* ***depende** de la **f** del caso*; no es la misma si ***f*** indica una *velocidad* de disolución que si indica la *velocidad* de un móvil.
Por ejemplo:
→ Si $v = x'$ es la velocidad (*constante*) de un móvil en una trayectoria rectilínea, entonces área **r** = *altura* x *base* ↔ *velocidad* x $\Delta t = \Delta x$ **(= desplazamiento** del móvil en ese **Δt)**
→ Si $v = m'$ es la velocidad (*constante*) de disolución de un soluto (***m***) en un solvente; entonces área **r** = *altura* x *base* ↔ *velocidad* x $\Delta t = \Delta m$ (= **masa disuelta** en ese **Δt)**.

Observación 3: concluimos así que resuelto el problema del área para una región de contorno curvo, automáticamente tenemos resuelto cualquier otro problema relativo a razones de cambio variables. Luego, y en razón de esto, nos abocamos al problema del ***"cálculo del área de regiones planas con contornos curvos"*** ; hacemos esto teniendo en cuenta lo que podríamos llamar la idea fuerza del Cálculo Integral:

" el área de la región debajo de una curva C gráfica de una función , se puede aproximar por rectángulos cada vez más delgados y esta aproximación se puede hacer tan exacta como se quiera".

☞El importante avance tecnológico habido en las últimas décadas permite hoy día calcular rápida y efectivamente aproximaciones del verdadero valor del área de la región bajo la curva; "mejorar" estas aproximaciones con sólo tomar **"n"** cada vez más grandes.
Así, y por ej., acudiendo a un utilitario podemos proponer una función escalera con **1000** "escalones" **(**tomando **n =1000),** la que, como "*vemos*" permite obtener una muy buena aproximación del área **T.**
(al graficar la función escalera con el utilitario, podemos "*ver*" que la misma prácticamente se confunde con la gráfica de ***f***).



$$\textbf{área T} \cong \mathbf{a(R)}_{(n = 1000)}$$

$$\textbf{área T} \cong \sum_{i=1}^{1000} v_i \times \Delta t_i = \mathbf{162{,}133}$$

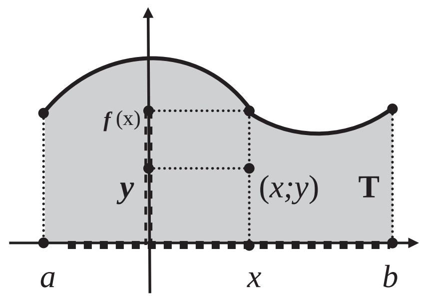
9.4 Área de Regiones Planas

Comenzamos a trabajar a partir de la región de contornos curvos más sencilla que encontramos; o sea, a partir de una región particular a la que damos el nombre de "*trapezoide*". Luego, y a partir de los resultados hallados en el caso particular, resolvemos el caso general.

TRAPEZOIDE:

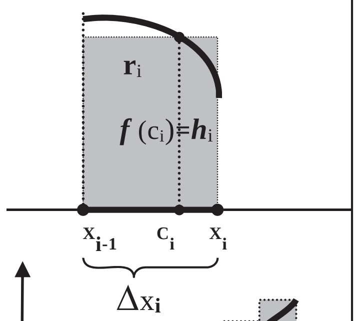
Dada $f : [a; b] \to R$; f **definida positiva**,
llamamos trapezoide **T** a la figura plana limitada por,
la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$.

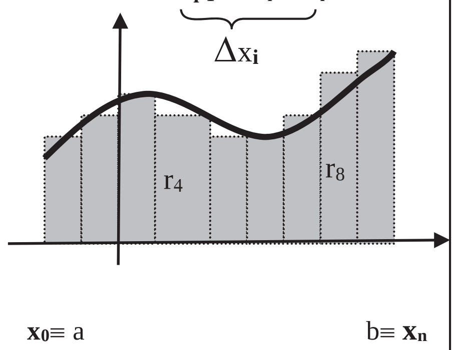
$$\boxed{\mathbf{T} = \{(x,y) \ / \ a \le x \le b \ ; \ 0 \le y \le f(x)\}}$$



Históricamente, es Arquímedes quien desarrolla un método para el cálculo del área de regiones con contornos curvos, el conocido como "*método de exhausción*". El mismo consiste, en esencia, en sustituir la curva original por funciones escaleras "*especiales*".
En la explicación de este método usaremos las siguientes notaciones:

$\mathbf{n}$	$\to$ número de subdivisiones del intervalo $\mathbf{I} = [a\ ;\ b]$
x_i	$\to$ punto de *subdivisión* del intervalo **I** .
P	$\to$ partición de $\mathbf{I} = \{x_0 \equiv a;\ x_1;\ x_2;\ x_3; \ldots;\ x_i; \ldots;\ x_n \equiv b\}$
$\mathbf{I_i}$	$\to$ subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	$\to$ amplitud del subintervalo $\mathbf{I_i}$
$\mathbf{c_i}$	$\to$ punto del subintervalo $\mathbf{I_i}$
$f(c_i)$	$\to$ h_i: altura del **rectángulo** $\mathbf{r}_i$
$f(c_i).\Delta x_i$	$\to$ **área de** $\mathbf{r_i}$
$\mathbf{m_i}$	$\to$ ***mínimo*** de f en $\mathbf{I_i}$
$\mathbf{M_i}$	$\to$ ***máximo*** de f en $\mathbf{I_i}$
$\mathbf{r} = \bigcup_{i=1}^{n} r_i$	$\to$ **región escalonada**
$a(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} a(r_i)$	$\to$ **área de r**





Área de un trapezoide definido por una f positiva y continua en su I.

Dado **T,** definido por f en $\mathbf{I} = [a; b]$, hallar el área de **T** por el método de exhausción requiere:
(*ver ejemplo en el APENDICE)*

1er paso) Dar una *equipartición* (partición de **I** en n subintervalos de igual amplitud)

$$\Delta \mathbf{x}_i = \frac{b-a}{n} \ ; \ \forall \mathbf{i}$$

2do paso) Construir dos funciones escaleras "*especiales*" :

a) $f_{esc\ inf.}$ $\to$ toda por debajo del ***graf f*** ($h_i = m_i = \text{mín. } f \text{ en } \mathbf{I}_i$)

b) $f_{esc\ sup.}$ $\to$ toda por arriba del ***graf f*** ($h_i = M_i = \text{Max. } f \text{ en } \mathbf{I}_i$).

3er paso) Obtener las dos regiones escalonadas definidas por $f_{esc\ inf.}$ y $f_{esc\ sup.}$,

a) $\mathbf{r}_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} r_i$ $\to$ *región escalonada inferior.* $\to$ $\mathbf{r}_{[n]} \subseteq \mathbf{T}$

b) $\mathbf{R}_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ → *región escalonada superior.* → $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{R}_{[n]}$

4to paso) Repetir los pasos anteriores para distintos valores de n y con $n \to +\infty$; generar dos *sucesiones* de regiones escalonadas, $\mathbf{r}_{[n]}$ y $\mathbf{R}_{[n]}$; tales que:

$$r[n] \subseteq \quad T \quad \subseteq R[n] \;;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$$

luego, si **T** fuera *medible*, por propiedades geométricas:

$$\textit{área } \mathbf{r}_{[n]} \le a(T) \le \textit{área } \mathbf{R}_{[n]} \;; \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

n	$\mathbf{r}_{[n]}$ → a_n = *área* $\mathbf{r}_{[n]}$ ≤	$a(T)$	≤ A_n = *área* $\mathbf{R}_{[n]}$ ← $\mathbf{R}_{[n]}$
2	$\mathbf{r}_{[2]} = r_1 \cup r_2$ → a_2 = *área* $\mathbf{r}_{[2]}$	$\vdots$	A_2 = *área* $\mathbf{R}_{[2]}$ ← $\mathbf{R}_{[2]} = R_1 \cup R_2$
3	$\mathbf{r}_{[3]} = \bigcup_{i=1}^{3} r_i$ → a_3 = *área* $\mathbf{r}_{[3]}$	$\vdots$	A_3 = *área* $\mathbf{R}_{[3]}$ ← $\mathbf{R}_{[3]} = \bigcup_{i=1}^{3} R_i$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

5to paso) Analizar el comportamiento de la sucesión de valores formadas,

a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6 ; a_7 ;………, a_n ,……(sucesión creciente, acotada superiormente).

A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_5 ; A_6 ; A_7 ……, A_n , ….. (sucesión decreciente, acotada inferiormente).

Calcular el límite para $n \to \infty$ de ambas sucesiones (los cuales existen según un resultado básico del Cálculo): $a_n \to L_1$ para $n \to \infty$; $A_n \to L_2$ para $n \to \infty$.

6to paso) <u>**CONCLUIR**</u>

si $L_1 = L_2 = L$	$\Rightarrow$	*T es medible*	*y* $a(T) = L$
si $L_1 \neq L_2$	$\Rightarrow$	*T no es medible ,*	*no existe* $a(T)$

<u>Notas</u>:

☒ Muy pocas veces el método de exhausción puede aplicarse hasta el último paso y hallar el valor exacto del área. En el ejemplo del apéndice (**T** trapezoide determinado por $f(x) = x^2$ en [0;1]) el método puede ser aplicado con éxito debido a las características de f.

Lo que en este caso posibilita la ejecución del método hasta el final es que:

- $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente en **I** = [0;1]. Esto facilita el **cálculo** del área de las regiones escalonadas (inf. y sup.) pues *máximo y mínimo absoluto* de f en $\mathbf{I}_i$ se producen, respectivamente, en el extremo superior e inferior de $\mathbf{I}_i = [x_{i-1}; x_i]$. Particularmente, esto permite "generalizar" el cálculo de dichas áreas:

$$a_n = \textit{área } r_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3 .(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2);$$

$$A_n = \textit{área } R_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3 .(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2).$$

- por otro lado, como se conoce una fórmula para ***"la suma de los cuadrados de los k primeros números naturales***":

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} ;$$

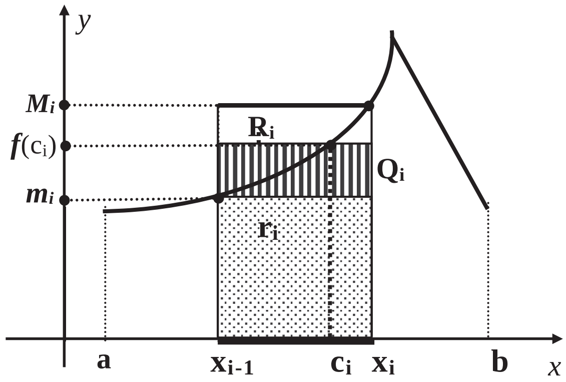
esto permite reducir la expresión generalizada de las áreas a una fórmula a la que se puede *calcular el límite*; obtener así, y finalmente, el valor del área buscada.

⌦ Los factores que posibilitan la aplicación del método de exhausción en el ejemplo son muy específicos y propios de la función del ejemplo; luego, es fácil ver que el método de exhausción no resulta aplicable en general.

<u>Método alternativo para el cálculo del área de un trapezoide definido por una función continúa (y positiva)</u>

La región **T** cuya área se quiere calcular se aproxima por una **región escalonada Q** en la que los subrectángulos $\mathbf{Q}_i$ tienen su altura igual al valor de la función en un punto ***cualquiera*** del subintervalo $\mathbf{I_i}$; o sea, tal que $h_i = f(c_i)$ con $c_i \in \mathbf{I_i}$.

Luego, $\mathbf{Q} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{Q_i} \Rightarrow$ área **Q** $\cong$ área **T .**



Por otro lado f continua en I_i implica:

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i \quad ; \ \forall\, i$$

$$m_i \Delta x_i \leq f(c_i)\, \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i \quad ; \ \forall\, i$$

$$\mathbf{a(r_i)} \leq \mathbf{a(Q_i)} \leq \mathbf{a(R_i)} \quad ; \ \forall\, i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a(r_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a(R_i)$$

$$\textbf{\textit{área}}\ \mathbf{r}_{[n]} \leq \textbf{\textit{área}}\ \mathbf{Q}_{[n]} \leq \textbf{\textit{área}}\ \mathbf{R}_{[n]} \quad ; \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}.$$

y tenemos entonces que la sucesión originada por ***área*** $\mathbf{Q}_{[n]}$ queda "*encajada*" entre las originadas por ***área*** $\mathbf{r}_{[n]}$ y ***área*** $\mathbf{R}_{[n]}$. Concluimos así que el comportamiento de $\boldsymbol{a}\mathbf{Q}_{[n]}$ para $n \to \infty$ depende del comportamiento de ***área*** $\mathbf{r}_{[n]}$ y ***área*** $\mathbf{R}_{[n]}$ para $n \to \infty$; sucesiones que, según vimos, tienen límite para $n \to \infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a\, r_{[n]} = \mathbf{L_1} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a\, R_{[n]} = \mathbf{L_2} \end{array}\right\}$$

si $L_1 = L_2 = L \Rightarrow$ *T es medible y* $a(T) = L$
si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ *T no es medible, no existe* $a(T)$

Por otro lado: $\quad * \quad L_1 = L_2 = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a\, Q_{[n]} = L$

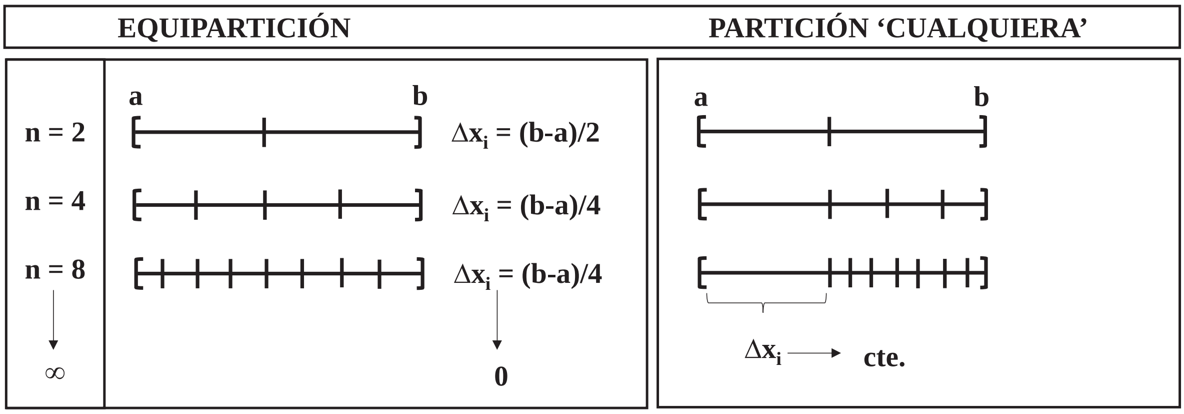
Concluimos así que: $\quad \mathbf{L_1 = L_2 = L} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a\, Q_{[n]} = a(T)$

El método puede generalizarse más aún ya que en este caso no es necesario tomar "equiparticiones". En tal caso debemos cuidar el planteo del límite.

- En el caso de una "equipartición", $\mathbf{\Delta x}_i = \dfrac{\mathbf{b-a}}{\mathbf{n}}$, y se tiene que:

  $* \ \mathbf{n} \to \infty \Rightarrow \Delta \mathbf{x_i} \to 0; \quad \forall\ \mathbf{i}$

- Para una partición "cualquiera": $\ * \ \mathbf{n} \to \infty$ ***no implica*** $\Delta\, \mathbf{x_i} \to 0; \quad \forall\, \mathbf{i}$.



Luego, para particiones cualesquiera, hacerlas cada vez más ***´finas´*** requiere pedir que los $\Delta x_i \rightarrow 0, \forall i$; equivalentemente, que para $n \rightarrow \infty$ el $\max\limits_{i=1,2,\dots,n} \Delta x_i \rightarrow 0$

Estamos así en condiciones de definir **“área de un trapezoide”**

DEFINICIÓN:

Si existe **L,** resultado del proceso de aproximación por regiones escalonadas, decimos que **T** es medible y **L** su medida.
A **L** lo llamamos ***área del trapezoide*** e indicamos ***a* (T)** .

O sea, $\boxed{a\,(T) = \lim\limits_{\max \Delta xi \to 0} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \right]}$

RESUMEN: área de un trapezoide T para *f* definida positiva en I = [a ; b]

<u>**Proceso de búsqueda y/o aproximación del**</u> ***a* (T):**

1) Damos una partición de “***n*+1 *puntos cualesquiera***” del intervalo **I.**

Determinamos ***n*** subintervalos I_i, de amplitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Seleccionamos un c_i en cada subintervalo I_i.

Construimos $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$; con Q_i rectángulos de altura $f(c_i)$ y base Δx_i .

2) Calculamos las aproximaciones parciales (***áreas parciales***):

$$a\,(Q_i) = f\,(c_i) \times \Delta x_i$$

3) Calculamos la aproximación total (***suma de las áreas parciales***):

$$a\,Q_{[n]} = \sum_{i=1}^{n} a\,(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} f\,(c_i) \times \Delta x_i$$

4) Estudiamos el comportamiento de las aproximaciones obtenidas ($\sum f\,(c_i) \times \Delta x_i$).

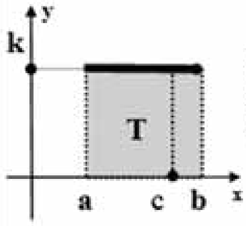
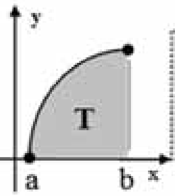
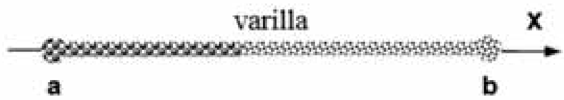
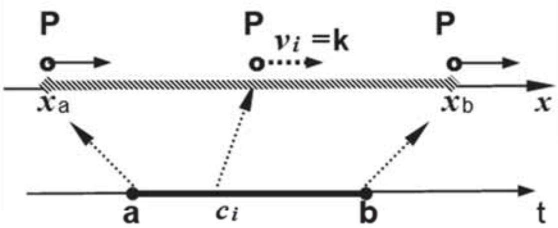
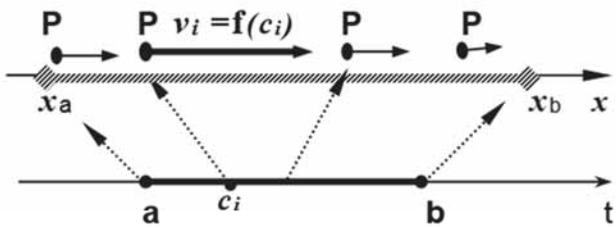
Si existe un número ***L*** al que las sumas se acercan tanto como se quiera cuando el máx $\Delta x_i \rightarrow 0$ y para todas las elecciones posibles de los c_i ,
decimos que,

- $\lim\limits_{\max \Delta xi \to 0} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} f\,(c_i) \times \Delta x_i \right] = L$ (***L*** puede existir o no existir)

- ***área*** **(T) =** ***L***

9.5 Problemas relativos a razones de cambio “variables”

Resuelto el problema del cálculo de áreas de figuras con contornos curvos, queda resuelto el problema del cálculo de la “variación total” de algo que “cambia” a velocidad “variable”. Quedan resueltos también otros importantes problemas como por ejemplo: trabajo realizado por una fuerza “variable”. Una aclaración: en este capítulo y en el próximo, cuando hablemos de fuerza o velocidad, nos referiremos a la intensidad de las mismas, o sea, las trabajaremos como magnitudes escalares. Resumiendo:

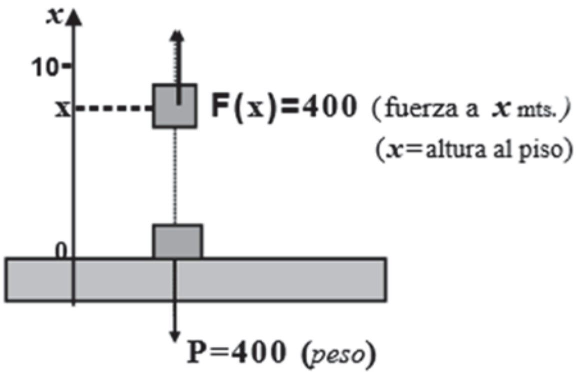
EXPERIENCIA PREVIA	CONFLICTO
1- ÁREA RECTÁNGULO	**→ AREA TRAPEZOIDE**
$f:[a;b]\to R \ / \ f(x)=k$ (positivo)	$f:[a;b]\to R \ / \ f(x)\neq k;\ f(x)>0\ \forall x$ ($f\to$ altura variable del trapezoide T)
	
$a(T) = k.(b-a)$	$a(T) = \lim\limits_{\max \Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\times \Delta x_i$
2- M, masa de una varilla δ= cte	**→ δ ≠ cte [δ = densidad lineal]**
	
$\delta = \delta(x)$ con $\delta(x) = k \Rightarrow$	$\delta = \delta(x)$ con $\delta(x) \neq k \Rightarrow$
$M_{[a;b]} = k.(b-a)$	$M_{[a;b]} = \lim\limits_{\max \Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} \delta(c_i)\times \Delta x_i$
(masa = densidad x longitud)	
3. DESPLAZAMIENTO [Δx]: v=cte (*movimiento rectilíneo*)	**→ v ≠ cte** (v = *velocidad*)
	
$v = v(t)$ con $v(t) = k \Rightarrow$	$v = v(t)$ con $v(t) \neq k \Rightarrow$
$\Delta x = k.(b-a)$	$\Delta x = \lim\limits_{\max \Delta t_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\times \Delta t_i$
(desplazamiento = velocidad x tiempo)	

4. Trabajo **W** efectuado por una fuerza F / F: [a; b] → R

EXPERIENCIA PREVIA

$F = k$ (*fuerza constante*)

➢ Hallar el trabajo **"W"** requerido para levantar una bolsa de arena de **400** kg, una altura de **10** m.



$F: [0; 10] \to R$

$\quad x \to F(x) = 400$ (*fuerza cte*)

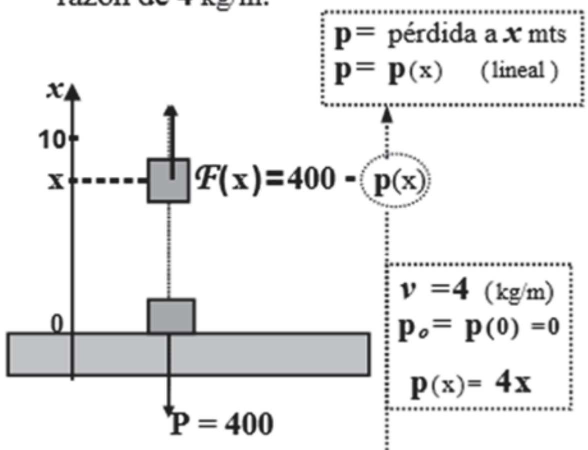
➢ $W^*_{[0;\,10]} = 400 \times 10 = 4000$

$W^*_{[0;\,d]} = F \times d$ (*d = desplazamiento*)

CONFLICTO

$F \neq k$

➢ Idem, si la bolsa "pierde arena" a razón de **4** kg/m.



$\mathcal{F}: [0;10] \to R$

$\quad x \to \mathcal{F}(x) = 400 - 4x$ (*ff variable*)

➢ $W_{[0;\,10]} =$ ¿¿…??

$$W_{[0;10]} = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}(c_i) \times \Delta x_i$$

- *"partimos"* el $[0;10]$ en subintervalos $I_i = [x_{i-1};\, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- *tomamos* $c_i \in I_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$
- *hacemos* $F(x) = F(c_i) = k_i,\ \forall x \in I_i$; obtenemos *"aproxs parciales"* del trabajo requerido en el I_i → $W^*_{[I_i]} = F(c_i) \times \Delta x_i = k_i \times \Delta x_i$
- *sumamos las "aproxs parciales"* obtenemos la "*__aprox. total__*"

$$W_{[0;10]} \approx \sum_{i=1}^{n} W^*_{[I_i]} = \sum_{i=1}^{n} F(c_i) \times \Delta x_i$$

__Ejemplos:__ $n = 1 \to I = [0;\,10]$; $c \in I$, $F(c) = k \Rightarrow W_{[I]} \approx W^*_{[I]} = k \times 10$

↳ $c = 3.5$; $F(3.5) = 386 = k \xrightarrow{k=386;\ d=10} W^*_{[0;10]} = 3860 \approx W_{[0;10]}$ (F no cte)

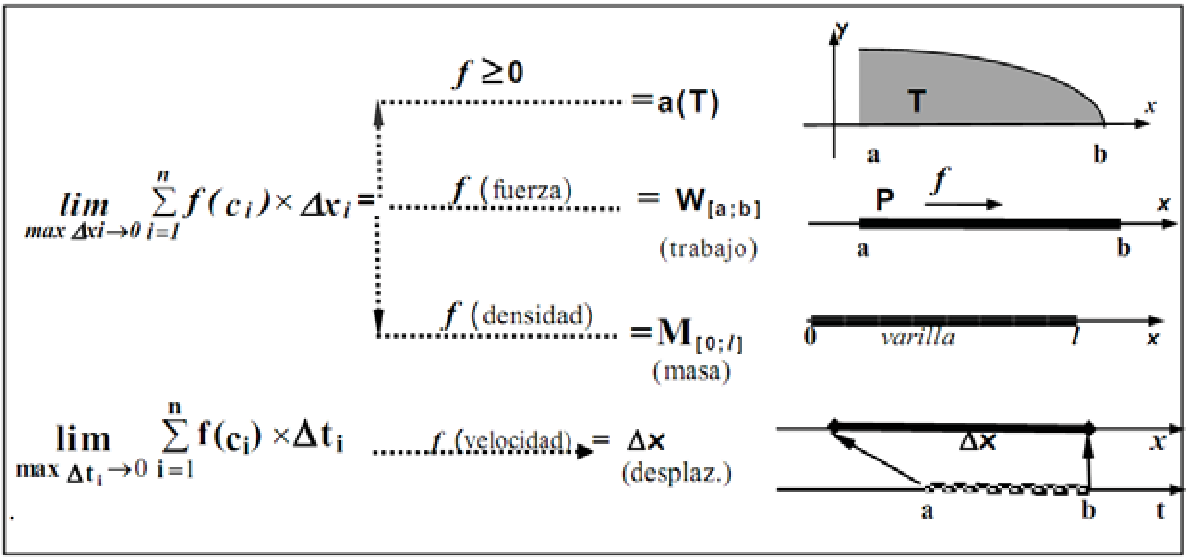
↳ $c = 0$; $F(0) = 400 = F_{Max} \xrightarrow{k_{Max}=400;\ d=10} W^*_{[0;10]} = 4000 \geq W_{[0;10]}$ (F no cte)

↳ $c = 10 \to F(10) = 360 = F_{min} \xrightarrow{k_{min}=360;\ d=10} W^*_{[0;10]} = 3600 \leq W_{[0;10]}$ (F no cte)

__Observación:__ $3600 \leq W_{[0;10]} \leq 4000$

En este caso podemos dar cota superior e inferior del valor buscado; o sea, un intervalo donde con seguridad se halla el **"verdadero valor"** de $W_{[0;10]}$. Y esto no es poco cuando no se conoce (o es muy complicada) la expresión matemática que permite calcular dicho valor.

<u>Conclusión</u>: la interpretación del resultado de un proceso de "aproximación por sumas" depende del carácter de la función que se somete a dicho proceso. Así:



¿Resolvemos el problema del trabajo realizado por una fuerza no constante?

…trabajo para levantar una bolsa de arena de **400** kg una altura de **10** m; si pierde arena a razón de **4** kg/m.
Según lo visto:

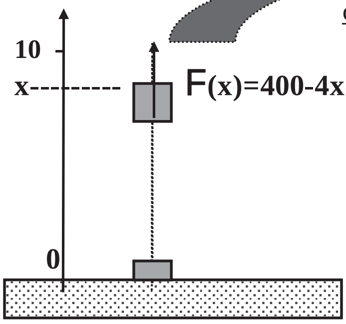
$\mathbf{W}_{[0;10]} = \lim\limits_{max\ \Delta xi \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(c_i) \times \Delta x_i$

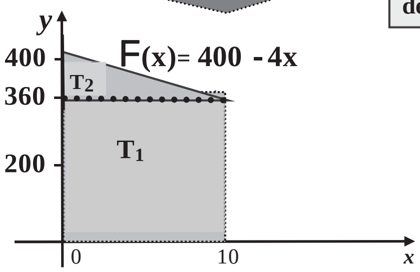
CONTEXTO GEOMÉTRICO: CG
Si con **T** indicamos la región comprendida entre el gráfico de F y el **eje x**, según vimos el **proceso** para calcular a**(T)** **es el mismo** que para calcular el trabajo para levantar la bolsa **(W** [0;10]**)**

$\lim\limits_{max\ \Delta xi \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} F(c_i) \times \Delta x_i = \boxed{\textbf{área(T)}}$

Existe camino alternativo de cálculo

<u>para resolver</u> **:**
<u>cambiamos de contexto</u>





por geometría elemental

$\mathbf{W}_{[0;10]} =$ ………. 3800

$a(\mathrm{T}) = a(\mathrm{T}_1) + a(\mathrm{T}_2) = 3800$

volvemos

ANÁLISIS DEL RESULTADO

- En el caso considerado podemos **"<u>evitar</u>"** el cálculo del límite a través de "**recodificar**" el problema; o sea, de "**trasladarlo a otro contexto"** (el **geométrico**) donde disponemos de herramientas más accesibles para resolverlo.

- **¿otras herramientas?:** fórmulas de cálculo de área de la geometría elemental (rectángulo, triángulo). Obviamente el traslado del problema al contexto geométrico sirve en este caso porque el trapezoide determinado por la función F, intensidad de la fuerza, no tiene contornos curvos sino rectos, disponemos por lo tanto de fórmulas conocidas para el cálculo del área de la región que delimita F .
- **¿resulta este recurso accesible cualquier sea la función de la fuerza?** Evidentemente no, ya que, salvo para el círculo, la geometría elemental no provee fórmulas para el cálculo de áreas de regiones con contornos curvos.
- **¿cómo se procede si no se puede acudir a la geometría básica?→ ¡¡problema!!**

Problema del que nos ocupamos a partir de ahora. Así, en lo que sigue, nos dedicamos a la búsqueda y determinación de técnicas algebraicas simples para el cálculo del límite de sumas. (***¡¡ que existen!!*** **,** y para muchas funciones aunque no para todas.)

9.6 La integral

En párrafos anteriores hemos visto como problemas totalmente distintos terminan por resolverse a través de la misma expresión, el siguiente *"límite de sumas"*:

$$\lim_{\max \Delta xi \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \right)$$

Dada la importancia de este límite; su dificultad de cálculo, nos abocamos a su estudio al efecto de hallar un **camino alternativo** para calcular su valor. Para ello trabajamos con una función genérica ***f*** prescindiendo de cualquier tipo de interpretación geométrica o física que se pueda dar y comenzamos aclarando el significado de los términos a usar.

- Dada ***f***: [a; b] → R, llamamos:

Partición del [a;b]: $P = \{x_0 ;\ x_1;\ x_2;\ x_3; \ldots;\ x_i; \ldots;\ x_n\}$

al conjunto de "n+1" puntos del intervalo [a ; b]; tal que el primero coincide con "a" , el último con "b" y verifican: $a \equiv x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_n \equiv b$

- Cada partición determina ***n*** subintervalos $I_i = [x_{i-1}; x_i]$ de amplitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Entre los ***n*** subintervalos hay uno que es el de mayor longitud.

Norma de la Partición **:** /P/

La "norma de la partición" es la longitud del subintervalo de mayor longitud.

O sea : $/P/ = \max \Delta x_i$ **;** $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

- Dada la función y la partición se selecciona un punto **"c_i"** en cada subintervalo al efecto de construir la función escalera. A este conjunto de puntos lo llamamos:

Selección de puntos compatible con P: $Q = \{c_1;\ c_2;\ c_3; \ldots;\ c_i; \ldots;\ c_n\}$ tal que $c_i \in I_i$

<u>Proceso de Integración</u>: construcción y búsqueda del "límite de sumas".

El proceso consta de cuatro etapas:

1. ***<u>Subdivisión del problema</u>*** (o construcción de la ***función escalera,*** f_{esc}).

Este paso consiste en:

* partir el intervalo [a; b] $\Rightarrow$ dar P, partición del [a; b] .

* fijar, en cada subintervalo **Ii** , la altura del "escalón" de la f_{esc}

$\Rightarrow$ dar Q , selección de puntos compatible con P .

2. **<u>Cálculo de las *aproximaciones parciales*</u>**: calculo de los "n" productos: $\mathbf{f(c_i)\ .\ \Delta x_i}$.

3. **<u>Cálculo de la aproximación *TOTAL*</u>**:

suma de las ***aproximaciones parciales***: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

Estas sumas se conocen con el nombre de "SUMAS de RIEMANN" y con el símbolo:

$$S(f, P, Q) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i$$

4. ***<u>Cálculo del límite de las Sumas de Riemann para</u>*** $/P/ \to 0$.

Estudio del comportamiento de las Sumas de Riemann a medida que se "afina" la partición; o sea, a medida que los escalones se hacen cada vez "más cortos".

En definitiva, calculo: $\lim\limits_{\langle P\rangle\to 0} \cdot\ S(f;P;Q)$ (límite que puede o no existir).

Definición 1: FUNCIÓN INTEGRABLE

Dada f : [a; b]$\to$ R; decimos que f es integrable en [a; b] si y sólo si existe un número **"L"** tal que para $/P/ \to 0$, las correspondientes sumas de Riemann **S**(f , P , Q), se acercan tanto como se quiera al número **L ,** cualquiera sea la selección Q considerada.

Si esto último sucede decimos que: $\lim\limits_{P\to 0} \cdot\ S(f;P;Q) = L$

Definición 2: INTEGRAL

Si existe **L** = $\lim\limits_{P\to 0} \cdot\ S(f;P;Q)$ a este número

- **<u>lo llamamos</u> :** integral de f en [a;b]
- **<u>lo indicamos</u> :** $\int_a^b f(x)\cdot dx$

O sea : $\boxed{\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim\limits_{P\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\times \Delta x_i}$

Observaciones:

a) "a" y "b" se llaman extremo inferior y superior de integración, respectivamente. En la definición 2, "a" y "b" son los extremos del intervalo dominio **f**, luego, **a < b** .

b) El concepto de integral se amplía definiendo el símbolo para el caso de otra relación entre los extremos de integración; o sea, para los siguientes casos:

Definición 3: Si **a > b**; entonces: $\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$

Definición 4: Si **a = b**; entonces: $\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$

c) Para $\mathbf{f} \geq 0$ en [a; b], definimos: $a\,(\mathrm{T}) = \lim_{\max\ \Delta xi \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \times \Delta x_i \right]$;

luego, por la ***definicion 2***: $a\,(\mathrm{T}) = \int_a^b f(x)\cdot dx$.

NOTA: *Definido el concepto de integral como el "límite de sumas" cabe preguntarse bajo qué condiciones existirá finito este límite de sumas; o sea, "la integral". Existen teoremas que dan respuesta a esta pregunta (teoremas que sólo enunciamos).*

TEOREMA: f continua en [a; b] $\Rightarrow$ f integrable en [a; b].

TEOREMA: f seccionalmente continua en [a; b] $\Rightarrow$ f integrable en [a; b].

Nota: f seccionalmente continua en [a; b] $\Leftrightarrow$ tiene un *nro. finito* de discontinuidades de *salto finito* en [a; b]. Ejemplo: *las funciones escalera*.

9.7 Propiedades de la integral

En todos los caso f y g son funciones integrables en el intervalo en que se plantea la integral.

(I_1) $\int_a^b k.f(x).dx = k\cdot\int_a^b f(x).dx$; donde k es cualquier constante.

(I_2) $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]\cdot dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$

(I_3) $\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$;

sin importar el orden entre ***a , b* y *c***.

(I_4) $\int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b g(x).dx$; si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$

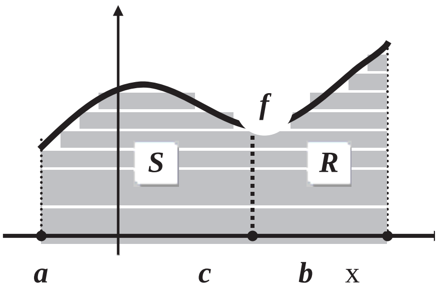
(I_5) $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b k\cdot dx = k.(b-a)$; si $f(x) = k$, $\forall x \in [a,b]$

Observaciones:

a) $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ se pueden reunir en una sola propiedad que se llama *propiedad de linealidad*:

$$\int_a^b \left[k_1 . f(x) + k_2 . g(x)\right] \cdot dx = k_1 \int_a^b f(x).dx + k_2 \int_a^b g(x).dx$$

b) $\mathbf{I}_3$, para el caso de ***f definida positiva*** y $a < c < b$, admite la siguiente interpretación geométrica

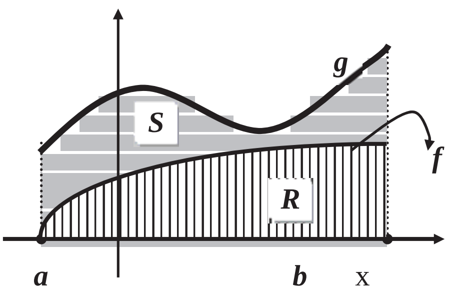


Si $\mathbf{T} = S \cup R$.

Entonces: $\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$

equivale a: **a (T) = a (*S*) + a (*R*)** .

c) $\mathbf{I}_4$, para *f* y *g* *definidas positivas,* admite la siguiente interpretación geométrica:



Si $S = \{ (x, y) \,/\, a \le x \le b \;;\; 0 \le y \le g(x) \}$
$R = \{ (x, y) \,/\, a \le x \le b \;;\; 0 \le y \le f(x) \}$

y , $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

Entonces: $R \subseteq S$ y $\mathbf{a}(R) \le \mathbf{a}(S)$

y se verifica $\mathbf{I}_4$:

$$\int_a^b f(x).dx \le \int_a^b g(x).dx$$

d) La propiedad $\mathbf{I}_5$ se prueba fácilmente teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$ **long de** $[a,b]$ $= \boldsymbol{b - a}$

$$\int_a^b k \cdot dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (k) \cdot \Delta x_i = \lim_{\|P\| \to 0} \left[(k) \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \right] = \lim_{\|P\| \to 0} \left[(k) \cdot (b-a) \right] = k.(b - a)$$

9.8 Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

- Dada f función continua en [a; b] , existe al menos un $c \in (a; b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c).(b-a).$$

- Demostración:

f continua en [a; b]. Luego, por el teorema de Weierstrass, admite máximo y mínimo absoluto en [a; b] ; o sea, existen x_m y x_M en [a; b] tales que:

$$f(x_m) = m_a \quad \text{y} \quad f(x_M) = M_a$$

$$\text{y} ; \quad m_a \leq f(x) \leq M_a \; ; \quad \forall x \in [a, b]$$

Luego, por $\mathbf{I_4}$:
$$\int_a^b m_a \cdot dx \leq \int_a^b f(x)\cdot dx \leq \int_a^b M_a \cdot dx$$

por $\mathbf{I_5}$:
$$m_a . (b-a) \leq \int_a^b f(x)\cdot dx \leq M_a (b-a)$$

Dividiendo por, $(b-a)$ (con $b - a > 0$ dado que $b > a$) tenemos entonces que:

$$m_a \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\cdot dx}{b-a}}_{k} \leq M_a$$

equivalentemente :
$$f(x_m) \leq k \leq f(x_M)$$

Finalmente, por el teorema del valor ***intermedio*** aplicado al intervalo $[x_m ; x_M]$ (ó $[x_M ; x_m]$) tenemos que existe $c \in (x_m ; x_M) \subseteq (a; b)$ tal que $f(c) = k$; o sea que:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\cdot dx}{b-a} \quad ; \quad \text{con } c \in (a ; b)$$

equivalentemente :
$$\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c) . (b-a) ; \quad \text{con } c \in (a ; b) .$$
q.e.d.

<u>Observaciones</u>:

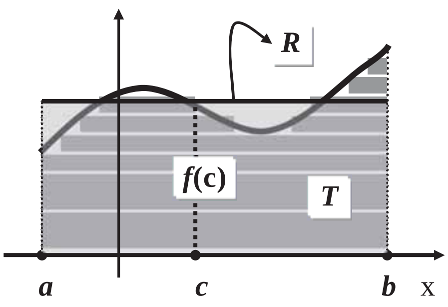
1) El teorema es válido también en el caso de $a \geq b$ (ejercicio).

2) En el caso de una ***f definida positiva*** en [*a; b*], el teorema admite una interpretación geométrica: "existe un punto "$c \in (a ; b)$" para el cual el área del rectángulo de altura $f(c)$ y ancho $(b - a)$ es igual al área bajo la curva gráfico de f .

$$a(T) = \int_a^b f(x).dx$$

$$a(R) = f(c) . (b - a)$$

Luego, por el teorema: $a(T) = a(R)$



9.9 Problemas que resuelve "LA INTEGRAL"

Por definición $\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$. Luego, la integral resuelve todos aquellos problemas que, según vimos, resuelven por medio de "límite de sumas".

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \xrightarrow{f \geq 0} = \mathbf{a(T)}$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \xrightarrow{f\ \text{(fuerza)}} = \mathbf{W}_{[a;\,b]}$$

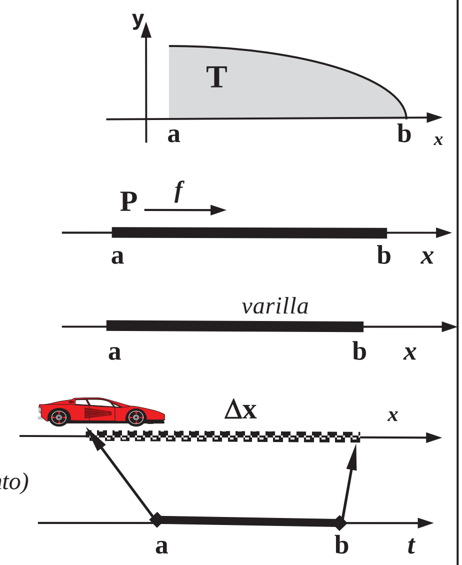
(trabajo)

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \xrightarrow{f\ \text{(densidad)}} = \mathbf{M}_{[a;\,b]}$$

(masa)

$$\int_a^b f(t)\cdot dt = \xrightarrow{f\ \text{(velocidad)}} = \Delta x$$

(desplazamiento)



Observaciones:

1) En el Apéndice al final del Capítulo se calcula el área de una figura plana a partir del correspondiente "límite de sumas" y con el método históricamente conocido como "método de exhausción". Se calcula el área de **T,** trapezoide determinado por **f** (x) = x^2 en [0;1].

Se demuestra que $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i$ = **1/ 3.** En otras palabras que **a(T) = 1/ 3 .**

Como con la nueva notación, **a (T) =** $\int_0^1 x^2\, dx$; **concluimos así que:** $\int_0^1 x^2\, dx = 1/3$.

2) Si **Δx** indica el desplazamiento de un móvil a velocidad variable, si la velocidad es conocida y la variable independiente el tiempo , **v = f (t)= t²** en [0; 1], entonces:

$$\Delta x_{[0;\,1]} = \int_0^1 t^2\, dt \;\Rightarrow\; \Delta x_{[0;\,1]} = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta t_i$$

Es fácil ver que el "límite" resultante es "igual" al planteado para el cálculo del **área (T)** con **f**(x) = x^2 (sólo difiere en la letra usada para representar la "variable independiente").

Cómo $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta t_i = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i = 1/3 \Rightarrow \int_0^1 t^2\, dt = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3$

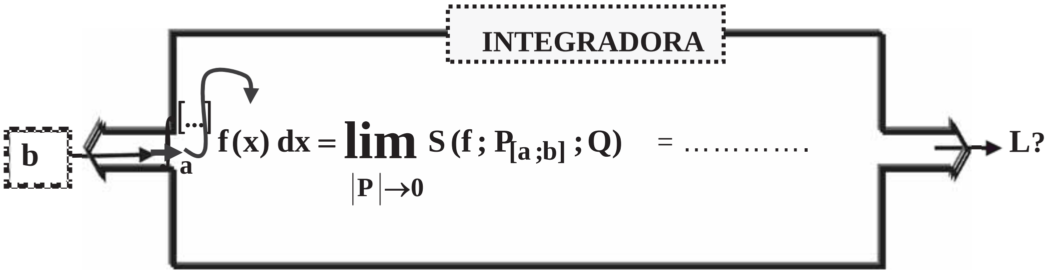
Vemos entonces que el objetivo del **diferencial** (dx, dt , u otro) en el símbolo integral es señalar la letra que corresponde a la **variable independiente de f**. Así :

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^b f(t)\cdot dt = \int_a^b f(z)\cdot dz \longrightarrow$$

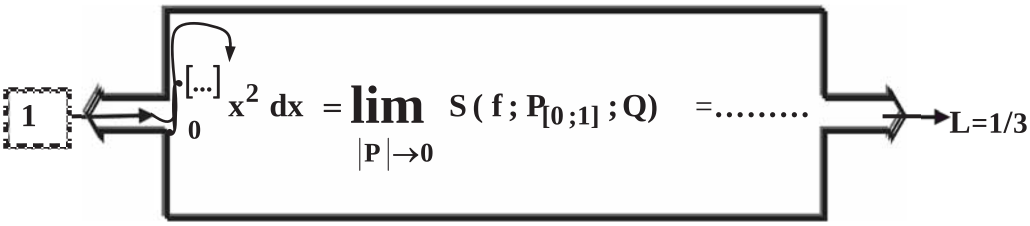
El resultado sólo depende de:
- ☞ **la función integrando (f) ;**
- ☞ **del intervalo de integración; o sea, de "a" y "b".**

- $\int_0^1 x^2\cdot dx = \int_0^1 t^2\cdot dt = \int_0^1 z^2\cdot dz = 1/3.$
- $\int_0^1 x^2\, dx \neq \int_0^1 t^2\, dx = t^2$ (prop. I5)

9.10 Cálculo de la integral: $\int_a^b f(x)\ dx$



Ejemplo: dada **f (x) = x²**; ¿cómo calculamos $\int_0^1 f(x)dx$ **?**



En el APENDICE se muestra el cálculo **por definición** de $\int_0^1 x^2 dx$

→En este caso las características de la función integrando (x^2, creciente en [0;1]) hacen posible el cálculo del correspondiente "límite de sumas"; por ende, el cálculo de la integral "por definición".

Pero, y en general, este límite es prácticamente imposible calcular.

→Así, nuestro objetivo en lo que sigue es la búsqueda de un camino "alternativo" para el "cálculo de integrales"; o sea, de un camino que permita "obviar" el "límite de sumas".

PROBLEMA: hallar un camino alternativo al de la definición para el cálculo de integrales.

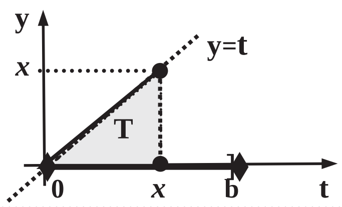
PLAN DE TRABAJO: como venimos haciendo hasta aquí, primero procedemos a analizar el **caso simple** con el objetivo de hallar **pistas** que permitan **reformular el problema** en **otros términos**; en particular, términos tales que faciliten su resolución. Hecho esto, procedemos luego a resolver el **problema reformulado**.

Análisis de un caso simple: **$f(t) = t$; $D_f = [0; b]$**

Objetivo: **cálculo $\int_0^x t\ dt$, $x \in [0; b]$**

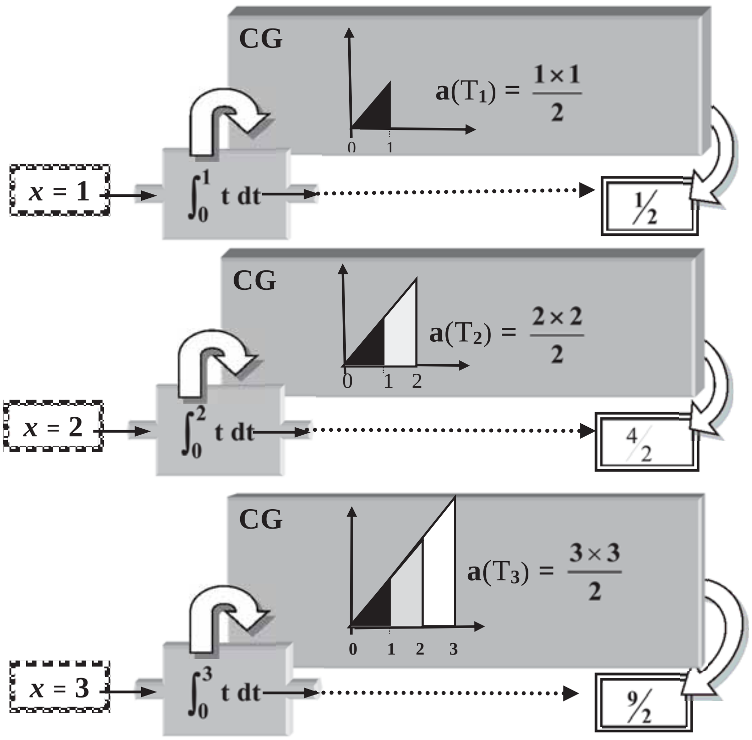
⌦ En general, y al efecto de **reformular** un problema, una estrategia efectiva es la de **trasladar** el problema a **otro contexto** en el que se facilite la acción.
En este caso, al ser **f** positiva en su dominio, el traslado al Contexto Geométrico (**CG**) permite reformular el cálculo de la integral en término de **áreas**.

- **$f(t) \geq 0$ en [0; b]**
- **T** (trapezoide asociado a **f**) = ***triángulo***.
- $\int_0^x t\ dt$ = área (T)



Así, para calcular $\int_0^x t\,dt$, tenemos un camino alternativo: **calcular el área de T**, trapezoide determinado por el ***graf f***, el ***eje t*** y la ***recta*** **t = *x*.**
Investigamos este camino en busca de pistas que ayuden a nuestro objetivo; pero, y fundamentalmente, de aquellas que permitan generalizar el proceso.

1ro) Calculamos $\int_0^x t\,dt$ para distintos ***x´s*** en **[0;b]** trasladando el problema al **CG .**



•<u>1er ANÁLISIS</u>:

☞ Calculada la integral para distintos extremos superiores vemos que;

$\int_0^{[*]} t\,dt \rightarrow$ ***<u>depende del ext. sup</u>***.

queda definida una función: **F**

F: [**0**; **b**] → **R**

$x \rightarrow F(x) = \int_0^{[x]} t\,dt$

que llamamos

FUNCIÓN INTEGRAL

<u>NOTA</u>:
Se puede demostrar que toda f integrable en [a; b], define una "Función Integral".

Definición 1: **FUNCIÓN INTEGRAL**

> Dada **f** integrable en [a; b] llamamos **función integral** a la función **F** tal que:
>
> - **F**(x) = $\int_a^x f(t)\cdot dt$
> - **Dom.F = Dom. f = [a; b]**

Se vislumbra así **<u>otro camino</u>** para el cálculo de integrales: **el cálculo de F(*x*).**

Pero…, $F(x) = \int_a^x f(t).dt$ y $\int_a^x f(t).dt = \lim\limits_{|P|\to 0} S(f\,;P_{[a\,;\,x]};Q)$

O sea, y hasta aquí, el cálculo del "limite de sumas" sigue siendo "inevitable"….
¿Qué hacemos?, ¿abandonamos este camino o persistimos en busca de pistas?...
Retomamos la exploración del caso simple, quizás resten cosas por descubrir….

En particular analizamos la existencia de algún patrón en la formación de las **F(x)**.

x =1 → $\mathbf{F}(1) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} = \frac{1^2}{2}$

x =2 → $\mathbf{F}(2) = \int_0^2 t\,dt = \frac{4}{2} = \frac{2^2}{2}$

x =3 → $\mathbf{F}(3) = \int_0^3 t\,dt = \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}$

....

x =x₀ → $\mathbf{F}(x_o) = \int_0^{[x_o]} t\,dt = \frac{x_o^2}{2}$

Conclusión: si $\mathbf{P}(x) = \frac{x^2}{2}$; tenemos que:

***)** $\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(x)$, $\forall x \in [0;b]$

***)** **P** es una **función elemental** (*)

(*) **función elemental**: función cuyas imágenes se obtienen a partir de un número finito de operaciones algebraicas básicas (± ; x ; ÷ ; √) entre funciones "*conocidas*".

Ejemplos: potencias, polinomios, cociente de polinomios, raíces, x^2 + sen x , etc.

Observaciones:

→ La complejidad de **F,** función integral asociada a una integral, radica en que **por definición**, **no es** una **función elemental:** su cálculo trasciende los métodos del álgebra. (Calcular un límite requiere un número infinito de operaciones).

→ Por otro lado, sabemos que las funciones admiten distintos registros de representación (algebraico, gráfico, numérico y verbal) y que, dentro de un mismo registro, es posible el proceso de "conversión"; o sea, de reescribirla de otra forma pero dentro del mismo registro.

• 2do ANÁLISIS:

1) Para el caso simple investigado, el cambio de contexto (del analítico al geométrico) permite hallar una **función elemental**, **P,** tal que $\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(x)$, $\forall x \in [0; b]$.

En definitiva, **calcular la integral** por medio de una **función elemental.**

$$\int_0^x t.\,dt = \mathbf{F}(x); \quad \mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(x); \quad \mathbf{P}(x) = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x t.\,dt = \frac{x^2}{2}$$

2) Dado que las funciones admiten distintas formas de ser representadas, hemos hallado un camino distinto al de la definición para calcular integrales: hallar, de ser posible, una función elemental (**P**) que coincida con la función integral (**F**) asociada a la integral.

En tal caso: $\int_a^x f(t).\,dt = \mathbf{P}(x)$ (y obviamos el "límite de sumas"!!!)

Y este hecho señala la posibilidad de **reformular** el problema original.

PROBLEMA REFORMULADO (1):

Dada $\mathbf{F}(x) = \int_a^x f(t).\,dt$, **Dom F = [a; b]**

hallar P , función elemental tal que $\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}(x)$, $\forall x \in [a; b]$.

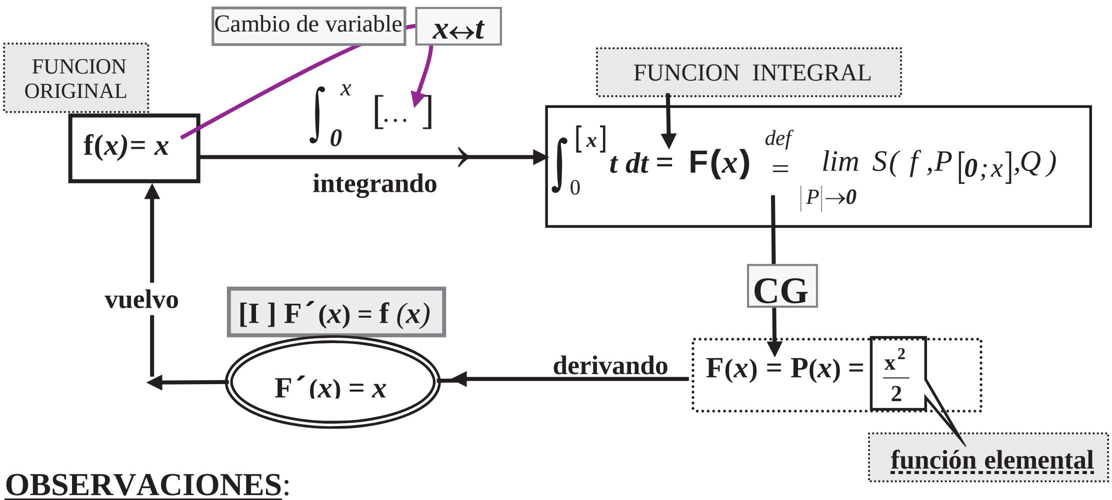
3) En el caso simple investigado, lo que permite hallar la función elemental **P** / **P = F** es el traslado del problema del contexto analítico al geométrico**.** Pero es fácil ver que esta estrategia no se puede aplicar a cualquier función pues hasta ahora , salvo para el círculo, no disponemos de fórmulas para el cálculo del área de regiones con contornos curvos. Luego, trasladar el problema al Contexto Geométrico no es una alternativa válida para una **f** genérica. En lo que sigue, investigamos la existencia de **otro contexto** al que trasladar el problema y en el cual se simplifique su resolución. En particular…,
retomamos la exploración del caso simple, quizás resten cosas por descubrir….

• 3er ANÁLISIS: (Caso Simple: $f(t) = t$; $D_f = [0; b]$ **)**

Expresada **F** por medio de la función elemental **P** ($F(x) = P(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $\forall\, x \in [0;b]$),

procedemos a **derivar F**, observar que resulta de esta operación. Y descubrimos …. ,

que la derivada de la Función Integral es, ¡ la función original ! → $F'(x) = f(x)$.



OBSERVACIONES:

1) Descubrimos que **F** (función integral para el caso simple), actúa a modo de **puente** entre el **cálculo integral** y el **cálculo diferencial**; es decir, **establece un nexo entre ambos contextos** determinando un circuito donde quedan relacionadas las dos herramientas más poderosas del cálculo: la **Integral** y la **Derivada**.
En razón de ello a este circuito lo llamamos, **"circuito ID"** (**I**ntegro-**D**iferencial**).**

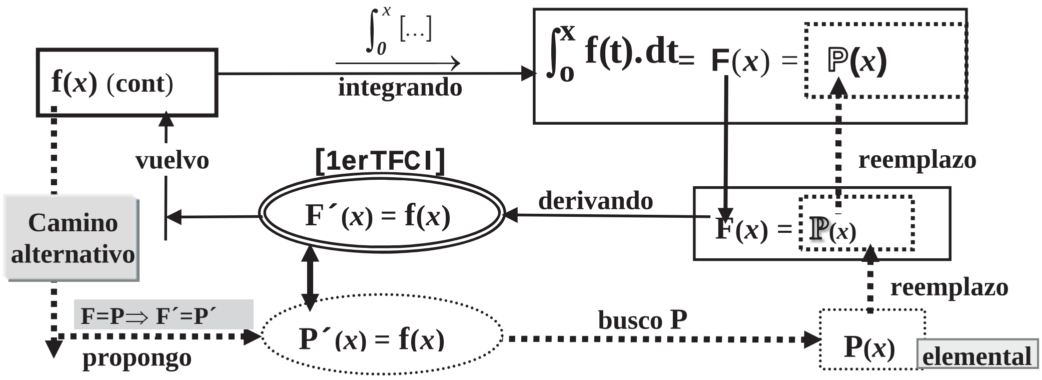
2) La existencia de este circuito sugiere la existencia de otro camino a explorar: el traslado del problema al **contexto** del **Cálculo Diferencial** (siempre y cuando esto sea posible). Si observamos el circuito detectamos que esta posibilidad está condicionada a la existencia de la igualdad **[I] (derivada de la Función Integral igual a la Función Original).**
Tenemos así el:

I: Primer interrogante fundamental:
Cualquiera sea la f de partida, ¿siempre será F´(x) = f (x)?

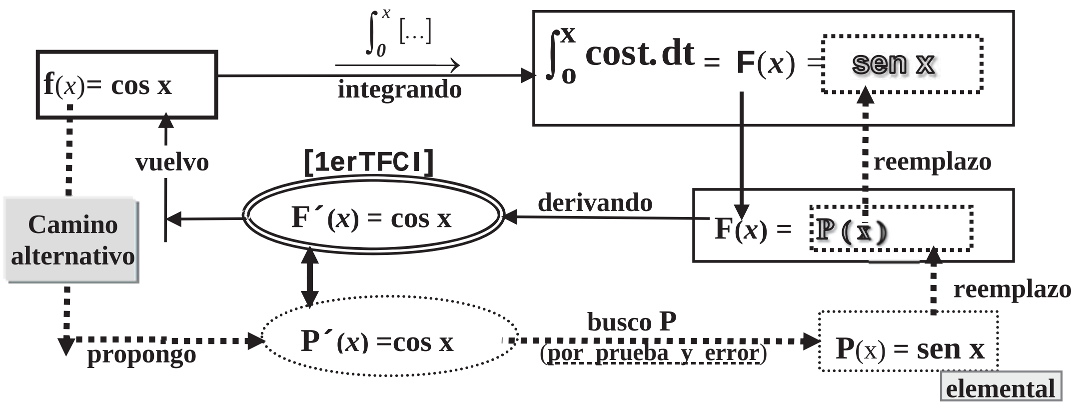
Al cual da respuesta el:

1er Teorema Fundamental del Cálculo Integral - 1er TFCI: **"Si f es continua en [a; b] entonces F, su función integral, es derivable y F´(x) = f (x) , ∀ x ∈ [a; b] " .**	Demostración: (más adelante)

CONCLUSIÓN: si **f,** la función original, es continua en el intervalo, el circuito se forma. Luego, procedemos a explorarlo; en particular a investigar si se puede recorrer **al revés.** O sea, **asumir que existe P** (elemental) tal que **P = F** y **buscar P**.
¿Cómo?: recordando que si dos funciones son iguales, sus derivadas lo son **(P´ = F´)**



EJEMPLO:



Momento de Reflexión: trasladar el problema al contexto del **Calculo Diferencial** permite reformular el mismo en término de derivadas (reformulación (2)).

PROBLEMA (original): **f: [a;b] → R ;**

↳ **hallar un camino alternativo para el cálculo de la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ con x∈[a; b]**

PROBLEMA REFORMULADO (1): **f: [a; b] → R; f continua en [a;b]**

↳ **hallar una función elemental P tal que P = F con F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$; x∈[a;b]**

PROBLEMA REFORMULADO (2): **f: [a;b] → R; f continua en [a; b]**

↳ **hallar una función elemental P tal que P´ (x) = f (x) , ∀ x ∈ [a; b]**

NOTA: en este punto vemos que la existencia o no de una función elemental **P** tal que **P´ = f** es determinante para el cálculo de la integral por un camino alternativo. Luego, dado su importancia, damos un nombre a esta función y estudiamos sus propiedades.

Observación: **P´ = f** implica que **f** "proviene" de **P** ; en otras palabras, que **P** está "antes" que **f** .

Definición 2: **PRIMITIVA (o ANTIDERIVADA)**

> **P** es una **primitiva** de **f** en [a; b] si y solo si **$P'(x) = f(x)$;** $\forall x \in [a; b]$.

Finalmente el problema original (cálculo de la integral) queda reformulado así:

PROBLEMA REFORMULADO (3):

↳ **dada f continua en [a; b] hallar P, primitiva elemental de f .**

Ejemplos:

a) si **f** (x) = **x** ; una primitiva de **f** es **P**(x) = $\mathbf{x^2/2}$; [**P´**(x) = **x** → ***verifica***]
b) si **f** (x) = **cos x**; una primitiva de **f** es **P**(x) = **sen x** ; [**P´** (x) = **cos x** → ***verifica***]
c) si **f** (x) = **1** ; una primitiva de **f** es **P**(x) = **x** ; [**P´** (x) = **1** → ***verifica***]

Notas:

1.- Derivada en los extremos del intervalo:
el concepto de derivada lo hemos presentado y definido para puntos interiores a un intervalo. Luego, cabe aclarar que las derivadas en los extremos, **P´(a)** y **P´(b),** se definen de la misma forma solo que reemplazando "límite" por "límite lateral" para $x \to a^+$ y $x \to b^-$ respectivamente.

2.- Las primitivas de los ejemplos las hallamos por el método de **prueba y error**; o sea, a partir de **proponer** una función y **probar** si verifica lo buscado. Si no verifica se detecta el error, *se* corrige y se vuelve a probar. Y así hasta encontrar la primitiva elemental de **f** (si existe). Este método es el único posible para las funciones elementales básicas; no así para las demás. Así, otro objetivo del cálculo integral es hallar métodos efectivos para el cálculo de primitivas.

3.- No siempre existe **P**, primitiva elemental de **f**; aún para **f** continua. Ejemplo: $\mathbf{f(x) = e^{-x^2}}$.

4.- Por el 1er TFCI, si f es continua en [a;b] y F(*x*) = $\int_a^x f(t)\,dt$ su función integral entonces $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a; b]$. Luego: F es una primitiva de f.

PROPIEDADES DE LAS PRIMITIVAS

Teorema I-Pr: Si una función tiene una primitiva P, entonces tiene infinitas (P + k, k∈R)

Demostración:

- Sea P primitiva de f → $P'(x) = f(x)$
- Dada $G(x)= P(x)+ k$, $k \in R$ → $G'(x) = [P(x) + k]' = P'(x) + (k)' = f(x)$
- Luego, $G = P + k$ es primitiva de f. (q.e.d)

Teorema II-Pr: Dos primitivas de **f** difieren en una constante; o sea, **G(x) –P(x) = k**

Demostración:

- P primitiva de f ⇒ $P'(x) = f(x)$
- G primitiva de f ⇒ $G'(x) = f(x)$
- Sea **H** (*x*) = **G**(*x*) - **P**(*x*); $\forall x \in [a; b]$

$$H'(x) = [G(x) - P(x)]' = G'(x) - P'(x) = f(x) - f(x) = 0 \;;\; \forall x \in [a; b].$$

Luego, $H'(x) = 0$; $\forall x \in [a; b]$ ⇒ $H(x) = k$; $\forall x \in [a; b]$.

- **Conclusión**: **G(x) – P(x) = k** ó **G(x) = P(x) + k**; $\forall x \in [a; b]$. (q.e.d)

Observación: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de **f .** Luego, por el Teo II-Pr, si **P** es otra primitiva de **f,** entonces existe $k \in \mathbf{R}$ tal que $F(x) = P(x) + k$; $\forall\, x \in [a; b]$.

Teorema III-Pr:

Si **P** y **G** son dos primitivas de **f** en [a; b] y existe $x_o \in [a; b]$ tal que $G(x_o) = P(x_o)$ entonces $G(x) = P(x)$; $\forall\, x \in [a; b]$.

- **P** y **G** primitivas de **f** en [a; b] $\Rightarrow$ $G(x) - P(x) = k$; $\forall\, x \in [a; b]$ **(Teo II-Pr)**
  luego, para $x_o \in [a; b]$ tenemos: $G(x_o) - P(x_o) = k$
- Por hipótesis: $G(x_o) = P(x_o)$ $\Rightarrow$ $G(x_o) - P(x_o) = 0$ $\Rightarrow$ $k = 0$

Conclusión: $G(x) - P(x) = 0$; $\forall\, x \in [a; b]$ $\Rightarrow$ $G(x) = P(x)$; $\forall\, x \in [a; b]$. (q.e.d)

• 4to ANÁLISIS:

Descubierto el hecho de que si existe una primitiva **P** de **f** entonces existen infinitas **(P + k)** , se nos plantea un problema en cuanto al recorrido al revés del circuito **ID**: la primitiva que hallamos por prueba y error , **¿**será la que coincide con **F**, la función integral asociada a **f ?**

• Por definición de igualdad de funciones, sabemos que:

$$F = P \Leftrightarrow \text{Dom } P = \text{Dom } F = [a; b] \text{ y } F(x) = P(x) \;\; \forall\, x \in [a; b]\,.$$

PROBLEMA ENGORROSO:

Averiguar si **F = P** requiere calcular **F(x),** $\forall\, x \in [a;b]$ y este es justamente el problema que estamos tratando de resolver !!!: cómo calcular **F(x)** por un camino alternativo al de la definición de **F** ("limite de sumas") .

☞ Por definición podemos calcular **F** en único punto: **el extremo inferior de la integral**.

$$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(t).\,dt\,,\ \forall\, x \in [a; b] \xrightarrow{\text{por def.}} F(a) = \int_a^a f(t).\,dt = 0\,.$$

Luego, para averiguar si **F= P, no podemos** usar la definición de igualdad de funciones.

☞ Y aquí es donde el **Teorema III-Pr** nos rescata de esta engorrosa situación!!!
F y **P** son primitivas de **f**; luego, y según este teorema, si existe $x_o \in [a; b]$ tal que $F(x_o) = P(x_o)$ entonces $F(x) = P(x)$; $\forall\, x \in [a; b]$. O sea, para decidir si **F** = **P** basta **comparar las funciones en un único punto**, **y esto sí lo podemos hacer!!!...**

Conclusiones: si $f : [a; b] \to R$; $F(x) = \int_a^x f(t).\,dt$; **P** primitiva elemental de **f .**

1) $P = F \Leftrightarrow P(a) = F(a) \Leftrightarrow P(a) = 0$.

2) Si en el circuito **ID** introducimos un **CONTROL** al efecto de determinar si **P = F,** tenemos "casi" resuelto el problema del calculo de integrales.

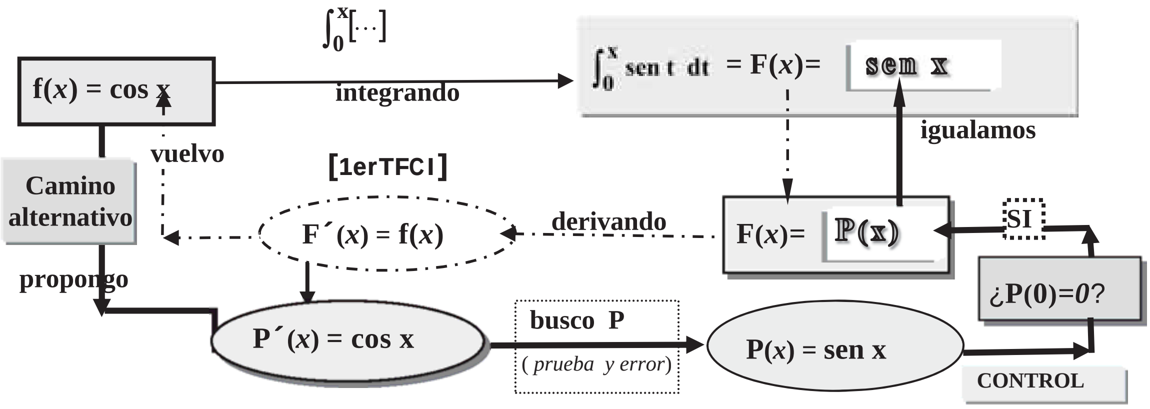
CONTROL

¿ P(a) = 0?

SI $\Rightarrow F = P \Rightarrow$ $\boxed{\int_a^x f(t).\,dt = P(x)\ ;\ \forall\, x \in [a; b]}$

NO $\Rightarrow P \neq F \Rightarrow$??????

<u>EJEMPLO</u>: **f** (x)= **cos x ;** **x** $\in$**[0; b]**

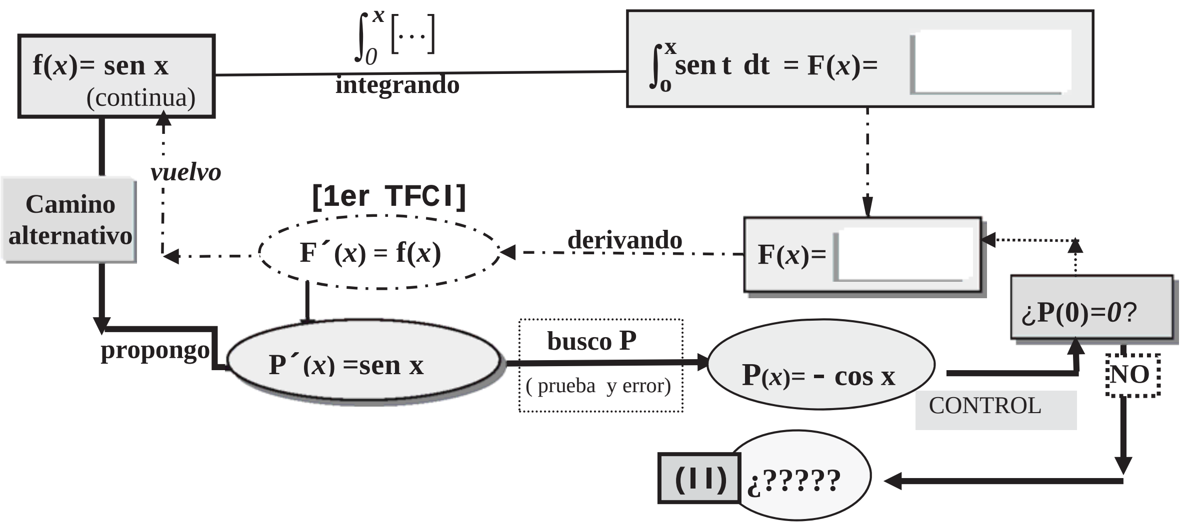


<u>CONCLUSIÓN:</u>

$$\Rightarrow \int_0^x \cos\ t\ dt = \mathbf{sen}\ x$$

- $x = \pi/2 \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\ t\ dt = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$
- $x = \pi \rightarrow \int_0^{\pi} \cos\ t\ dt = \text{sen}\ \pi = 0$
- $x = 2 \rightarrow \int_0^{2} \cos\ t\ dt = \text{sen}\ 2$

<u>….. exploramos el circuito ID para otra función</u>



(II) ¿tenemos alternativa?: SI, proponer otra primitiva. ¿CUAL?

- Por **Teo I - Pr** → si existe **<u>una primitiva</u>** **(P)** entonces hay **<u>infinitas</u>** .
- Por **Teo II - Pr** → **<u>dos primitivas difieren en una constante;</u>**

Luego; si **P** $\neq$ **F** ; buscamos **<u>otra primitiva</u> G,** tal que **F(x) = G(x)** **(G(x)= P(x) + k)**

Y tenemos así el:

<u>Segundo interrogante fundamental</u>: dada F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ y **P** otra primitiva de **f**:
"el k$\in$R tal que F(x) = P(x) + k , $\forall\, x \in$**[a; b], <u>¿se puede determinar fácilmente</u>?"**

Al cual da respuesta el:

<u>2do Teorema Fundamental del Cálculo Integral</u> – 2do TFCI :

"Dada f continua en [a; b] ;

F la función integral asociada a f y

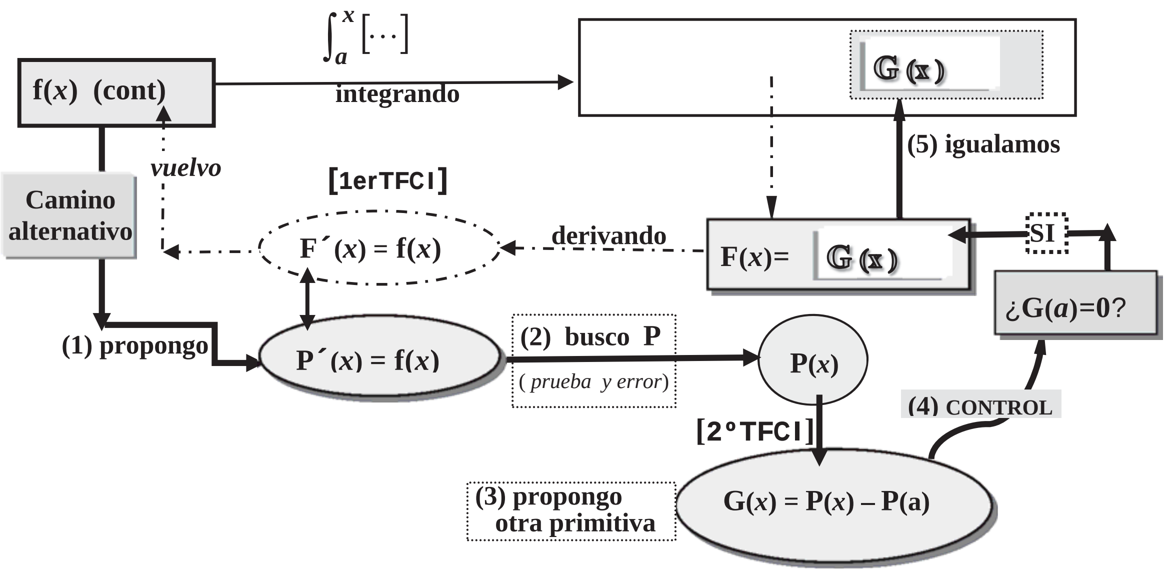
P otra primitiva de f ,

entonces F(x) = P(x) + k, $\forall\, x \in$ [a;b] con k = – P (a) " .

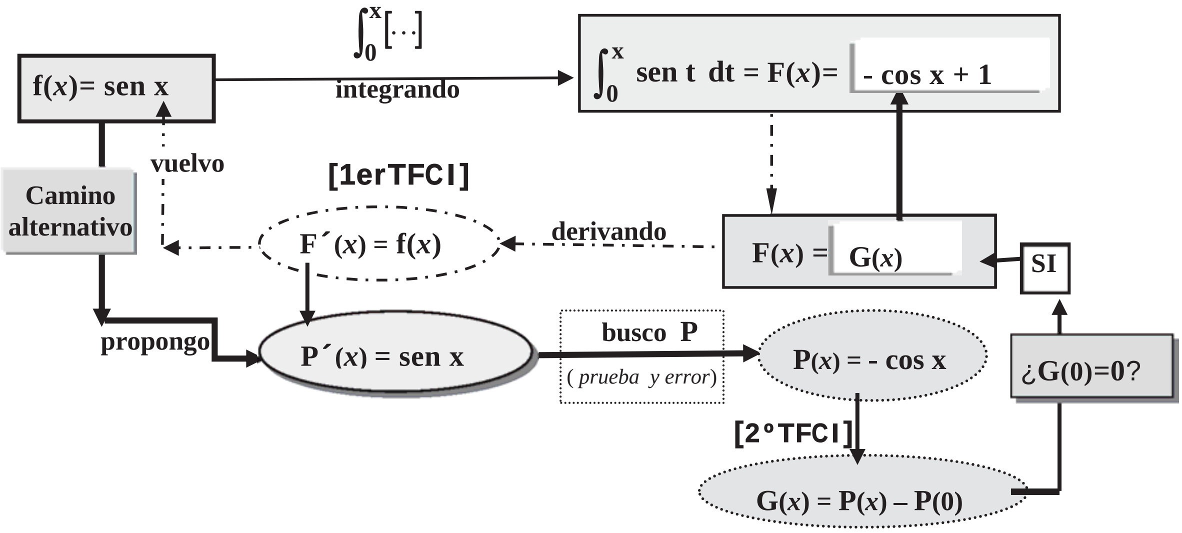
Demostración: (más adelante)

Este teorema permite ajustar el circuito ID de modo que permita calcular integrales de funciones continuas, **f**, toda vez que **encontremos al menos una primitiva P(elem)** de **f.**

CONCLUSIÓN: **f** continua en el intervalo y admite primitiva (*elem.*) el circuito queda:



<u>Ejemplo</u>: usemos el circuito para calcular $\int_0^x$ **sen t dt**

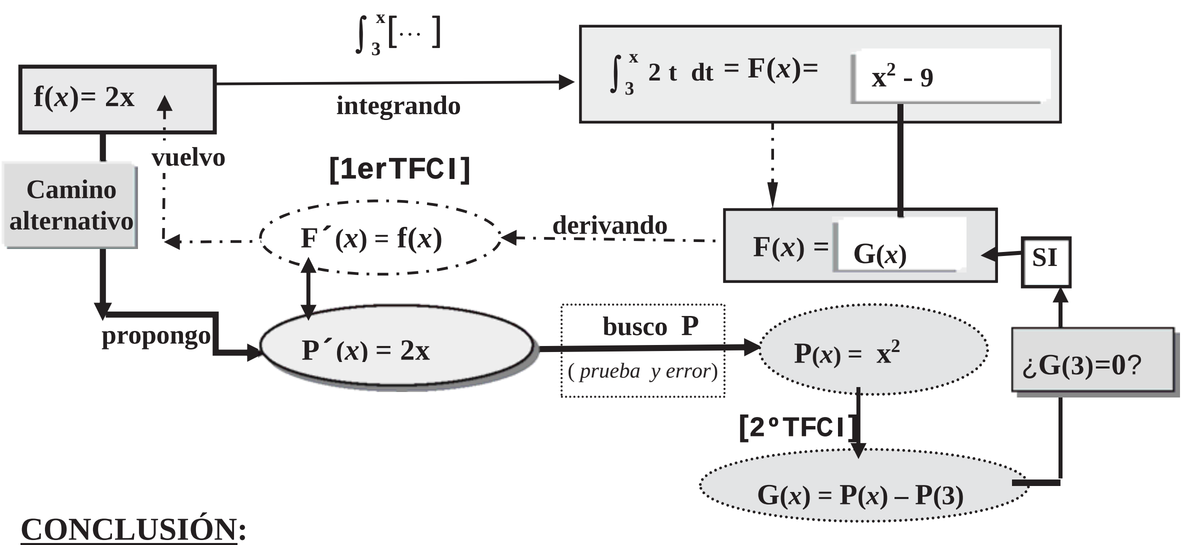


CONCLUSIÓN:

$\int_0^x \text{sen } t \; dt = -\cos x + 1 \Rightarrow$

- $x = \pi/2 \rightarrow \int_0^{\pi/2} \text{sen } t \; dt = -\cos(\pi/2) + 1 = 1$
- $x = \pi \rightarrow \int_0^{\pi} \text{sen } t \; dt = -\cos(\pi) + 1 = 2$
- $x = 2 \rightarrow \int_0^{2} \text{sen } t \; dt = -\cos(2) + 1$

Ejemplo: dada $\mathbf{f}(x) = \mathbf{2x}$, $\mathbf{D}f = [3; 7]$ usemos el circuito para calcular $\int_3^x f(t)\,dt$, $x \in [3; 7]$



CONCLUSIÓN:

$\int_3^x 2t\,dt = x^2 - 9 \Rightarrow$

- $\int_3^5 2t\,dt = 5^2 - 9 = 16$
- $\int_3^4 2t\,dt = 4^2 - 9 = 7$

⌧ Resumiendo el trabajo hecho tenemos un:

Proceso alternativo para el cálculo de $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$

1) Proponer $P'(x) = f(x)$

2) Hallar (*si existe*) **P**, una primitiva elemental de **f** .

3) Plantear todas las primitivas que difieren de **P** en una constante: $P(x) + C$, $C \in R$

4) Hallar **k** de modo que $F(x) = P(x) + k$ → (2º TFCI) → $k = -P(a)$

5) Volver a $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$;

reemplazar **F** por la primitiva elemental obtenida en (4); concluir una fórmula elemental para calcular la integral: $\int_a^x f(t)\,dt = P(x) - P(a)$.

En lo que sigue nos dedicamos a validar este proceso; o sea, a demostrar todas las cuestiones que hacen a la circulación del circuito ID tanto en forma *directa* como *al revés*.

9.11 Relación entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral

• En párrafos anteriores vimos los fundamentos del Cálculo Integral, su aparición como una rama independiente de la matemática la cual, entre otras cosas, resuelve el problema del cálculo del área de regiones de contornos curvos, permite determinar el "efecto total" o "acumulado" en un proceso de cambio con velocidad no constante.
• Vimos también la necesidad de buscar métodos alternativos al de la "definición de integral" para posibilitar el "cálculo de integrales"; como esta búsqueda contribuye tanto al hallazgo de importantes resultados teóricos como al descubrimiento de que el Cálculo Integral se podía trabajar como Cálculo Diferencial "al revés". La detección de este hecho tiene consecuencias prácticas transcendentes pues es el que finalmente permite hallar "métodos alternativos" para el "cálculo de integrales".
• Cabe mencionar que aún cuando lo útil de este hecho en su momento (y aún hoy), el desarrollo de nuevas tecnologías y como consecuencia de ello de los "métodos numéricos", ha permitido volver la mirada al cálculo por definición de la integral. Y este hecho tiene su ventaja ya que permite abordar el cálculo de integrales de cualquier tipo de función, cosa que no siempre es posible con el Cálculo Integral pensado como Cálculo Diferencial "al revés".

☞ Una de las cuestiones que vimos al investigar el circuito ID, fue que variando el ***extremo superior*** de la integral generábamos una función, la ***función integral.***

<u>Definición 1</u>: (**FUNCIÓN INTEGRAL**)

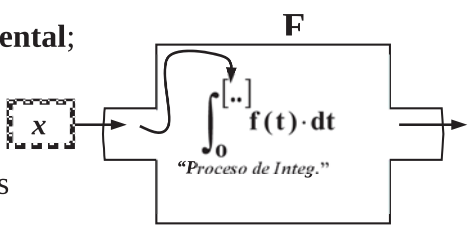
Dada **f** integrable en [a; b] llamamos **función integral** a la función **F** tal que:

➢ **Ley F:** $F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$

➢ **Dom.F = Dom. f = [a; b]**

Observaciones:

1.- Por definición, **F no es una función elemental**; su cálculo requiere el cálculo del "límite de sumas de Riemann"; o sea, una operación que trasciende los métodos del álgebra y que, salvo casos muy puntuales como el de **f** (x) = x^2, resulta imposible de realizar.



2.- Para ciertas funciones, bajo ciertas condiciones y trasladado el problema al contexto geométrico, pudimos calcular **F(x)** para algunos valores de ***x´s*** y luego, por inducción, expresar la ley de **F** por una **fórmula "elemental"** .

Así, dada **f(*x*) = x** calculamos **F(*x*)** = $\int_0^{[x]} t\cdot dt$ para distintos valores de ***x´s*** y concluimos,

$$x \rightarrow F(x) = \lim_{|P|\to 0} S(f, P_{[0;x]}, Q) = L = x^2/2 \quad \rightarrow \quad F(x) = x^2/2$$

Luego, derivamos **F ,** obtuvimos **F´(x) = f(x)**; o sea, descubrimos que la derivada de la función integral nos volvía a la función original. Este hecho crucial nos lleva al,

<u>Primer Interrogante Fundamental</u>: "cualquiera sea f , ¿siempre será F´ (*x*) = f (*x*) ?"

La respuesta a este interrogante la dio el **1er TFCI**, el que demostramos a continuación:

<u>1er TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL</u> (1º TFCI)

Sea f continua en [a; b] y $\mathbf{F(x)} = \int_a^x f(t)\cdot dt$ la función integral que ella genera.

Entonces, **F** es derivable en [a; b] y $\mathbf{F'(x)} = f\mathbf{(x)}$ **,** $\forall\, x \in [a\,;b]$.

Demostración:

a) Dado $x_o \in (a\,;b)$ nos proponemos analizar la existencia de $\mathbf{F'(x_o)}$**.**

$$F'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_o+h)-F(x_o)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\cdot dt - \int_a^{x_0} f(t)\cdot dt}{h} =$$

$$\underset{prop.(I_3)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0} f(t)\cdot dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\cdot dt - \int_a^{x_0} f(t)\cdot dt}{h} =$$

f continua en x_o

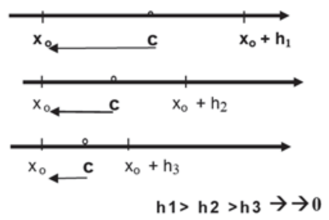
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\cdot dt}{h} = \lim_{h\to 0} \cdot \frac{f(c)\cdot h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ (c\to x_o)}} f(c) = f(x_o)$$

Por **TVMCI** (Teo. Valor Medio del Calc. Int.)
existe $\mathbf{c} \in [\mathbf{x_o};\, \mathbf{x_o+h}]$ **(*)** (**ó** $[\mathbf{x_o+h}\,;\,\mathbf{x_o}]$ **)**
(h >0) (h<0)

tal que:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\cdot dt = f(c).[(x_o+h)-x_o] = f(c).h$$

- si $\mathbf{h \to 0}$ entonces,
- $\mathbf{x_o + h \to x_o}$ y, por **(*)**,
- $\mathbf{c \to x_o}$



b) Si $\mathbf{x_o = a}$ ó $\mathbf{x_o = b}$ **.**
La prueba es la misma sólo hay que tomar, $h \to 0^-$ ó $h \to 0^+$**,** según sea $\mathbf{x_o = a}$ ó $\mathbf{x_o = b}$**.**

Conclusión: como x_o es genérico hemos probado que: $\mathbf{F'(x)} = f\mathbf{(x)}$ **;** $\forall\, \mathbf{x \in [a;\, b]}$**.**

(q.e.d)

☞ Otra de las cuestiones que vimos fue que para recorrer el circuito **ID** "al revés" dada **f** debíamos buscar **P** tal que **P´ = f.** A esta **P** le dimos un nombre: **primitiva de f**.

Definición 2: (Primitiva ó antiderivada de una función)

P es una primitiva de f en [a; b] si y sólo si $P'(x) = f(x)$; $\forall x \in [a;b]$.

☞ Vimos también las siguientes propiedades de "primitivas" (pags. 30 -31):

Teorema I-Pr: Si **f** tiene una "primitiva" **P**, entonces tiene infinitas ($P + k$, $k \in R$)

Teorema II-Pr: Dos primitivas de **f** difieren en una constante: $G(x) - P(x) = k$

Teorema III-Pr: Si **P** y **G** son dos primitivas de **f** en [a;b] y existe $x_o \in [a;b]$ tal que $G(x_o) = P(x_o)$ entonces $G(x) = P(x)$; $\forall x \in [a;b]$.

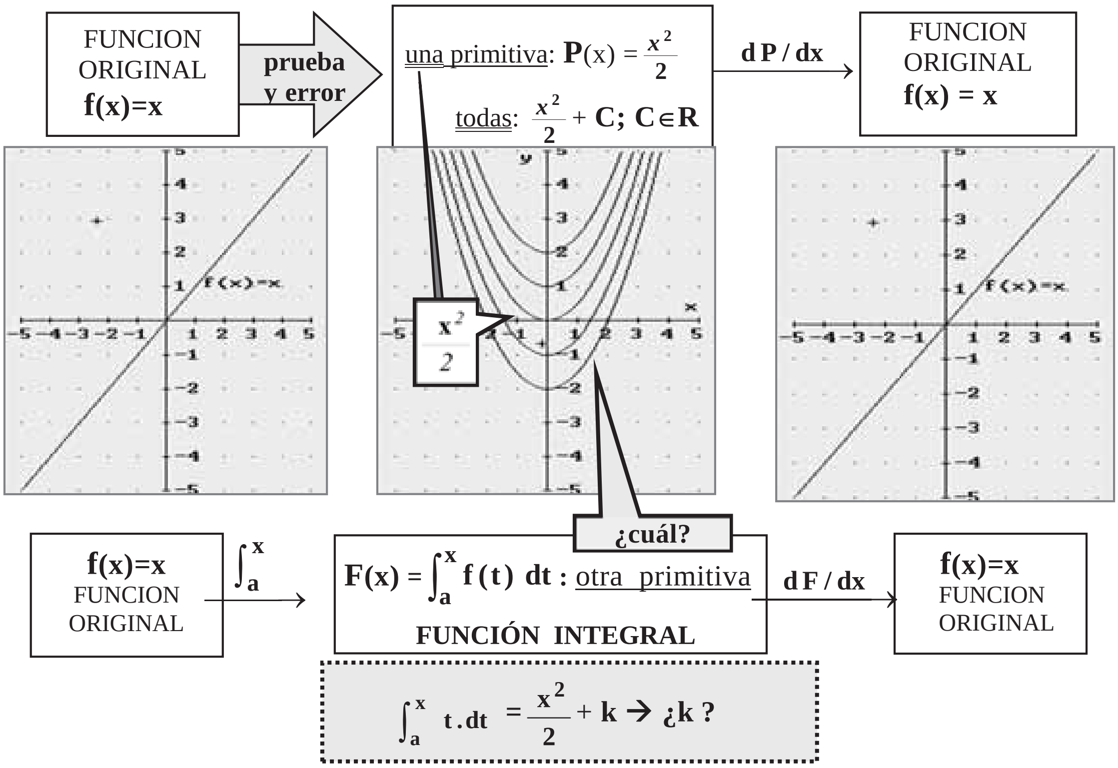
De estas propiedades concluimos:

☞Por **1erTFCI**: **f** continua en **[a; b]** y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

O sea, **F**, **la función integral** , **es una primitiva de f en [a;b] .**

☞Por **Teo II-Pr** : dos primitivas de **f** difieren en una "constante".

O sea, que dada **P**, otra primitiva de **f** , existe $k \in R$ / $F(x) = P(x) + k$ → ¿ k ?



☞ Retomando el problema surge el **Segundo Interrogante Fundamental:**

"**dadas f continua en [a ; b] ;** $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y **P otra primitiva de f** ;

el valor de k tal que $F(x) = P(x) + k$, $\forall x \in [a;b]$ **, ¿ se puede hallar ? ".**

Interrogante que resuelve el **2ºTFCI.**

9.12 Relación entre función integral y primitiva

2do TEOREMA FUNDAMENTAL del CÁLCULO INTEGRAL (2ºTFCI)

Hipótesis: Dadas: **f** función continua en [a ; b]
P primitiva cualquiera de **f** en [a ; b]
F función integral asociada a **f** : $F(x) = \int_a^x f(t).dt$;

Tesis: para cada $x \in [a ; b]$ se tiene que: $F(x) = P(x) - P(a)$;

o sea que: $\boxed{\int_a^x f(t).dt = P(x) - P(a)}$

Demostración:

» Por hipótesis → **P** primitiva de **f** .
» Por **1ºTFCI** → **F** primitiva de **f** .
» Luego, por **teorema II Pr**., **F** y **P** difieren en una constante → $F(x) = P(x) + C$
» O sea → $\int_a^x f(t).dt = P(x) + C \quad \forall x \in [a ; b] \quad (*)$
» Si $x = a$ → $\left.\begin{array}{l} \int_a^a f(t).dt = P(a) + C \\ 0 = P(a) + C \end{array}\right\} \Rightarrow C = -P(a)$
» Reemplazando en (*) → $\int_a^x f(t).dt = P(x) - P(a). \quad \forall x \in [a ; b]$ (q.e.d)

- **Corolario:** **REGLA de BARROW**

En el **2ºTFCI**; si $x = b$ → $\int_a^b f(t).dt = P(b) - P(a) = P(t)\Big|_a^b$

- El **2ºTFCI** prueba que $k = -P(a)$; o sea, resuelve el último interrogante planteado en relación al circuito ID a la vez que muestra que en el cálculo de la integral también interviene el extremo inferior de la integral (**a**) .

En el ejemplo de la pág. anterior: $\int_a^x t.dt = \frac{x^2}{2} + C$ →(2ºTFCI) $C = -\frac{a^2}{2}$

y finalmente: $\int_a^x t.dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$. (ej: a=3 → $\int_3^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}$)

En definitiva, si por algún medio obtenemos una **primitiva elemental de f**, el cálculo de **la integral**, con la aplicación de la **Regla de Barrow**, se reduce a una **simple resta**. Con el hallazgo de esta regla hemos entonces concluido exitosamente (será así?) la búsqueda de un camino alternativo para el cálculo de la integral.

Ejemplo: $\int_0^6 15.t^2\,dt = P(6) - P(0) \underset{(P(t) = 5.t^3)}{=} 5.6^3 - 5.0^3 = 1080$

¿Hemos resuelto *exitosamente* nuestro problema? ; ¿podemos, por ej., calcular $\int_1^{10} \ln x \, dx$?

Evidentemente resulta prácticamente imposible hallar **P,** primitiva de **f** (x)**= ln x**, por "prueba y error"; por ende, aplicar Barrow y calcular la integral. Vemos así que la aplicación de la potente regla que acabamos da hallar (la de Barrow) queda supeditada al hallazgo de al menos una primitiva elemental y que esto, salvo algunos casos simples, no es algo que se pueda hacer por "prueba y error" Surge así la necesidad de hallar "métodos" más eficaces para la búsqueda de primitivas. En el párrafo que sigue nos abocamos a esta cuestión e introducimos para ello un nuevo concepto el cual facilita el trabajo "metódico" que nos proponemos para esta instancia.

9.13 El concepto de "integral indefinida"

Vimos que si f admite una primitiva, admite infinitas**;** luego, tenemos un conjunto de primitivas.

Conjunto de Primitivas de f = {**P**(x) + **C** / **C**$\in$**R** y **P´**(x) = f(x) **}.**

A este conjunto le damos un nombre y un símbolo al efecto de facilitar su obtención.

Definición (INTEGRAL INDEFINIDA*)*

Al **Conjunto de Primitivas de** f ,

* lo llamamos: **Integral Indefinida** ,

* lo indicamos con el símbolo: $\int f(x)\, dx$.

O sea, $\int f(x)\, dx$ = **P**(x) + **C ;** **P** primitiva de f y **C**$\in$**R** (**C = cte de integración**)

9.13.1 Tabla de "*Integrales*" *(Primitivas)* Inmediatas

NOTAS:

1) El uso y costumbre ha impuesto el término "integral" para referirse a la "integral indefinida" de f . Esto sin dudas crea importantes confusiones pues el mismo término se usa para dos conceptos distintos: la *integral indefinida* (primitivas de f) y la *integral de* f en **[a; b]** ("limite de Sumas de Riemann de f en **[a; b]**). El dominio de ambos conceptos es indispensable entonces para usar este término en el modo y forma que corresponda según el contexto de trabajo.

2) El primer recurso del que disponemos para hallar "integrales indefinidas" ó "primitivas" es el de prueba y error. Con este método, y recurriendo a la tabla de derivadas, hallamos las primitivas de las funciones prototípicas básicas con las que construimos la Tabla de Integrales "inmediatas". El resto de las primitivas se encuentran a partir de esta tabla y con el recurso de "técnicas de integración" que se construyen apoyándose en las "técnicas de derivación".

• Integrales "inmediatas":

1) $\int x^{\alpha} .dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $\alpha \neq -1$

2) $\int \dfrac{1}{x} .dx = ln/ x/ + C$

3) $\int sen.x \ .dx = -cos.x + C$

4) $\int cos.x \;\; .dx \;\; = \;\; sen.x \;\; + \;\; C$

5) $\int \frac{1}{cos^2 x}.dx \;\; = \;\; tg(\,x\,) \;\; + \;\; C$

6) $\int e^x \;\; .dx \;\; = \;\; e^x \;\; + \;\; C$

7) $\int \frac{1}{1+x^2}.dx \;\; = \;\; arctg(\,x\,) \;\; + \;\; C$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx \;\; = \;\; arcsen(\,x\,) \;\; + \;\; C$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx \;\; = \;\; -arc.cos(\,x\,) \;\; + \;\; C$

9.13.2 Técnicas de "integración" ó de "búsqueda de primitiva":

Existen distintas técnicas que permiten buscar primitivas "con método". Veremos sólo algunas de ellas y, dado su carácter, las veremos <u>directamente en la práctica</u>. Los métodos que vamos a ver y usar son:

I) <u>*método de integración por descomposición*</u>

II) <u>*método de integración por sustitución*</u>

III) <u>*método de integración por partes*</u>

IV) <u>*método de integración por desarrollo en fracciones simples*</u>

9.13.3 Propiedades de la integral indefinida

II-1) Si f y g admiten primitivas en un intervalo **I** , entonces "$f \pm g$" también admite primitiva en **I** y vale: $\int \langle f(\,x\,) \pm g(\,x\,) \rangle.dx \;\; = \;\; \int f(\,x\,).dx \;\; \pm \;\; \int g(\,x\,).dx$

II-2) Si f admite primitiva en un intervalo **I**, **k** $\in \Re$; entonces " **k.** f " también admite primitiva en **I** y vale: $\int k\,.\,f(\,x\,).dx \;\; = \;\; k \cdot \int f(\,x\,).dx$

II-3) $(\int f(\,x\,).dx\,)' \;\; = \;\; f(\,x\,)$

Por definición: $\int f(\,x\,).dx \;\; = P(\,x\,) + C$ con $P'(x) = f(x)$;

entonces $(\int f(\,x\,).dx \;\;)' = (\,P(\,x\,) + C \;\;)' \;\; = P'(\,x\,) = \; f(\,x\,)$ **(q.e.d.)**

II-4) $\int f'(\,x\,).dx = \; f(\,x\,) + C$

Por definición: $\int f'(\,x\,).dx \;\; = P(\,x\,) + C$, con P primitiva de f .

Como f (x) es obviamente una primitiva de f'(x), entonces P(x) = f(x). **(q.e.d.)**

9.13.4 Notas:

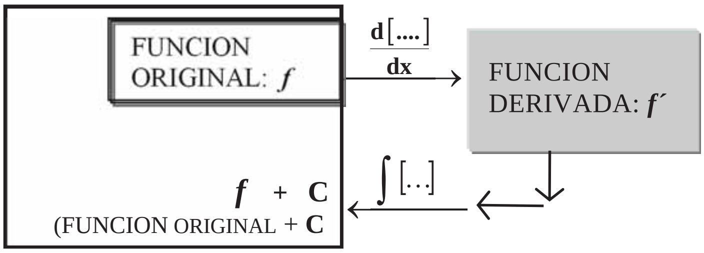
a) II-1 y II-2 se resumen en una sola condición, llamada propiedad de linealidad .

$$\int \langle k_1 . f(x) + k_2 . g(x) \rangle .dx \;=\; k_1 . \int f(x).dx \;+\; k_2 . \int g(x).dx$$

b) Cabe señalar que II-3 muestra que al aplicar los dos procesos uno a continuación del otro (integración y derivación) *comenzando por el de " integración"* volvemos a la función original.

Esto puede hacernos pensar que ambos procesos son "*inversos uno del otro*".

Sin embargo II-4 muestra que si hacemos lo mismo, pero *comenzando por la derivación* volvemos a "*mucho más*" que la función original pues, debido a la constante de integración, volvemos a un conjunto infinito de funciones (***f*** + **C, C**∈**R**).



Luego, y en rigor, "integración" y "diferenciación" no son procesos inversos uno de otro. (Aplicados uno a continuación del otro, no siempre se vuelve al punto de partida: al "integrar" una "derivada" recuperamos mucho más que la función original).

Y este hecho tiene consecuencias prácticas que vemos a continuación a través de un ejemplo**.**

Ejemplo: *Se comienza a llenar un tanque con agua que sale de una canilla a una velocidad* $v(t) = 3\,t^2$, $[v]$ = lts./h.. *Si el tanque tiene* ***6 ls*** *al inicio, y una capacidad de* ***70 lts***.
¿Cuánto tarda en llenarse ?

» **Datos**: *velocidad del proceso* → $v(t) = 3\,t^2$
volumen inicial = **6** (ls) ; *capacidad del tanque:* **70** (ls)

» **Incógnita**: t_f = instante *final* ó instante en que el tanque se llena.

Si introducimos la variable **V =** ***volumen de agua en el tanque en cada instante t*** ;
* podemos reescribir la incógnita de manera más "*operativa*" → t_f / $V(t_f) = 70$.
* descubrir la existencia de una *incógnita oculta*: **V =** ***V*(t)**, (función que rige el proceso)

» **Resolución**

El problema, reformulado según el análisis previo, queda: "conocida ***v***, *velocidad* a la que se desarrolla el proceso ($v = V'$), hallar **V=*V***(t), función que *rige el proceso*" ;

Concluimos así que el problema consiste en hallar la función de la que ***proviene*** ***v***; en definitiva, en hallar "***la primitiva de v***"**.**

$$v = 3t^2 \xrightarrow{\textit{prueba y error}} P(t) = t^3 ; \quad \textbf{P} \text{ primitiva cualquiera de } v, \text{ ¿será } V\,?$$

Por **Teor.II Pr.** : $V(t) = P(t) + C \;\Rightarrow\; V(t) = t^3 + C \;\rightarrow\;$ ¿ C ?

• Aquí apreciamos el rol de la cte de integración ***C***, que es otra incógnita del problema y tan importante que si no hay algún dato que permita calcularla, ***no podemos resolver el problema.***

En este caso, tenemos ese dato: $V(0) = 6$.

Así : $V(t) = t^3 + C \;\Rightarrow\; V(0) = 0 + C \;\Rightarrow\; C = 6$.

Finalmente obtenemos ***V*** : $V(t) = t^3 + 6$ y hallamos t_f : $V(t) = 70 \;\Rightarrow\; t^3 + 6 = 70 \;\Rightarrow\; t = 4 \;\Rightarrow$ el tanque tarda **4 hs**. en llenarse.

Observamos así que al derivar se pierden datos (se pierde V_0, lo que es consistente con la realidad pues la velocidad de entrada del agua *no depende* del volumen inicial). Y así, este hecho que por un lado *valida el modelo*, por otro, ocasiona un problema a la hora de ***reconstruir V*** a partir de su derivada ***v.***

FUNCION ORIGINAL: ***V*** $\xrightarrow{dV/dt}$ ***v*** → FUNCIÓN DERIVADA. $\xrightarrow{\int v(t).dt}$ **P** (t) + **C** → **V** (t) (**P** primitiva cualquiera de ***v***)

(*) *Obtenemos una **familia de funciones** entre las cuales **una** de entre todas ellas es la función de la que partimos. Para **rescatar** la de partida se hace necesario tener algún **dato adicional** para, a partir de él, determinar el valor de la constante y, por ende, la función original .*

En este punto resulta conveniente detenerse y reflexionar acerca de los conceptos vistos.

❶ ***Integral* e *Integral Indefinida son dos conceptos distintos.***

(*) ***La integral***, $\int_a^b f(x)\cdot dx$, se calcula sobre un intervalo y su resultado es ***un número***.

(*) La integral indefinida, $\int f(x)dx$, refiere al cálculo de primitivas de **f** y su resultado es un ***conjunto de funciones***: $\int f(x)dx = P(x) + C \quad / \quad P'(x) = f(x)$

(*) La conexión entre ellas se establece en el **2ºTFCI** (regla de Barrow).

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = P(x)\Big|_a^b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\cdot dx = \left\langle \int f(t)\,dt \right\rangle\Big|_a^b$$

❷ **La regla de Barrow**,
¿resuelve el problema del cálculo de la integral para toda función f ?

Ya hemos dicho que no, pues ***no siempre existe primitiva "elemental " de f .***
Resulta claro entonces que si no existe primitiva elemental, volvemos a foja cero ya que no podemos expresar la función integral a través de una "***fórmula elemental***", obviar así el cálculo del límite de sumas. Cabe aclarar que cuando decimos que no existe primitiva elemental, ello no obedece al hecho de que no se conoce un método para hallarla, sino a que tal método no existe por razones intrínsecas a la naturaleza misma de la función.

Ej: la función $f(x)=e^{x^2}$ no admite primitiva elemental; o sea, no existe $P_{(elem.)}$ / $P' = f$

Luego, y por ej.; dada $\int_0^3 e^{x^2}dx$ no existe $P_{(elemental)}$ / $\int_0^3 e^{x^2}dx = P(3) - P(0)$

→ **¿Implica esto que la** $\int_0^3 e^{x^2}dx$ **no existe ?**

→ **No,** $f(x) = e^{x^2}$ es continua, por ende integrable. O sea, $\int_0^3 e^{x^2}dx = L \in \mathbb{R}$.

Lo que no existe es un método sencillo para calcular **"L"**

Lo mismo pasa con otras funciones como por ejemplo: $\mathbf{sen}\,(x^2)$; $\dfrac{e^x}{x}$; $\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}$

¿Cómo evaluamos la integral en el caso que no existe primitiva elemental ?

En este caso no podemos dar el valor "*exacto*" de la integral pero podemos dar "*estimaciones*" del mismo tan buenas como queramos. Y podemos hacer esto de distintas formas:

• ***Acudiendo a la definición de integral***:

Por definición la integral es el "límite de Sumas de Riemann".
Si por alguna propiedad de la función integrando podemos asegurar que el límite existe sabemos entonces que las "Sumas de Riemann" se acercan tanto como quieran a dicho valor. Luego, dichas sumas proporcionan un valioso instrumento para calcular valores "***aproximados***" de la integral; valores que serán tanto mejores cuanto mayor sea **"n"**, la cantidad de sumandos que se tomen.

$$\int_0^3 e^{x^2} dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} e^{c_i^2} \cdot \Delta x_i \quad \Rightarrow \quad \int_0^3 e^{x^2} dx \approx \sum_{i=1}^{n} e^{c_i^2} \cdot \Delta x_i$$

• ***Aproximando la función por otra función "integrable" (polinomios de Taylor)***

O sea, otra forma de obtener un valor aproximar de la integral es a partir de:

1) aproximar primero la función integrando **f** por un conveniente polinomio de Taylor,

$$\mathbf{f}(x) = e^{x^2} \xrightarrow{pol.\,de\,Taylor} p_4(x) = 1 + x^2 + x^4/2$$

$$e^{x^2} \approx 1 + x^2 + x^4/2$$

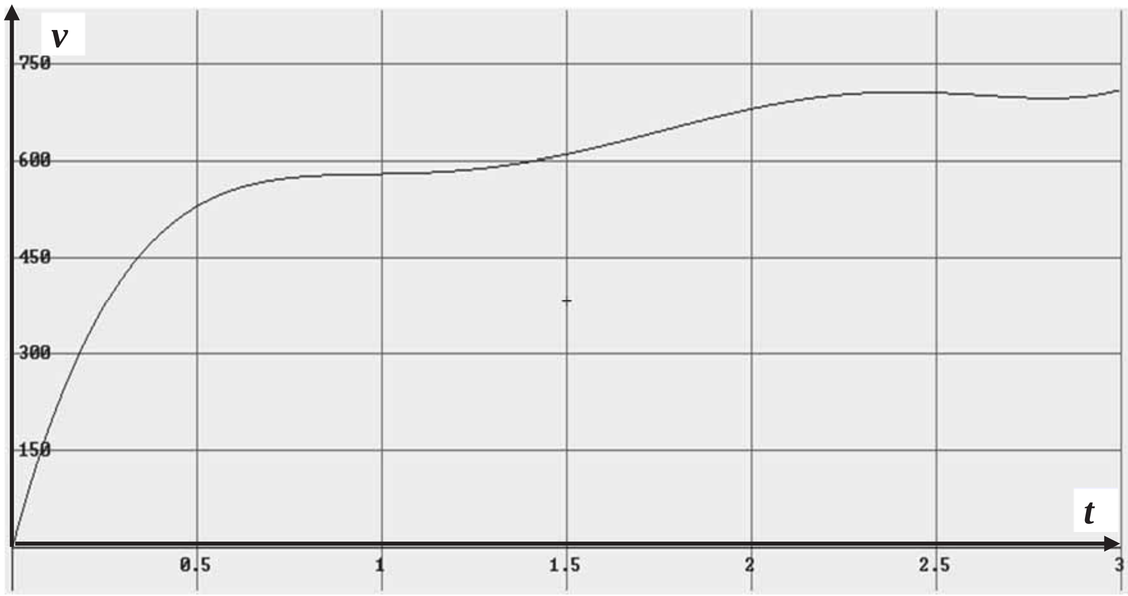
2) integrar luego el polinomio de Taylor.

$$\int_0^3 e^{x^2} dx \approx \int_0^3 \left(1 + x^2 + x^4/2\right) \cdot dx = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^3 = 36{,}3$$

❸ Evidentemente tampoco podremos utilizar la Regla de Barrow cuando la función integrando venga dada por un gráfico o una tabla de valores. En estos casos, lo único que podemos hacer es dar aproximaciones de la integral, y hacer esto a través de "*Sumas de Riemann*" convenientemente construidas a partir de los datos que se tengan.

Ejemplo:

La gráfica adjunta muestra el registro de la tasa de "disolución" (en mg/hs.) de un soluto en un solvente, durante las 3 primeras horas de puestos ambos en contacto.



Se pide: hallar una aproximación de la masa disuelta al cabo de las 3 hs .

→ <u>**función del proceso**</u>: ***m* = *masa de soluto disuelta al instante "t".***
***m* = *m*(t)**

→ ***<u>dato</u> : gráf. v ; v = velocidad de disolución del soluto en el solvente.***
v = m´ (t)

→ ***<u>incógnita</u>:*** **Δm** = ***"variación de masa"*** en el solvente, en 3 hs.
Δm = m(3) – m(0)

→ ***<u>resolución</u>:*** $\Delta m = \int_0^3 m'(t).dt$

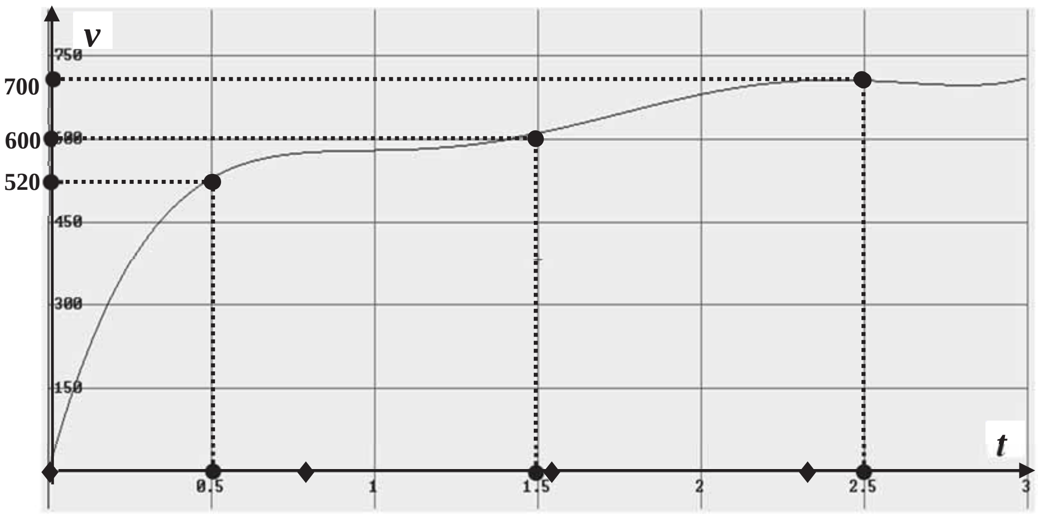
$$\Delta m = \int_0^3 v(t).dt \approx \sum_{i=1}^{3} v(c_i).\Delta t_i$$

- **<u>Partición del [0;3]</u>:** $P = \{0 ; 1; 2; 3\}$; $\Delta t_i = 1$
- **<u>Selección de puntos compatible con P</u>:** $Q = \{c_1 = 0.5 ; c_2 = 1.5; c_3 = 2.5\}$
- **<u>Cálculo de la aproximación *TOTAL*</u>:** $\sum_{i=1}^{3} v(c_i).\Delta t_i$

$$\sum_{i=1}^{3} v(c_i).\Delta t_i = \sum_{i=1}^{3} v(c_i) = v(0.5) + v(1.5) + v(2.5)$$

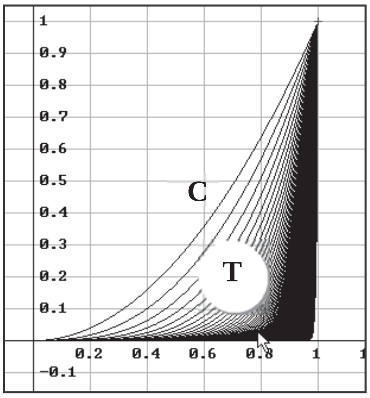
$$\approx 520 + 600 + 700 = 1820$$

→ **<u>Rta</u>:** la masa disuelta al cabo de las 3 hs es de, aproximadamente, **1820 mg.**



9.14 Apéndice

Cálculo, por el *método de exhauscíón*, del área de T, trapezoide determinado por $f(x) = x^2$ en $I = [0; 1]$.



1• Comenzamos calculando para $n = 4$.

2• Seguimos con $n = 8$; 16; ....;

3• Para cada n, tomamos: $\Delta x_i = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$, $\forall i$

4 • Construimos Sumas de Riemann (Inferior y Superior):

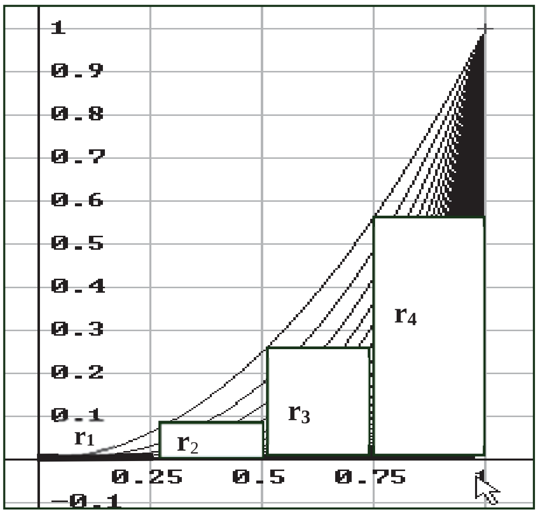
* **SR(*inf*)** $\rightarrow$ $c_i \in I_i$ / $f(c_i) = m_i$ = ***mínimo*** de f en I_i → altura del r_i

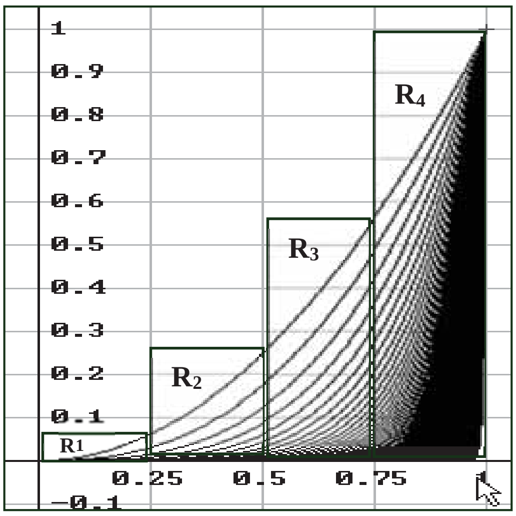
$$r_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} r_i \quad \text{(región escalonada inferior)}; \quad a(r_i) = m_i \times \frac{1}{n}$$

* **SR(*sup*)** $\rightarrow$ $c_i \in I_i$ / $f(c_i) = M_i$ = ***máximo*** de f en I_i → altura del R_i

$$R_{[n]} = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \quad \text{(región escalonada superior)}; \quad a(R_i) = M_i \times \frac{1}{n}$$

➢ $[n=4] \rightarrow 4 I_i$; $\Delta x_i = ¼$; $x_i = x_{i-1} + ¼$; $x_0 \equiv 0$ $\Rightarrow$ $P = \{x_0 \equiv 0;\ 1/4;\ 2/4;\ 3/4;\ x_4 \equiv 1\}$

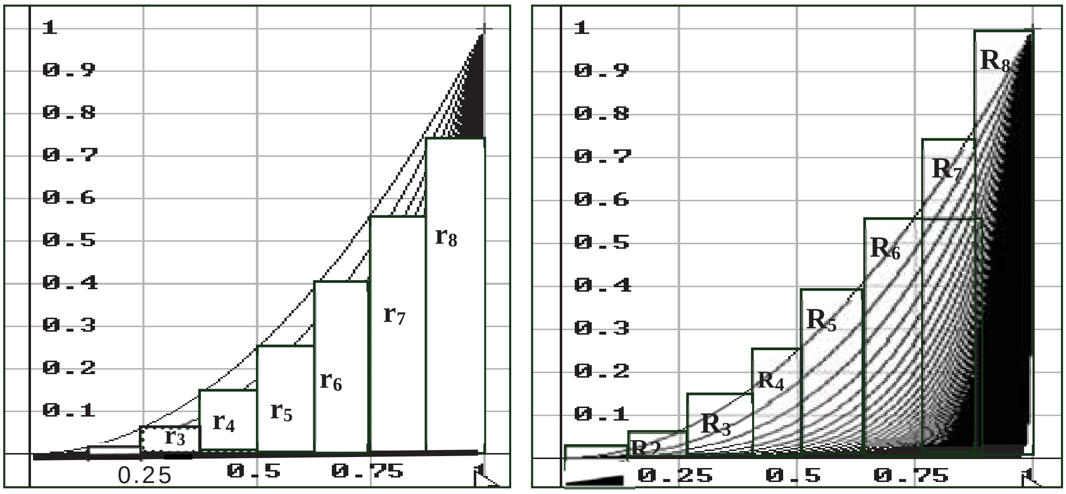




$r_{[4]}$ = región escalonada inferior (**n = 4**) $R_{[4]}$ = región escalonada superior

$$a\, r_{[4]} = \sum_{i=1}^{4} a(r_i) = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot \frac{1}{4} = 0.22 \qquad a\, R_{[4]} = \sum_{i=1}^{4} a(R_i) = \sum_{i=1}^{4} M_i \cdot \frac{1}{4} = 0.47$$

➢**[n=8]**→ **8I**i ; $\Delta x_i = 1/8 \Rightarrow x_i = x_{i-1} + 1/8 \Rightarrow P = \{x_0 \equiv 0;\ 1/8;\ 2/8;\ 3/8;\ldots;\ x_8 \equiv 1\}$.



r [8] = región escalonada inferior (***n = 8***) **R** [8] = región escalonada superior

$a\ \mathbf{r}_{[8]} = \sum_{i=1}^{8} a(r_i) = 0.27$ $a\ \mathbf{R}_{[8]} = \sum_{i=1}^{8} a(R_i) = 0.39$

➢ En ambos casos (**n** = **4; 8**) *vemos* que: $r_{[n]} \subseteq T \subseteq R_{[n]}$

➢ que, si **T** fuera “medible”: $a\, r_{[n]} \le a(T) \le a\, R_{[n]}$.

➢ Vamos entonces al ***4to*** y ***5to paso*** del proceso; es decir, a ordenar el cálculo de modo que si existe algún “**patrón**” en la formación de los términos de la sucesión , este se haga “**visible**”.

Repetimos el proceso tanto como sea necesario hasta hallar un *patrón* de formación

n	Δx_i	$ar_{[n]} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i \times \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} m_i \le$	$a(T)$	$\le aR_{[n]} = \sum_{i=1}^{n}\left(M_i \times \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} M_i$
4	¼	$\frac{1}{4}\,.\,[(1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2]$ $(\frac{1}{4})^3.\,(1^2 + 2^2 + 3^2) = \mathbf{0.22} \le$	$a(T)$	$\frac{1}{4}\,.\,[(1/4)^2 + (2/4)^2 + (3/4)^2 + (4/4)^2]$ $\le \mathbf{0.46} = (\frac{1}{4})^3.\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$
8	⅛	$\frac{1}{8}\,.[(1/8)^2 + (2/8)^2 + \ldots + (7/8)^2]$ $(\frac{1}{8})^3.(1^2+2^2+3^2+\ldots+7^2) = \mathbf{0.27} \le$	$a(T)$	$\frac{1}{8}\,.[(1/8)^2 + (2/8)^2 + \ldots + (7/8)^2 + (8/8)^2]$ $\le \mathbf{0.39} = (\frac{1}{8})^3.(1^2+2^2+\ldots+7^2+8^2)$
16	1/16	.... $\left(\frac{1}{16}\right)^3.(1^2+2^2+\ldots+15^2) = \mathbf{0.30} \le$	$a(T)$	.... $\le \mathbf{0.34} = \left(\frac{1}{16}\right)^3.(1^2+2^2+\ldots+15^2+16^2)$
		....	....	....
n	$\frac{1}{n}$	$\left(\frac{1}{n}\right).\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$ $\left(\frac{1}{n}\right)^3.(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)$ $\left(\frac{1}{n}\right)^3.\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$ (*) $\le$	$a(T)$	$\left(\frac{1}{n}\right).\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$ $\left(\frac{1}{n}\right)^3.(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2)$ $\le \left(\frac{1}{n}\right)^3.\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ (*)

(*) resultado obtenido al aplicar la siguiente fórmula:
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$$

➢ El trabajo realizado permite:

a) ***Expresar*** el área de cada región por medio de una ***"fórmula elemental"***:

* área región escalonada inferior → $ar_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3.\,\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

* área región escalonada superior → $aR_{[n]} = \left(\frac{1}{n}\right)^3.\,\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

b) ***Observar*** que se generan ***dos funciones***, $a(n) = ar_{[n]}$ y $A(n) = aR_{[n]}$; ambas con dominio en los naturales.

Al conjunto imagen de una función con dominio en **N**, se lo llama ***<u>sucesión</u>***; así, vemos que al variar n, con $n \to +\infty$, se originan dos ***sucesiones:***

* la correspondiente a las áreas de las regiones escalonadas inferiores: $\{ar_{[n]}\}_{n\in N}$

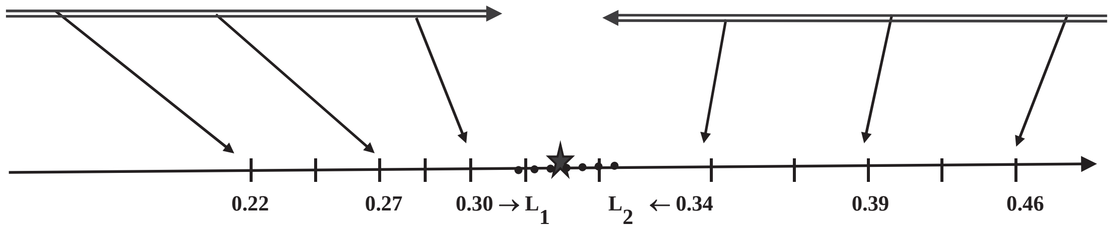
* la correspondiente a las áreas de las regiones escalonadas superiores: $\{aR_{[n]}\}_{n\in N}$

c) ***Comprobar*** que al afinarse la partición la sucesión dada por $\{ a\, r_{[n]} \}_{n\in N}$, ***crece***; mientras que la determinada por $\{ a\, R_{[n]})\}_{n\in N}$. , ***decrece***.

Además, para todo n siempre resulta $a\, r_{[n]}$ menor que $a\, R_{[n]}$.

$$a\,r_{[4]} \leq \ldots\ldots \leq a\,r_{[8]} \leq \ldots\ldots \leq a\,r_{[16]} \leq \ldots\ldots \leq a\,R_{[16]} \leq \ldots\ldots \leq a\,R_{[8]} \leq \ldots\ldots \leq a\,R_{[4]}$$

$$\mathbf{0.22 \leq \ldots\ldots \leq 0.27 \leq \ldots\ldots \leq 0.30 \leq \ldots\ldots \leq 0.34 \leq \ldots\ldots \leq 0.39 \leq \ldots\ldots \leq 0.46}$$



Observaciones:

Se puede probar que $a\, r_{[n]}$ está ***acotada superiormente*** y que $a\, R_{[n]}$ está ***acotada inferiormente***; que esto implica (según un resultado básico del Cálculo) que ambas tienen límite para $n \to \infty$ Así:

- para $n \to \infty$; $a\, r_{[n]} \to L_1$
- para $n \to \infty$; $a\, R_{[n]} \to L_2$

Luego:

si $L_1 = L_2 = L \Rightarrow$ *T es medible y* $a(T) = L$
si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ *T no es medible, no existe* $a(T)$

En el ejemplo tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} a\, r_{[n]} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 . \frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6} . \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a\, R_{[n]} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 . \frac{n\cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6} . \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \right] = \frac{1}{3}$$

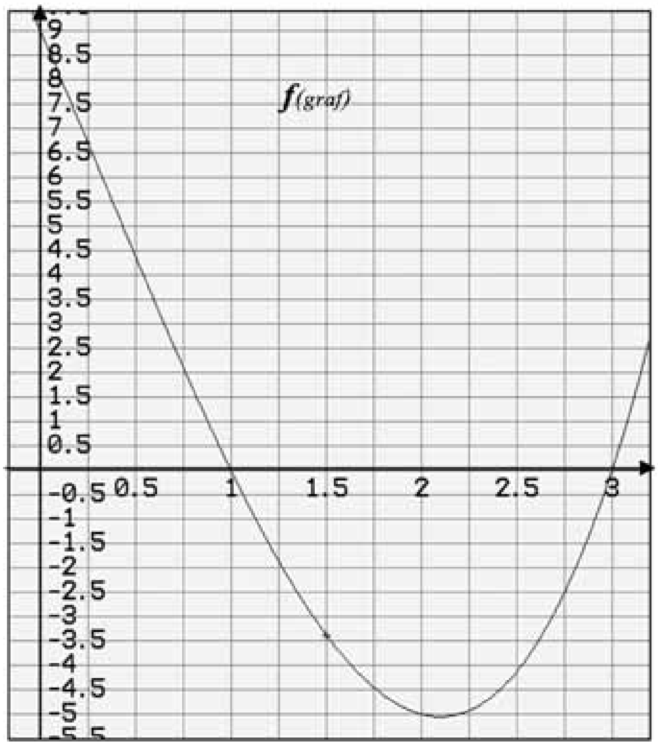
O sea, $L_1 = L_2 = \frac{1}{3}$.

Conclusión: **T** es medible y $a(T) = \frac{1}{3}$

9.15 Ejercicios

<table>
<tr><td rowspan="2">INTEGRAL
(de una función en un intervalo)</td><td>▶ Dom. f = [a ; b]
▶ P → partición de I; $P = \{ x_0 \equiv a;\ x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_i;\ldots;\ x_n \equiv b\}$
▶ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ → amplitud del subintervalo $I_i = [\, x_{i-1} ; x_i \,]$.
▶ c_i → punto del subintervalo I_i
▶ Q → selección de ptos compatibles con P ; $Q = \{c_1;\ c_2;\ c_3;\ \ldots;\ c_i;\ldots;\ c_n\}$
▶ $S(f ; P ; Q)$ → SUMA de RIEMANN ; $S(f ; P ; Q) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$</td></tr>
<tr><td><u>Definición</u>: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P| \to 0} S(f ; P ; Q)$ (cuando el límite existe)</td></tr>
</table>

1) Para la función f adjunta se pide:



a) dadas P y Q en [**0 ; 3**] ;
$P = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
$Q = \{½ ;\ 3/2 ; 5/2 \}$.
controlar que Q sea compatible con P y, leyendo del graf., calcular $S(f; P ;Q)$.
Indicar que representa el valor obtenido.

b) dar una aproximación por defecto de
$I = \int_0^3 f(x)\,dx$, tomando **n =6** .

*<u>Sug</u>: tomar c_i tal que $f(c_i) \approx$ **min** f en I_i*

c) dar una aproximación por exceso de
$I = \int_0^3 f(x)\,dx$, tomando **n =6**

*<u>Sug</u>: tomar c_i tal que $f(c_i) \approx$ **máx** f en I_i*

d) para $I = \int_0^3 f(x)\,dx$;

i) dar una cota inferior y otra superior de **I**.

ii) si $I^* = \int_0^3 f(t)\,dt$: ¿es $I^* = I$?; porqué?.

iii) si $I^{**} = \int_0^3 f(t)\,dx$: ¿es $I^{**} = I$?; porqué?. (<u>Sug</u>: calcular **I**** aplicando props de integs)

e) En el proceso de llenado/vaciado de un tanque indicamos con V al *volumen de agua en el tanque* y con v, a la *velocidad de variación de V en el tanque.* ([t]= hs ; [V]= ls. ; [v] = ls./h). Si $V = V(t)$, $V_o = 10$ y $v = f_{(graf)}$, entonces :

i) $f_{(graf)}$, ¿es el gráfico de $V'(t)$?; **V**, ¿es una primitiva de v ?, porqué?.

ii) ¿ $\Delta V_{(3\ hs)} = V(3) - V(0)$?. Aquí, ¿se puede calcular $\Delta V_{(3)}$ con esta diferencia?; ¿porqué?

iii) Dar una estimación del *"resultado ó efecto total"* del proceso de cambio dentro del tanque al cabo de 3 horas de haberse iniciado el mismo.

iv) Si me informan que $\int_0^3 f(t)\,dt = -2{,}2$, ¿puedo calcular **V(3)**?, ¿es **V(3) = 7,75**?

f) En el *proceso* relativo al movimiento de una partícula P sobre una recta, indicamos con $\boldsymbol{x}$ = *posición de P sobre la recta* y $\boldsymbol{v}$ = *velocidad de* P.
([$\boldsymbol{x}$]= ms., [t]= hs.)
Si $\boldsymbol{x} = \mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{x}_0 = 1$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_{(graf)}$, entonces :

i) $\boldsymbol{f}_{(graf)}$, ¿es el gráfico de **x**´(t) ? ; **x** , ¿es una primitiva de $\boldsymbol{v}$?, porqué?.

ii) ¿$\Delta\mathbf{x}_{(3\ hs)} = \mathbf{x}(3) - \mathbf{x}(0)$?. Aquí, ¿se puede calcular $\Delta\mathbf{x}_{(3)}$ con esta diferencia?; ¿porqué?

iii) dar una estimación del *"desplazamiento total de P"* al cabo de 3 horas de haberse iniciado el movimiento.

iv) si me informan que $\int_0^3 f(t)\,dt = -2,25$; ¿puedo calcular **x(3)**?, ¿es **x(3)=- 1,*25***?

v) Realizar un bosquejo de la trayectoria de P durante las 3 primeras horas de movimiento.

g) Si me informan que $\mathbf{P}(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - 9\frac{t^2}{2} + 9t$ es una primitiva de $\boldsymbol{f}_{(graf)}$, explicar porque este dato permite:

i) dar la ley de $\boldsymbol{f}$ por medio una fórmula. Obtenerla.

ii) calcular con exactitud el valor de $\mathbf{I} = \int_0^3 f(t)\,dt$. Calcularlo.

iii) dar la ley de **V** (t) por una fórmula. Darla.

iv) dar la ley de **x** (t) por una fórmula. Darla.

Primitiva *(de una función en un intervalo)*	***Definición***: dada f definida en [a ; b] ; **P** es una primitiva de f en [a ; b] $\Leftrightarrow$ $\mathbf{P}'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a ; b]$. ***Las primitivas son*** → ***una herramienta para el cálculo de integrales***. dada f *continua en* [a;b], si f *admite primitiva elemental* **P** en [a;b], entonces $$\int_a^b f(x)\,dx = \mathbf{P}(b) - \mathbf{P}(a)$$ (Regla de Barrow). ***Las primitivas son*** → ***una herramienta para el cálculo del resultado o efecto total de un proceso de cambio a v≠cte*** $$f = P' \rightarrow \int_a^b P'(x).dx = \mathbf{P}(b) - \mathbf{P}(a) = \Delta\mathbf{P}_{[a;\,b]}$$

2) **a)** Cada una de las funciones "g" de la columna **(II)** es "*primitiva*" de alguna función "h" de la columna **(I)**. Se pide unir cada función de la columna **(I)** con su primitiva.

(I)	**(II)**
1) h (x) = $3\ sen\ x - \frac{\cos x}{2}$	**a)** g (x) = 4 e^{2x}
2) h (x) = ½ + sen x . cos x	**b)** g(x) = **-** (3 cos x +1/2 senx)
3) h (x) = $\frac{x-2}{x-3}$	**c)** g (x) = ln(x-3) – ln (x-2) + 5
4) h (x) = 8 e^{2x}	**d)** g (x) = 3 sen x + 1/2 cos x
5) h (x) = $\frac{1}{x^2-5x+6}$	**e)** g(x) = ½.*x* – ¼ .cos (2x) + 3
6) h (x) = $3\cos x - \frac{sen\ x}{2}$	**f)** g(x) = ln (x-3) + x + π

b) En cada caso que esto sea posible, calcular $\int_0^{\pi} h(x)\,dx$ aplicando la Regla de Barrow.

> ***** Conocer o saber obtener ***primitivas*** de una función ***f*** continua en un intervalo [a;b], permite transformar el cálculo de ***la integral***, $\int_a^b f(x)\,dx$, en una simple resta (regla de Barrow). En lo que sigue, y dado la utilidad de esta herramienta, trabajamos sobre el concepto de "primitiva"

3) Verificar por el método más simple las siguientes afirmaciones. Dar luego tres primitivas de ***f*** .

a) **P**(x) = ½ .x - ¼ .sen (2x) + 3 es una primitiva de ***f*** (x) = sen ^{2} x, $\forall x \in [a;b]$.

b) **P**(x)= $\ln(1+\frac{1}{2-x})$ es una primitiva de ***f*** (x)= $\frac{1}{x^2-5x+6}$, $\forall x \in [a;b]$, tal que $2;3 \notin [a;b]$.

c) **P**(x) = ln |x| es una primitiva de ***f*** (x) = $\frac{1}{x}$; $\forall x \in [a;b]$, tal que **0** $\notin$ [a;b].

d) **P**(x) = $\frac{1}{a}\,arctg\,(\frac{x}{a})$ es una primitiva de ***f*** (x)= $\frac{1}{a^2+x^2}$, $\forall x \in [a;b]$ y $\forall\ a \neq 0$.

e) **P**(x) = $\frac{a^2}{2}\,arcsen\,(\frac{x}{a}) + \frac{1}{2}(x\,.\sqrt{a^2-x^2}\,)$ es una primitiva de ***f*** (x) = $\sqrt{a^2-x^2}$,

$\forall\ a \neq 0$ y $\forall x \in [a;b] \subseteq [-|a|\ ;\ |a|\ ]$

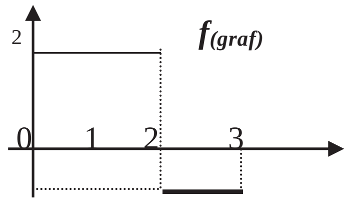
4) Hallar por prueba y error la primitiva **F** de ***f*** que satisface la condición que se indica. Verificar.

a) ***f*** (x) = 5 $x^4 - 3x^2$; **F**(0) = 4

b) $\boldsymbol{f}(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$; $\mathbf{F}(1) = 0$

c) $\boldsymbol{f}(t) = e^t + \text{sen } t$; $\mathbf{F}(0) = -2$

d) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{(graf)}$ adjunta ; $\mathbf{F}(0) = 1$
F continua en [0; 3].



5) Hallar por prueba y error ***g*** si se sabe que:

a) $\boldsymbol{g}'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \,.\, x^{-1}$; $\boldsymbol{g}(4) = 5$

b) $\boldsymbol{g}'(x) = 1/x$; $x < 0$; $\boldsymbol{g}(-1) = 5$

c) $\boldsymbol{g}'(x) = x^2 + x + \frac{1}{6}$; $\boldsymbol{g}(1) = 1$

d) $\boldsymbol{g}''(x) = 2x + 1$; $\boldsymbol{g}'(0) = \frac{1}{6}$ y $\boldsymbol{g}(1) = 0$

e) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)$ y ***g*** es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta con <u>*aceleración constante*</u>, $\boldsymbol{a} = 5$ (m/seg^2), velocidad inicial $\boldsymbol{v_o}$ y posición inicial $\boldsymbol{x_o}$.

f) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t)$ y ***g*** es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta con <u>*aceleración*</u> $\boldsymbol{a} = t + 5$ (m/seg^2), velocidad inicial $\boldsymbol{v_o} = \boldsymbol{-6}$ (m/seg) y posición inicial $\boldsymbol{x_o} = \boldsymbol{9}$ (ms.)

*** *<u>CÁLCULO de PRIMITIVAS de f</u>* → *P / P´= f***

En lo que sigue procedemos a sistematizar el cálculo de primitivas. Para ello vamos a:

1º) Construir una tabla de primitivas "inmediatas" (aquellas que se obtienen por "prueba y error")

2º) Estudiar métodos para obtener primitivas, cuando las mismas no sean "inmediatas". Estos son:

I) <u>*Descomposición*</u>

II) <u>*Sustitución*</u>*:* (II-a) Directa; (II-b) Inversa.

III) <u>*Integración por Partes*</u>

IV) <u>*Descomposición en Fracciones Simples*</u>

<u>INTEGRAL "*Indefinida*"</u>	***<u>Definición</u>*:** $\int f(x)\,dx = P(x) + C \quad / \; C \in \mathbf{R}$, **P** primitiva de ***f*** . (o sea, <u>*símbolo*</u> usado para indicar <u>*todas*</u> las <u>*primitivas*</u> de ***f***)

TABLA de INTEGRALES INDEFINIDAS "Inmediatas"

* Completar la siguiente "tabla" procediendo por "prueba y error":

f (x)	P(x)	$\int f(x)\,dx = P(x) + C$
1	(x)	$\int dx = x + C$
x^{α}; $\alpha \neq -1$		
$\frac{1}{x}$		
e^{x}		
a^{x} $(a > 0)$		
sen x		
cos x		
$\frac{1}{\cos^2 x}$		
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$\frac{1}{1+x^2}$	(arc tg x)	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \text{arc tg } x + C$

Método I: ***Descomposición*** → $\int [a.f(x) + b.g(x)]\,dx = a\int f(x).dx + b\int g(x).dx$

6) Resolver usando el método de descomposición y la tabla de integrales inmediatas.

a) $\int (5x^4 + 12x^2)\,dx$

b) $\int [(x-2)^2 + 4x - 3].dx$

c) $\int \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2}.\,dx$

d) $\int \left[\sqrt[5]{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right].\,dx$

e) $\int \sqrt{x}.\,(x - \sqrt{x} + 1).\,dx$

f) $\int (3 \text{ sen } x - \frac{\cos x}{2}).\,dx$

g) $\int \frac{3x.\text{sen}^2 x - (1 - \cos^2 x)}{\text{sen}^2 x}.\,dx$

i) $\int (1 + \text{tg}^2 x)\,dx$

j) $\int \frac{(1-\cos x).(1+\cos x)}{\text{sen}x}.dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3.e^x + 2.x + e}{x^3}.dx$

l) $\int e^x (1 + 2e^{-x}).dx$

m) $\int \frac{x^2 + t^2}{x^2}.\,dx$

n) $\int \frac{x^2 + t^2}{x^2}.\,dt$

o) $\int \frac{\text{sen}\,x}{x}.\left(x + \frac{t.x}{\text{sen}\,x}\right).\,dx$

Método II: ***Sustitución***

II-a) ***Directa:***

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx \underbrace{=}_{\substack{g(x)=u \\ g'(x)dx=du}} \int f(u)\,du \underbrace{=}_{\substack{P \text{ tal que} \\ P'(u)=f(u)}} P(u)+C = P(g(x))+C$$

7) Calcular :

7.1 ***a)*** $\int \frac{1}{x+3}\,dx$ ***b)*** $\int \frac{1}{x-5}\,dx$

7.2 ***a)*** $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$ ***b)*** $\int \frac{1}{-4x-5}\,dx$

7.3 ***a)*** $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1}\,dx$ ***b)*** $\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}\,dx$

7.4 ***a)*** $\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\,dx$ ***b)*** $\int \frac{1}{25+x^2}\,dx$

7.5 ***a)*** $\int 2.e^{2.x+3}\,dx$ ***b)*** $\int -5.e^{1-5x}\,.dx$

7.6 ***a)*** $\int e^{sen.x}\cos x\,dx$ ***b)*** $\int e^{x^2+3}.2x\,.dx$

7.7 ***a)*** $\int \cos(x^3).3x^2\,dx$ ***b)*** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,.dx$

7.8 ***a)*** $\int (x^2+3x)^5(2x+3)\,dx$ ***b)*** $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,.dx$

7.9 ***a)*** $\int \frac{5.x^4+12x^3}{x^5+3x^4-5}\,.dx$ ***b)*** $\int \frac{1}{x.\ln x}\,.dx$

Tabla Integrales "Semi - Inmediatas"
$\int \frac{1}{x+b}\,dx =$
$\int \frac{1}{ax+b}\,dx =$
p : *polinomio* $\int \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx =$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx =$
$\int e^{m.x+h}\,.dx =$
$\int e^{g(x)}.g'(x).\,dx =$
$\int \cos(g(x)).g'(x).\,dx =$
$\int (g(x))^{\alpha}.g'(x).\,dx =$
$\int \frac{g'(x)}{g(x)}.\,dx =$

8) **A)** Calcular usando el método de sustitución directa o tablas de integrales *(inmed.* ó *semi-inmediata)*. Verificar los resultados obtenidos mediante derivación.

a) $\int (x^2+6x-2)^{20}(x+3)\,dx$

b) $\int (2x-4)^{-5}\,dx$

c) $\int e^{-5x}\,.dx$

d) $\int e^{x^3}.x^2\,.dx$

e) $\int x\,e^{1-5x^2}\,.dx$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^x}.\,dx$

i) $\int \frac{x^5+4x^3+x}{x^6+6x^4+3x^2+2}\,.dx$

j) $\int \cos^2 x\ sen\ x\,dx$

k) $\int \cos^3 x\,dx$

l) $\int \frac{1-\ln x}{x.\ln x}.\,dx$

f) $\int cos\ x\ \ sen\ x\ \ dx$ **m)** $\int\ sen^2 x\ dx$ (aplicar:sen^2 x=2-2 cos(2x))

g) $\int \sqrt{9-3x}\ \ dx$ **n)** $\int [cos(2x) + x.cos(x^2). + cos(x-2)]dx$

B) Para las ***f*** del item **(A)** calcular $\int_0^{\pi} f(x).dx$ aplicando la *Regla de Barrow*, en cada caso que ello sea posible.

C) El "método de sustitución" consiste esencialmente en un "cambio de variable". Así, para calcular una ***integral*** (*´definida´*) con este método, no es necesario *volver* a la variable original.
Verificar la validez de la siguiente fórmula para el cambio de variable en la ***integral*** (*´definida´*) suponiendo que se conoce ***P ,*** una primitiva de ***f*** .

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x).dx \underbrace{=}_{g(x)=u} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u).du = P(g(b)) - P(g(a)).$$

* Calcular de esta forma: $\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{sen\ x\ \ cos\ x.dx}$; $\int_0^{\pi/2} \boldsymbol{sen(2x-\pi).dx}$;

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\boldsymbol{cos\ u}}{\boldsymbol{sen^2 u - 4\,sen\ u + 4}}\boldsymbol{.du}\ ; \quad \int_0^1 \frac{\boldsymbol{x^5 + 4x^3 + x}}{\boldsymbol{x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 2}}\boldsymbol{.dx}\ .$$

D) Verificar que las siguientes integrales ***no se pueden calcula***r por ***sustitución directa***.

$$\int \sqrt{4 - \boldsymbol{x}^2}\ \boldsymbol{dx}\ \ ; \quad \int \frac{1}{\boldsymbol{x}^2 - 1}\boldsymbol{.dx}\ ; \quad \int \frac{\boldsymbol{sen\ x}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{.dx}\ \ ; \quad \int \boldsymbol{e^{x^2}dx}$$

Método II: *Sustitución*

II-b) *Inversa:*

$$\int f(x).dx \underbrace{=}_{\substack{x=k(t)\\ dx=k'(t)dt}} \int f(k(t))\,k'(t)dt \underbrace{=}_{\substack{P \text{ tal que}\\ P'=(f\circ k).k'}} P(t)+C=P(k^{-1}(x))+C$$

** ¿Qué condiciones deben darse para poder realizar una "sustitución inversa"?*

9) A) Establecer un intervalo donde la integral indicada exista. Calcular luego la integral usando el método de sustitución inversa. Verificar los resultados obtenidos mediante derivación.

a) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; $x = 2$ sen t (dato : $\int \cos^2 t.\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}.\,\text{sen}(2t)$)

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.\,dx$; x = sen t

c) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,.\,dx$; x = 3 sen t

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$; x = sen t (dato : $\int \text{sen}^2 t.\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.\,\text{sen}(2t)$)

B) En este caso tampoco es necesario *volver* a la variable original para calcular la integral (*´definida´*) aplicando Barrow ya que, supuesto que se conoce ***P,*** una primitiva de ($f_o\,k$). k' vale la siguiente fórmula para el cambio de variable por sustitución inversa ($x = k$(t)).

$$\int_a^b f(x).\,dx \underbrace{=}_{\substack{x=k(t)\\ \to\ t=k^{-1}(x)\\ c=k^{-1}(a)\\ d=k^{-1}(b)}} \int_c^d f(k(t)).k'(t).dt = P(d)-P(c).$$

* Calcular de esta forma: $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,.dx$; $\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$; $\int_{-0,5}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$

* Justificar la siguiente igualdad con un argumento "geométrico":

$$\int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx = 2.\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.dx$$

C) Verificar que las siguientes integrales ***no se pueden calcular*** por ***sustitución*** (ni directa, ni inversa):

$$\int x\ \text{sen}\ x\ dx \ ; \quad \int \frac{1}{x^2-1}\,.dx\ ; \quad \int \frac{\text{sen}\ x}{x}.dx \ ; \quad \int e^{x^2}dx$$

Método III: ***Integración por Partes*** $\int u.dv = u.v - \int v.du$

10) **A)** Calcular usando el método de descomposición y la tabla de integrales inmediatas ó semi-inmediata.
Verificar los resultados obtenidos mediante derivación

a) $\int x\, e^{x}\, dx$

b) $\int x^2 e^{x}\, dx$

c) $\int x\, e^{2x}\, dx$

d) $\int x\,.\text{sen}\, x\, dx$

e) $\int x^2 .\cos x\, dx$

f) $\int x .\cos^3 x\, dx$

g) $\int e^x\, \text{sen}\, x\, dx$

h) $\int x.\sqrt{x+4}\, dx$

p) $\int \cos^2 x\, dx$

q) $\int \text{sen}^2 (x-1)\, dx$

r) $\int \cos(\ln x)\, dx$

s) $\int \ln x\, dx$

t) $\int x.\ln^2 x\, dx$

u) $\int x^2.\ln x\, dx$

v) $\int \text{arcsen}\, x\, dx$

w) $\int x\,.\,\text{arctg}\, x\, dx$

x) $\int \sqrt{x}\ \boldsymbol{sen}\ \sqrt{x}\ \boldsymbol{dx}$ (sustituir: $\boldsymbol{x} = t^2$)

B) Calcular $\int_0^{\pi} f(x).dx$ para $\boldsymbol{f}$ del item **(A)**; en cada caso que se pueda aplicar la *Regla de Barrow*.

C) Verificar que las siguientes integrales ***no se pueden integrar "por partes"***

$$\int \frac{1}{x^2-1}.dx \quad ; \quad \int \frac{\text{sen}\, x}{x}.dx \quad ; \quad \int e^{x^2} dx$$

Método IV: *para funciones racionales* → $\int f(x)\, dx$ con $f(x) = \dfrac{r(x)}{q(x)}$ (*r; q polinomios)*

El método de ***desarrollo en fracciones simples,*** permite integrar cualquier función racional.
No estudiaremos este método en forma exhaustiva, pero profundizaremos lo suficiente para mostrar cómo cualquier función racional se puede integrar mediante *reducción* a las *fórmulas básicas*:

$$\int x^n .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1); \qquad \int \frac{1}{x}.dx = \ln|x| + C\ ;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \text{arctg}\ x + C \quad ; \qquad \int \frac{1}{x^2-1}.dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

* Una función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se dice "*propia*" si el grado de $\boldsymbol{p}$ es ***menor*** que el de $\boldsymbol{q}$.

* Así, en la integración de funciones racionales, tenemos una primera cuestión a resolver:

$f(x) = \dfrac{r(x)}{q(x)}$ ⇒ gr r < gr q

no → ***dividiendo*** encontramos polinomios $t(x)$ y $p(x)$ /

$$\frac{r(x)}{q(x)} = t(x) + \frac{p(x)}{q(x)} \quad ; \quad \text{gr } p < \text{gr } q$$

si ↓

desarrollando en fracciones simples, reducimos a las fórmulas básicas.

Desarrollo en fracciones simples

Dada la función racional "propia" $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (gr p < gr q) ;

donde gr q = **n** y q tiene **m** raíces reales y distintas (**m** ≤ **n**), x_1 , x_2 , x_3 ,........, x_m ; existen **n** números reales A_1 , A_2 , ..., A_n , tal que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots\dots + \frac{a(x)}{c(x)} + \dots\dots + \frac{A_n}{(x-x_m)} ;$$

$a(x)$: lineal; $c(x)$: cuadrática

* Luego, dada la función racional propia, <u>si hace falta</u>, realizamos su <u>desarrollo en fracciones simples</u> e integramos. Las integrales a la derecha del igual son o pueden ser reducidas a fórmulas básicas.

11) Calcular (gr p < gr q)

11.1) ***a)*** $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{1}{x-5}\,dx$

11.2) ***a)*** $\displaystyle\int \frac{x}{x+3}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{x}{-4x+8}\,dx$

11.3) ***a)*** $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}\,dx$

11.4) ***a*** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+16}\,dx$

11.5) ***a)*** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}.dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}.dx$

11.6) ***a)*** $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+36}{(x^2-4)(x^2-9)}.dx$

Formas Básicas:
$I_1 : \displaystyle\int \frac{1}{x+b}\,dx =$
$I_2 : \displaystyle\int \frac{x}{ax+b}\,dx =$
$I_3 : \displaystyle\int \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx =$
$I_4 : \displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx =$
$I_5 : \displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}.dx =$
$I_6 : \displaystyle\int \frac{p(x)}{x^4+bx^3+cx^2+dx+e}.dx$ (4 raíces reales ≠ s)

11.7) a) $\int \frac{1}{(x-4)^3}.dx$ b) $\int \frac{1}{(x+2)^2}.dx$

11.8) a) $\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)^3}.dx$

11.9) a) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}.dx$ b) $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+5}.dx$

(b^2- 4 a c < 0)

11.10) a) $\int \frac{p(x).\,dx}{(x^2+4x+5).(x-1)}$

(b^2- 4 a c < 0)

$I_6 = \int \left[\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \frac{A_4}{x-x_4} \right].dx$
$I_7: \int \frac{1}{(x+a)^n}.dx =$ (n $\neq$ 1)
$I_8: \int \frac{p(x)}{x^4+bx^3+cx^2+dx+e}.dx =$ (una raíz triple) $\int \left[\frac{A_1}{(x-x_1)^3} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{x-x_1} + \frac{A_4}{x-x_4} \right].dx$
$I_9: \int \frac{\alpha\, x+\beta}{ax^2+bx+c}.dx =$ $\alpha \neq 0$ → trab.alg. + I_3; $\alpha = 0$; completar cuadrados $\int \frac{\beta}{(x+h)^2 \pm k}.dx$ → I_4 ó I_5
$\int \frac{p(x).\,dx}{(ax^2+bx+c).(x+d)} =$ $\int \left[\frac{A_1.x+A_2}{ax^2+bx+c} + \frac{A_3}{(x+d)} \right].dx$

12) A) Calcular usando el desarrollo en fracciones simples.
Verificar los resultados obtenidos mediante derivación

a) $\int \frac{x-3}{x^2+4x-5}.dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$

c) $\int \frac{dx}{2x^2+2x-12}$

d) $\int \frac{3x^2-10x-4}{x^3-x^2-4x+4}.dx$

e) $\int \frac{5x-1}{x^3-x^2}.dx$

f) $\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x^2-4x+4)}.dx$

g) $\int \frac{x^2+3x-2}{x^4+x^3-5x^2+3x}.dx$

h) $\int \frac{2.x^3}{x^2-x-2}.dx$

i) $\int \frac{2x^3-12x^2+23x-17}{x^2-3x+2}.dx$

j) $\int \frac{6.x}{(x-1)(x^2+1)}.dx$

k) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$

l) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+6x+10}$

m) $\int \frac{x^3}{x^4+1}.dx$

n) $\int \frac{1}{x^4-16}.dx$

B) Calcular $\int_0^1 f(x).dx$ para f del ítem **(A)**; en cada caso que se pueda aplicar la *Regla de Barrow*.

C) Las siguientes integrales, ***¿se pueden integrar usando el desarrollo en fracciones simples?***

$$\int \frac{sen\,x}{x}\,.dx \quad ; \quad \int e^{x^2}\,dx$$

..... y se terminaron los "métodos".

¿Qué pasa con estas funciones?, ¿son integrables? Investigue esta cuestión.

13) Calcular $\int sen^5 x\; dx$ usando la siguiente "fórmula de recurrencia":

$$I_n = \int sen^n x\; dx \;\Rightarrow I_n = \frac{-1}{n} sen^{n-1} x\; cosx + \frac{n-1}{n}\; I_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

14) Calcular $\int \frac{dx}{cos^4 x}$ usando la siguiente "fórmula de recurrencia":

$$I_n = \int \frac{dx}{cos^n dx} = \int sec^n x\; dx \;\Rightarrow I_n = \frac{1}{n-1}\,\frac{sen^x}{cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\; I_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

15) Calcular utilizando el método que más convenga:

a) $\int \sqrt{x}\; (x^2+1)^2\; dx$

b) $\int \frac{senx}{\sqrt{cos^3 x}} dx$

c) $\int \frac{x\; arcsenx}{\sqrt{1-x^2}} dx$

d) $\int \sqrt{2x+1}\; dx$

e) $\int \frac{x^2}{x^2+x-6} dx$

f) $\int \frac{sen^3 x}{cos^2 x} dx$

g) $\int \frac{1+tg^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

h) $\int x^{-2}\; sen\frac{1}{x}\; dx$

i) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

j) $\int \frac{u^2 - x^2}{u^3} dx$

k) $\int x \, arctgx \, dx$

l) $\int \ln(3t - 2) \, dt$

m) $\int arcsen(2x - 5) \, dx$

n) $\int \frac{t^4 - x^2}{t \, x} dt$

o) $\int \frac{2 \, lnx - 3}{(1 + ln^2 x)x} dx$

p) $\int \frac{dx}{4x^2 + 9}$

q) $\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4 - 1}} \, dx$

10 — Aplicaciones de la Integral

10.1 Problemas que resuelve la Integral: $\int_a^x f(x)dx$

La integral es una herramienta que permite resolver problemas de muy distinta naturaleza (físicos , biológicos , geométricos, etc…). Para estudiar esta cuestión resulta útil recordar que el proceso de integración admite tres "representaciones" distintas:

- **a)** ***simbólica*** ,
- **b)** ***verbal*** ,
- **c)** ***gráfica***.

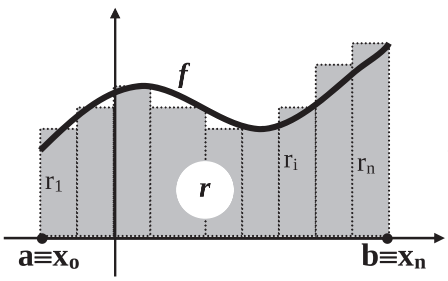
a) $$\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i \xrightarrow[\text{se aproxima cada vez más a}]{\text{cuando } n\to\infty} \int_a^b f(x).dx$$

b) el resultado "aproximado" del cambio en $[a; b]$ $\xrightarrow[\text{se aproxima cada vez más}]{\text{cuando } n\to\infty}$ al "cambio total" en $[a ; b]$.

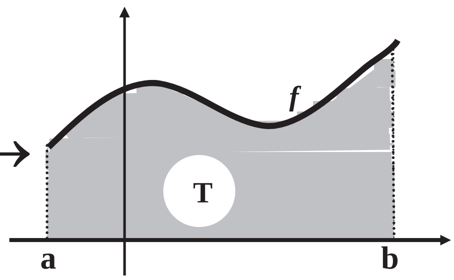
ó

la suma de las áreas de los rectángulos $\mathbf{r_i}$, (área de ***r***). $\xrightarrow[\text{se aproxima cada vez más}]{\text{cuando } n\to\infty}$ al **área T** .
T región bajo la ***graf f*** (***f def. positiva***)

c)



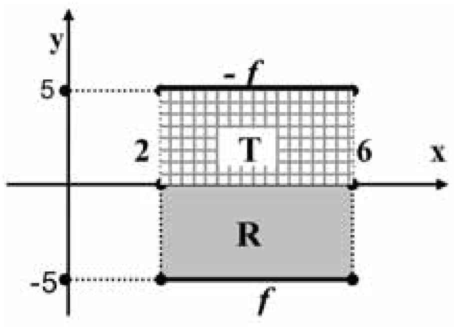
$\xrightarrow[\text{se aproxima cada vez más}]{\text{cuando } n\to\infty}$



El ítem (b) resume dos de los problemas que resuelve el cálculo integral: ***cálculo del resultado ó efecto total de un proceso de cambio*** y ***cálculo del área de regiones con contornos curvos.***

Respecto al problema del área hasta ahora sólo hemos dado respuesta al caso particular de las regiones que llamamos "*trapezoides*"; o sea, las determinadas por una **f** "***definida positiva***". Resta entonces resolver este problema para otro tipo de regiones planas; por ejemplo, aquellas determinadas por una función **f** ***definida negativa*** (**f** (x) < 0 , $\forall$ x $\in$ [a ; b]) o que ***cambien de signo*** en [a; b].

Ejemplo: dada f (x) = **-5** con dominio en el intervalo [2; 6], calcular el área de **R,** región determinada por la graf. f y el eje x.



Evidentemente, y por geometría elemental:

a (R) = base x altura = 4 x 5 = **20**.

También por geometría elemental,

a (R) = a (T) (**T** trapezoide determinado por **-*f***).

Por otro lado, **- *f*** es ***definida positiva*** $\Rightarrow$ **a(T) =** $\int_2^6 (-f(x)) \cdot dx$ **= 5 x (6 -2) = 20** .

Conclusión: **a (R) =** $\int_2^6 (-f(x)) \cdot dx$

Si para f (x) **= -5** calculamos $\int_2^6 f(x) \cdot dx$, tenemos que:

$$\int_2^6 f(x) \cdot dx = \int_2^6 (-5) \cdot dx = -5x \,\Big|_2^6 = -30 - (-10) = -20$$

Conclusiones:

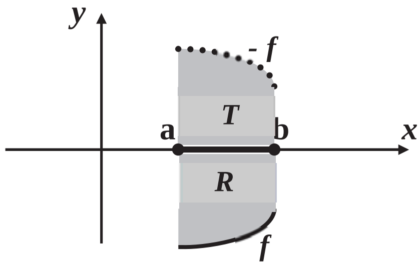
* si f es positiva en todo el intervalo ***la integral da por resultado un número positivo.***

* si f es negativa en todo el intervalo ***la integral da por resultado un número negativo.***

Así, para f negativa: **a (R)** $\neq \int_a^b f(x) \cdot dx$ (pues **a(R) > 0** y la integral negativa).

⌦ ***f definida negativa*** en [a,b]; el **área de R**, región comprendida por la ***graf. f*** y el **eje x** se obtiene ***integrando*** (**- *f***), la función opuesta de ***f*** .

a (R) = **a (T)** = $\int_a^b (-f(x)) \cdot dx$.



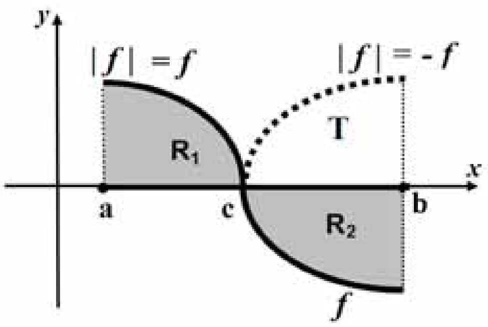
⌧ ***f* *cambia de signo*** en [a,b]; el **área de R**, región comprendida por la ***graf. f*** y el **eje x** se obtiene ***subdividiendo*** *el intervalo en cada punto donde* ***f*** *cambia de signo*; calculando las áreas de las regiones en cada subintervalo donde el signo ***f*** *permanece constante*; ***sumándolas***.

O sea; $\mathbf{R} = \mathbf{R_1} \cup \mathbf{R_2}$

Área **R** = área ($\mathbf{R_1} \cup \mathbf{R_2}$) = área $\mathbf{R}_1$ + área $\mathbf{R}_2$

Por lo visto: $a(\mathbf{R}_1) = \int_a^c f(x)\cdot dx$

$a(\mathbf{R}_2) = a(\mathbf{T}) = \int_c^b (-f(x))\cdot dx$



Luego: Área **R** = $a(\mathbf{R}_1) + a(\mathbf{T}) = \underbrace{\int_a^c \mathbf{f(x)\cdot dx} + \int_c^b \mathbf{(-f(x))\cdot dx}}$

Área **R** = $a(\mathbf{R}_1) + a(\mathbf{T}) = \int_a^c |\mathbf{f(x)}|\cdot \mathbf{dx} + \int_c^b |\mathbf{f(x)}|\cdot \mathbf{dx}$

Finalmente: $\boxed{\text{área } \mathbf{R} = \int_a^b |\mathbf{f(x)}|\cdot \mathbf{dx}}$

⌧ **Área de la región determinada por la gráfica de una función y el eje x**

Los tres casos vistos para el cálculo del área de **R,** región comprendida entre el gráfico de una función ***f*** definida en [a;b] y el ***eje x***, pueden resumirse en uno ya que, en cualquier caso, el **área de R** se obtiene calculando **la integral entre a y b** , ***del valor absoluto de f***

- ***f*** definida positiva en [a; b] → **a (R)** = $\int_a^b f(x).dx \overset{|f|=f}{=} \int_a^b |f(x)|.dx$
- ***f*** definida negativa en [a; b] → **a (R)** =

$\int_a^b (-f(x)).dx \overset{|f|=-f}{=} \int_a^b |f(x)|.dx$

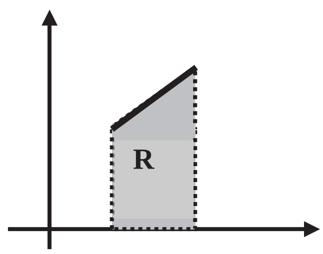
- ***f definida en* [*a*; *b*]** → **a (R)** = $\int_a^b |f(x)|.dx$

Ejemplo 1:

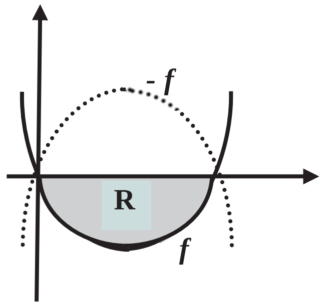
Graficar **R**, región determinada por ***f(***x) **= 2x+1** y el **eje x**, si **D*f* = [1;3].**

Hallar al área de la región **R**.

$$\mathbf{a(R)} = \int_1^3 |f(x)|.dx \overset{f>0}{=} \int_1^3 f(x)\,.dx = \int_1^3 (2x+1)\,.dx = \mathbf{10}$$



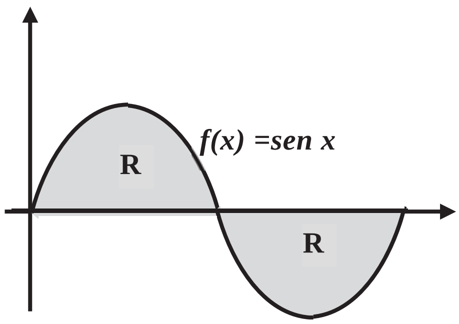
Ejemplo 2:
Graficar **R,** región determinada por $f(x) = x^2 - 2x$ y el **eje x**, si **D*f* = [0; 2].**
Hallar al área de la región **R**.



$$a(R) = \int_0^2 |f(x)|.dx \overset{f<0}{=} \int_0^2 (-f(x)).dx =$$

$$= \int_0^2 -(x^2 - 2x).dx = 4/3$$

Ejemplo 3:
Graficar **R**, región determinada por $f(x) = \textbf{sen } x$ y el **eje x**, si D*f* = [0; 2π].
Hallar al área de la región **R.**



$$a(R) = \int_0^{2\pi} |f(x)|.dx = \int_0^{2\pi} |sen\ x|.dx$$

$$= \int_0^{\pi} |sen\ x|.dx + \int_{\pi}^{2\pi} |sen\ x|.dx ==$$

$$= \int_0^{\pi} sen x.dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-sen\ x).\ dx = 4$$

Nota: Observar que, $\int_0^{2\pi} sen x.dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$

Ejemplo 4: dada $f(x) = -x + 5$ c on **D *f*** = [1; 8]

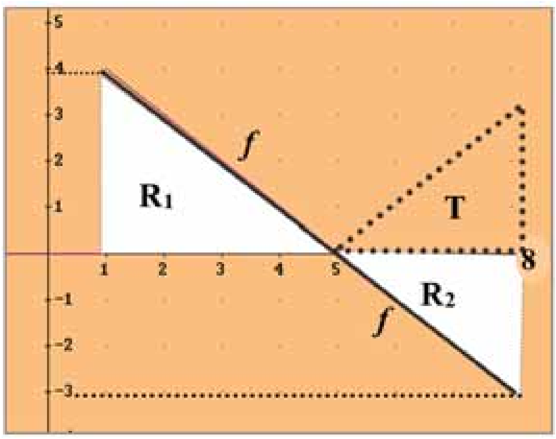
a) calcular $\int_1^8 f(x) \cdot dx$

b) calcular el área de **R** región comprendida por la ***graf. f*** y el **eje x**.

c) Comparar los resultados.

$$\textbf{a)} \int_1^8 f(x)\cdot dx = \int_1^8 (-x+5)\cdot dx \underbrace{=}_{\textbf{Barrow}} \frac{-x^2}{2} + 5x \Big|_1^8 = (-32+40) - \left(\frac{-1}{2} + 5\right) = \frac{7}{2}$$

b) área **R** $= \int_1^8 |f(x)| \cdot dx$



área **R** $= \int_1^5 f(x)\cdot dx + \int_5^8 (-f(x))\cdot dx =$

$$= 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$$

• En este caso, donde ***f*** es lineal, podemos calcular más rápido y fácil *acudiendo a la geometría elemental*. Así, subdividimos convenientemente el intervalo y calculamos el área de los triángulos formados.

$$\mathbf{R = R_1 \cup R_2 \ \Rightarrow\ a(R) = a(R_1) + a(R_2)}$$

a ($\mathbf{R}_1$) = ½ (*base x alt.)* = ½ (4 *x* 4) = **8**

a ($\mathbf{R}_2$) = a(**T**) = ½ (*base x alt.)* = ½ (3 *x* 3) = **9/2**

$$\mathbf{a\,(R) = a\,(R_1) + a\,(R_2) = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}}$$

c) ***Conclusión***: $\displaystyle\int_1^8 f(x)\cdot dx \neq \mathbf{a\,(R)}$

⌦ ***Área*** **de la región determinada por la gráfica de dos funciones f y g.**

Sean **f** y **g** dos funciones definidas en el intervalo [a;b] y tales que **f**(x) ≤ **g**(x) ∀ x ∈ [a;b].
En este caso queda determinada una región plana **R** ; definida como sigue:

$$\mathbf{R} = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; f(x) \leq y \leq g(x) \}$$

Teorema

Dadas : * ***f*** y ***g*** dos funciones integrables en [a;b] y tales que ***f***(x) ≤ ***g***(x) ∀ x ∈ [a;b];
* **R** la región plana determinada por ***f*** y ***g*** en [a;b] ;

entonces: $\mathbf{a\,(R)} = \displaystyle\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$

Demostración: la demostración se divide en dos casos:

Caso 1: 0≤ ***f***(x)≤ ***g***(x); ∀ x ∈ [a;b]

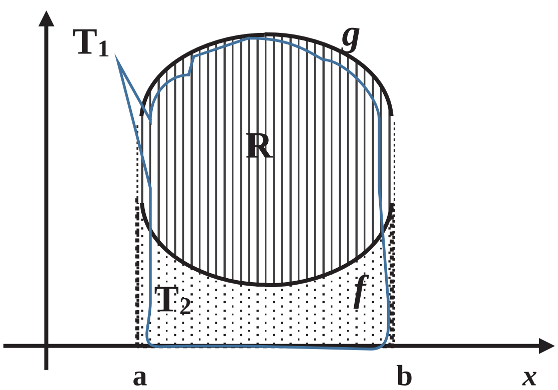
Caso 2: ***f***(x) ≤ ***g***(x); ∀ x ∈ [a;b]

Caso 1: 0≤ ***f***(x) ≤ ***g***(x); ∀ x ∈ [a;b] (o sea, ambas funciones definidas positivas)

Sean: $\mathbf{T_1} = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; 0 \leq y \leq g(x) \}$

$\mathbf{T_2} = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; 0 \leq y \leq f(x) \}$

$\mathbf{R} = \{ (x\,;y) \,/\, a \leq x \leq b \;;\; 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x) \}$



Luego: $\mathbf{T_2 \subset T_1 \rightarrow R = T_1 - T_2}$

$\mathbf{a\,(R) = a\,(T_1) - a\,(T_2)}$

a (R) = $\displaystyle\int_a^b g(x)\cdot dx - \int_a^b f(x)\cdot dx$; (*f* y *g* positivas)

a (R) = $\displaystyle\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$ **;** (por linealidad de la int)

<u>Caso 2</u>: $f(x) \le g(x)$; $\forall x \in [a;b]$

Sea: $\mathbf{R} = \{ (x ; y) / a \le x \le b ; f(x) \le y \le g(x) \}$

Luego**,** existe $k \in \mathbf{R}$ tal que:

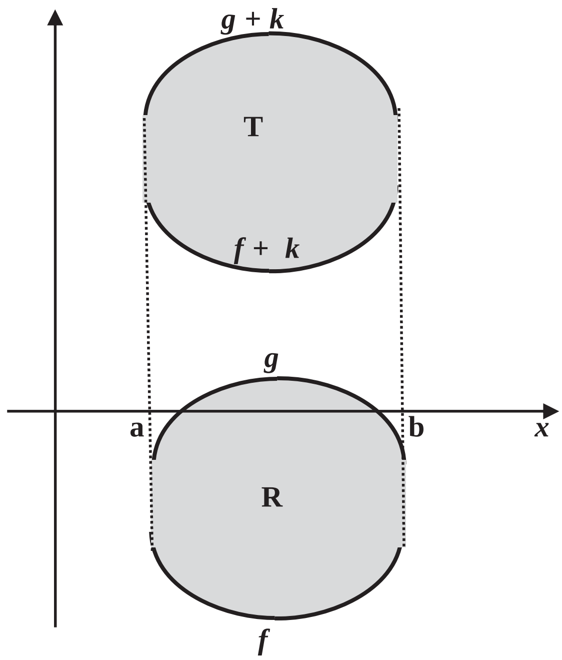
$\mathbf{0} \le f(x) + k \le g(x) + k$; $\forall x \in [a;b]$

$\mathbf{T} = \{(x;y) / a \le x \le b ; \mathbf{0} \le f(x)+k \le y \le g(x)+k \}$

Y estamos en el **Caso 1 ;** o sea,

$$\mathbf{a\,(T)} = \int_a^b \left[(g(x)+k) - (f(x)+k)\right] dx \,;$$

$$\mathbf{a\,(T)} = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx \,;$$



Como **R** y **T** son la "misma figura" pues al trasladar las funciones en un valor ***k***, lo que hacemos es trasladar la región **R** un valor ***k*** "sin deformarla"; tenemos que:

$$\mathbf{a\,(R)} = \mathbf{a\,(T)}$$

$$\mathbf{a\,(R)} = \int_a^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$$

<u>Nota</u>: en definitiva, cualquiera sea el caso el área de una región comprendida entre dos funciones se calcula haciendo la integral de ***la función de ´arriba´ menos la de ´abajo´.***

10. 2 Un problema de la Física que resuelve la Integral: *"trabajo"*.

Basándonos en la Física elemental, podemos determinar el "trabajo" (**W**) realizado por una fuerza para mover un cuerpo en línea recta. Para una fuerza en la dirección del movimiento y de magnitud *constante* la fórmula correspondiente es: **W =** fuerza (*cte*) x desplazamiento. Vimos luego (pags. 17-18) que si la fuerza no es constante, el trabajo se calcula acudiendo a un proceso de integración, el trabajo realizado por **F** en [a;b] se obtiene de hacer:

$$\mathbf{W}_{[a;b]} = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i) \times \Delta x_i = \int_a^b F(x) \cdot dx$$

10.3 Otros problemas de la Física que resuelve la integral: "cambio total" ó "variación total" en un proceso de cambio a velocidad variable

El **2ºTFCI** permite concluir la Regla de Barrow; regla que proporciona una forma práctica de evaluar la integral para toda ***f*** continua en [a,b] que admita ***primitiva elemental P*** , en [a, b] .

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = P(b) - P(a)}$$

Como ***P´ = f***, reemplazando en la fórmula anterior tenemos:

$$\int_a^b P'(x).dx = \Delta P_{[a;b]}$$

Con esta fórmula confirmamos todos los supuestos hechos al inicio de este tema y concluimos el:

⊖ TEOREMA del CAMBIO TOTAL

"la integral de la razón de cambio es el cambio total"

En principio, se puede aplicar a todas las razones de cambio en las ciencias naturales y sociales.

- Si V es el volumen de agua en un tanque en cada instante t , entonces su derivada V' es la razón a la que está variando el volumen de agua en el tanque en el instante **t** y, por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t).dt = V(t_2) - V(t_1) = \Delta V_{[t_1\,;\,t_2]}$$

"***cambio total***" de la cantidad de agua en el tanque entre t_1 y t_2 (ó, ***"variación total"***).

- Si P indica la cantidad de individuos o "*población*" de cierta especie en cada instante **t** , entonces su derivada P' es la tasa de crecimiento (o decrecimiento) de la misma . Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} P'(t).dt = P(t_2) - P(t_1) = \Delta P_{[t_1\,;\,t_2]}$$

"***variación total***" en la *población* durante el período comprendido entre t_1 y t_2 .

- Si M es la masa producida en una cierta reacción química en cada instante t ; su derivada,
  $M' = v$, la velocidad de reacción. Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} M'(t).dt = M(t_2) - M(t_1) = \Delta M$$

"***variación de masa***" producida entre t_1 y t_2 (ó, " ***masa acumulada"***).

Ejemplo: sea $v = \dfrac{2}{(10-2t)^2}$; con $v = \dfrac{dM}{dt}$ y $[v] = \dfrac{mg}{seg.}$

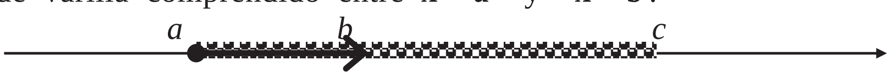
Luego $\int_0^4 v(t).dt = \Delta M_{[0;4]} = M(4) - M(0)$; ***variación de masa*** producida a los **4** segundos. Para *calcular* esta integral basta hallar una primitiva **P** cualquiera de v ; es decir, esta no tiene que ser necesaria y exactamente M.

$$\Delta M = \int_0^4 v(t).dt = P(t)\Big|_0^4 = \frac{1}{10-2t}\Bigg|_0^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 0,40 \quad \text{(mg.)}$$

¿$M(4)$? → $M(4) = \Delta M - M(0) = 0,40 - M(0)$ (para responder necesitamos un dato: $M(0)$).

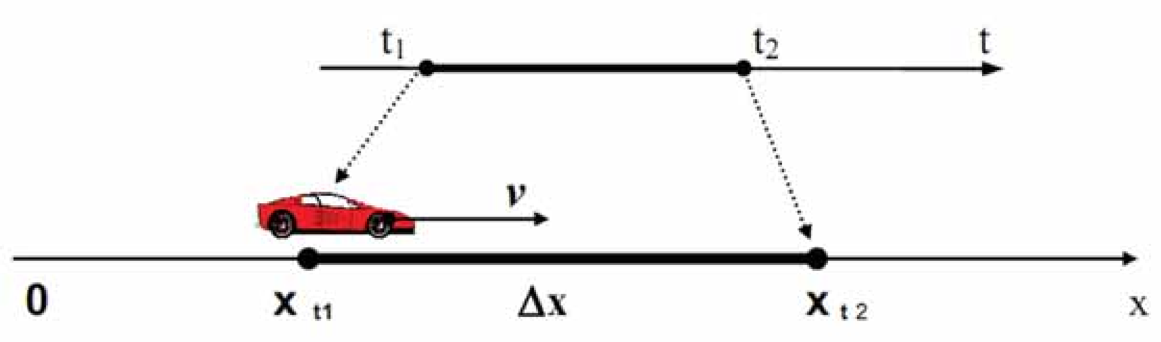
- Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto **x** , es $m(x)$, entonces $m'(x) = \delta(x)$ es la ***densidad lineal*** (masa por unidad de longitud) en cada punto **x**.

  Por lo tanto, $\int_a^b m'(x).dx = m(b) - m(a) = \Delta m$, es la ***masa total*** del segmento de varilla comprendido entre $x = a$ y $x = b$.



➤ Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición $x = x(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = x'(t)$.

Por lo tanto, $\int_{t_1}^{t_2} x'(t).dt = x(t_2) - x(t_1) = \Delta x$, es el ***"variación total en su posición"*** ó ***"desplazamiento total"***, Δx, entre t_1 y t_2.



(*) En este caso, si la velocidad cambia de signo en el intervalo de integración, hay que tener sumo cuidado en la interpretación del resultado; recordar que "***desplazamiento total***" y "***distancia***" recorrida por un móvil en un cierto intervalo de tiempo $[t_1 ; t_2]$; son dos nociones distintas. Una resulta de integrar la ***velocidad***, v; la otra, de integrar la ***rapidez***, $|v|$.

Ejemplo: *Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante* t *es* $v(t) = -6t^2 + 18t$ *(m/sg.);*

(a) *¿cuánto se* **desplaza** *esta partícula en cada uno de los períodos de tiempo que se indican a continuación:* $0 \leq t \leq 2$; $0 \leq t \leq 3$; $0 \leq t \leq 4$; $0 \leq t \leq 4{,}5$; $0 \leq t \leq 5$? ;

(b) *¿qué* **distancia** *recorre en cada uno de tales períodos?*

(a) ***Desplazamiento de la partícula en cada*** Δt.

$0 \leq t \leq 2 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^2 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{20}$

$0 \leq t \leq 3 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^3 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{27}$

$0 \leq t \leq 4 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^4 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{16}$

$0 \leq t \leq 4{,}5 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^{4{,}5} \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{0}$

$0 \leq t \leq 5 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \int_0^5 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{-25}$

? ¿Cómo se entienden estos resultados?; ¿puede la partícula desplazarse "menos" en **4** seg. que en **3**? ; ¿puede ser $\Delta x = \mathbf{0}$? ; ¿puede ser $\Delta x < \mathbf{0}$?

* el ***signo de la velocidad*** tiene una interpretación física concreta: indica el ***sentido*** del movimiento de la partícula sobre la recta, en cada instante ***t.*** Así, en una recta ***vertical*** orientada (+) ***hacia arriba***:

$v(t) > 0$; indica que, en el instante t, la partícula está *avanzando* hacia *arriba* .

$v(t) < 0$; indica que, en el instante t, la partícula está *avanzando* hacia *abajo* .

En este caso $v(t)$ = **- 6t ^{2} + 18 t** . Luego, si suponemos que el eje del movimiento es una recta ***vertical*****;** que la orientación positiva del mismo es ***hacia arriba***; tenemos que:

* ***v (t)* > 0** en **[0, 3)** → la partícula ***sube*** entre [0, 3];

* ***v (3)* = 0** → la partícula ***cambia el sentido del movimiento***, a los 3 seg.

* ***v (t)* < 0** en [3, +∞) → la partícula ***baja*** a partir de los 3 seg..

Luego, y recordando que $\Delta x = x(t_f) - x(t_o)$, los resultados obtenidos tienen total sentido.

* el ***desplazamiento*** a los **4** seg .($\Delta x = 16$) es "*menor*" que a los **3** ($\Delta x = 27$) pues la partícula "*sube*" hasta los **3** seg. y a partir de allí comienza a "*bajar*".

* Δx **= 0** indica que la partícula, "*bajando*", a los **4,5** seg. ha llegado al punto de partida ($x = 0$)

* $\Delta x < 0$ indica que la partícula, "*bajando*", ha sobrepasado el punto de partida.

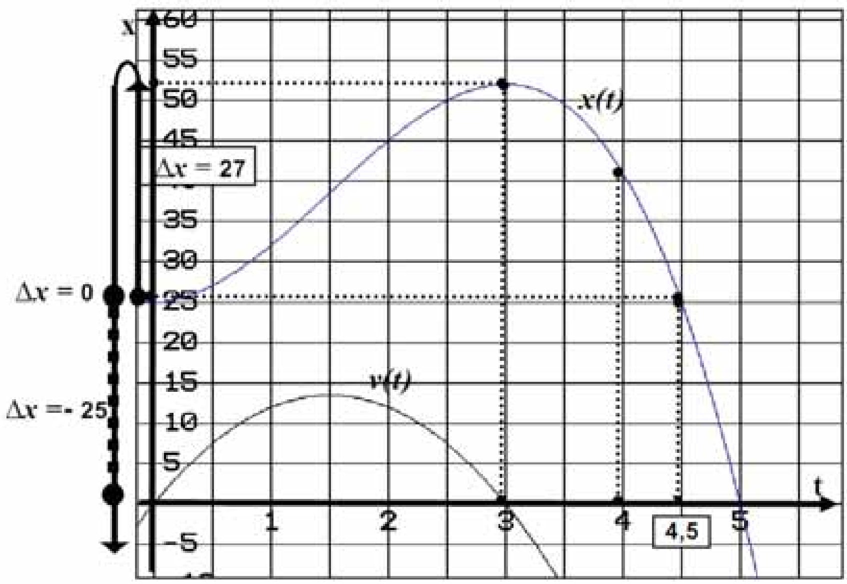
¿Cómo verificamos?: un camino, a través de la función de posición de la partícula, $x = x(t)$.

¿Cómo obtenemos x = x (t)?: recordando que $x(t)$ es una primitiva de $v(t) = -6t^2 + 18t$;

Calculamos para un "t" genérico:

$$\Delta x_{[0;\,t]} = \int_0^t v(\tau)\,.d\tau = \int_0^t \left(-6\tau^2 + 18\tau\right).d\tau = -2t^3 + 9t^2$$

$$\Delta x_{[0;\,t]} = x(t) - x(0) \quad \Rightarrow \quad x(t) - x(0) = -2t^3 + 9t^2$$



Concluimos que: $x(t) = -2t^3 + 9t^2 + x(0) \xrightarrow[si\ x(0)=25]{} x(t) = -2t^3 + 9t^2 + 25$

b) ***Distancia recorrida en cada*** Δt.

$0 \le t \le 2 \;\rightarrow\; \mathbf{d}_{[0,\,2]} = \Delta x = \int_0^2 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{20}$ (*ms*.)

$0 \le t \le 3 \;\rightarrow\; \mathbf{d}_{[0,\,3]} = \Delta x = \int_0^3 \left(-6t^2 + 18t\right).dt = \mathbf{27}$ (*ms*.)

$0 \le t \le 4 \;\rightarrow\; \mathbf{d}_{[0,\,4]} = \mathbf{d}_{[0,\,3]} + \mathbf{d}_{[3,\,4]} = \int_0^3 v(t).dt + \int_3^4 -v(t).dt = \mathbf{27 + 11 = 38}$ (*ms*.)

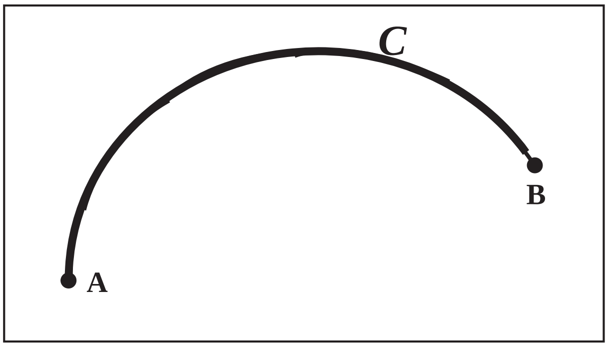
$0 \le t \le 4{,}5 \;\rightarrow\; \mathbf{d}_{[0;\,4{,}5]} = \mathbf{d}_{[0,\,3]} + \mathbf{d}_{[3;\,4{,}5]} = \int_0^3 v(t).dt + \int_3^{4.5} -v(t).dt = \mathbf{27+27 = 54}$ (*ms*.)

$0 \le t \le 5 \;\rightarrow\; \mathbf{d}_{[0;\,5]} = \mathbf{d}_{[0,\,3]} + \mathbf{d}_{[3;\,5]} = \int_0^3 v(t).dt + \int_3^5 -v(t).dt = \mathbf{27 + 52 = 79}$ (*ms*.)

10.4 Otros problemas geométricos que resuelve la Integral

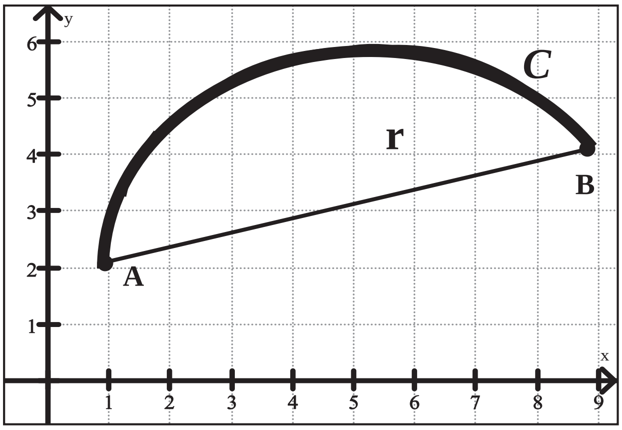
10.4.1 *Longitud de un arco de curva C*.

* Dada una curva plana ***C*** de puntos extremos **A** y **B**, deseamos calcular la longitud de ***C.***



* ¿Cómo haría para "estimar" la longitud de esta curva?
* ¿A que "herramientas" de la **geometría analítica** acudiría a tal efecto?
(Antes de seguir reflexione un instante sobre estas preguntas, descubra que sus conocimientos previos lo habilitan a responderlas)

* Si ***C*** = **r** , un segmento de recta de extremos **A**($x_1;y_1$) ; **B**($x_2;y_2$), sabemos resolver el problema (Obviamente, previa introducción de un sistema de referencia).



long. $\mathbf{r_{AB}}$ = **d** (A ;B) =
long. $\mathbf{r_{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$.

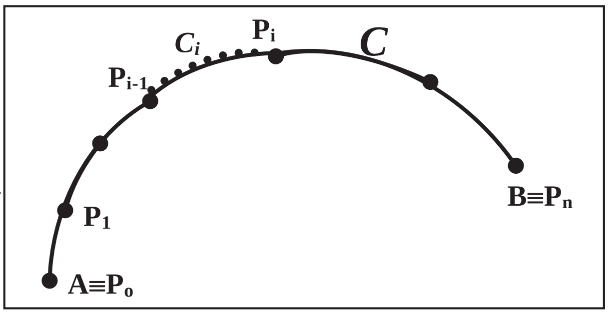
* En el ejemplo:
A (1; 2) ; B(9; 4)
* **long.** $\mathbf{r_{AB}}$ = **d** (A;B)
long. $\mathbf{r_{AB}} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$
* y tenemos un valor "***aprox.***"
de **long.** $\boldsymbol{C_{AB}}$ ($\cong \sqrt{68} \cong$ ***8,25***)

* Si ***C*** no es un segmento de recta, no sabemos calcular su longitud, acudimos entonces a resolver el problema apoyándonos en el caso conocido ("*longitud de un segmento de recta*"); o sea, acudimos a un **"proceso de integración"**:
(1) ***<u>subdividimos el problema</u>*** (en este caso, la curva ***C***): la curva queda dividida en "n" sub-arcos ***Ci***.
(2) ***<u>realizamos las aproximaciones parciales</u>*:** reemplazamos cada sub-arco por un segmento, calculamos la longitud de cada segmento.
(3) ***<u>realizamos la aproximación "total"</u>:*** suma de todas las aproximaciones parciales.
(4) ***<u>calculamos el límite de estas sumas para la norma de la partición tendiendo a cero.</u>***

<u>Proceso de integración</u>

(1) ***<u>subdivisión del problema</u>***

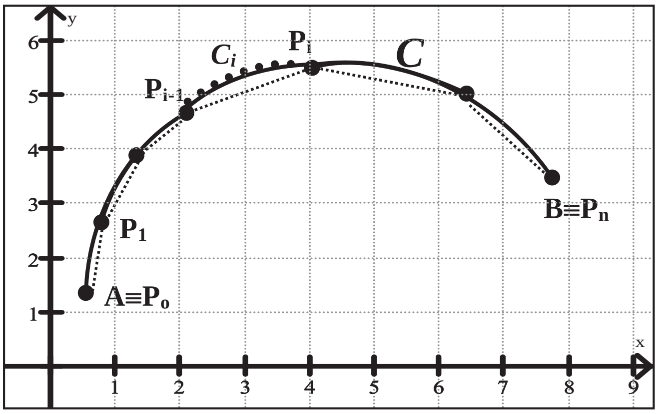
Tomamos "**n+1**" puntos de C_{AB}
{ $\mathbf{P_0 \equiv A}$; $\mathbf{P_1}$; $\mathbf{P_2}$; ......; $\mathbf{P_i}$; ....¸ $\mathbf{P_n \equiv B}$ **}**
Estos puntos generan **"n"** subarcos :
C_1 ; C_2 ; ....; C_i ; ....; C_n



(2) ***aproximaciones parciales***: *aproximamos cada* C_i *por el segmento que une sus extremos.*

long. $C_i \cong$ long. $\overline{P_{i-1}\,P_i}$

long. $C_i \cong$ **d** $(P_{i-1}; P_i)$



(3) ***aproximación "total":***

Si indicamos con **P** a la poligonal determinada por los P_i, tenemos que

$$\textbf{long. } C_{AB} \cong \textbf{long. } P = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}; P_i)$$

(4) ***cálculo del límite de la longitud de las poligonales.***

Def: decimos que el arco de curva C_{AB} es "***rectificable***" si existe un número "**L**" al cual se acercan tanto como se quiera las longitudes de las poligonales **P**, cuando **d** $(P_{i-1}; P_i) \to 0$, $\forall$ **i.**

Def: si C_{AB} es "***rectificable***",

* $L = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}; P_i)$

* a **L** lo llamamos "***longitud de*** C_{AB}"

$$\boxed{\textit{longitud de } C_{AB} = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}; P_i)}$$

Hemos desembocado en un límite de sumas, por ende, en una integral; pero, ¿cómo la calculamos?

Y aquí se abre el camino ya que la función integrando depende de la forma como esté dada la curva.

Tenemos así dos casos:

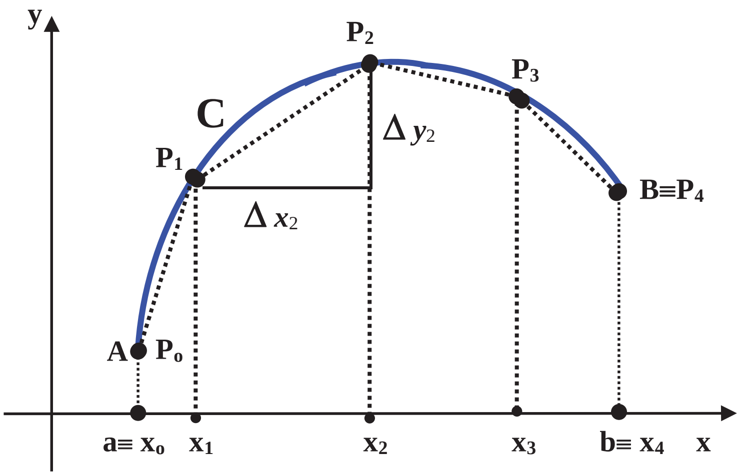
Caso 1: **C = graf f**, **f** definida en **[a;b].**

Caso 2: **C** dada por sus ecuaciones paramétricas; o sea, **C=**$\{(x;y) / x = x(t);\ y = y(t),\ t \in [a;b]\}$

Caso 1: **C=graf f**, **f** definida en **[a;b].**

Introducido un sistema de referencia los puntos:

$\{P_0; P_1; P_2; \ldots\ldots; P_i; \ldots\ldots\ldots, P_n\}$ definen una partición de **[a; b]**,



- $P = \{x_0 = a;\ x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_i;\ldots;\ x_n = b\}$
- $P_i\,(x_i; y_i) \to \overline{P_{i-1}\,P_i} = (\Delta x_i; \Delta y_i)$
- **long. P** $= \sum_{i=1}^{n}$ **d** $(P_{i-1}; P_i)$

$$\textbf{long. } P = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}; P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i}\ ; \text{ con } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

• ***Teorema***: Si **f** y **f´** son continuas en **[a; b]** entonces **C = graf f** es rectificable y vale:

$$\textit{longitud } C_{AB} = \mathbf{L} = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,.dx$$

Demostración: Por definición: $\mathbf{L} = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} d(P_{i-1}; P_i)$;

o sea; $\mathbf{L} = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i} = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,.\,\Delta x_i$ **(I)**

f continua y derivable en [a;b]→ (Ter. Lagrange)→ $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ **= f´** (c_i) con **c** $_i \in$ (x_{i-1} ; x_i) **(II)**

$$g(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$$

Reemplazando en **(I)**:

$$\mathbf{L} = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,.\,\Delta x_i = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,.\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,.\,\Delta x_i = \lim_{|P|\to 0} \mathbf{S}\,(g;\ P\ ;\ Q) = \int_a^b g(x)\,.dx$$

Finalmente, reemplazando **g**: ***longitud de*** C_{AB} = **L** = $\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,.dx$ **(q.e.d.)**

Caso 2: **C**: $\begin{cases} x = x(t) \\ & t \in [\,c\,;\,d\,] \\ y = y(t) \end{cases}$

Trabajando en forma análoga a la anterior llegamos a $\mathbf{L} = \lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_i + \Delta^2 y_i}$;

teniendo en cuenta que en este caso:

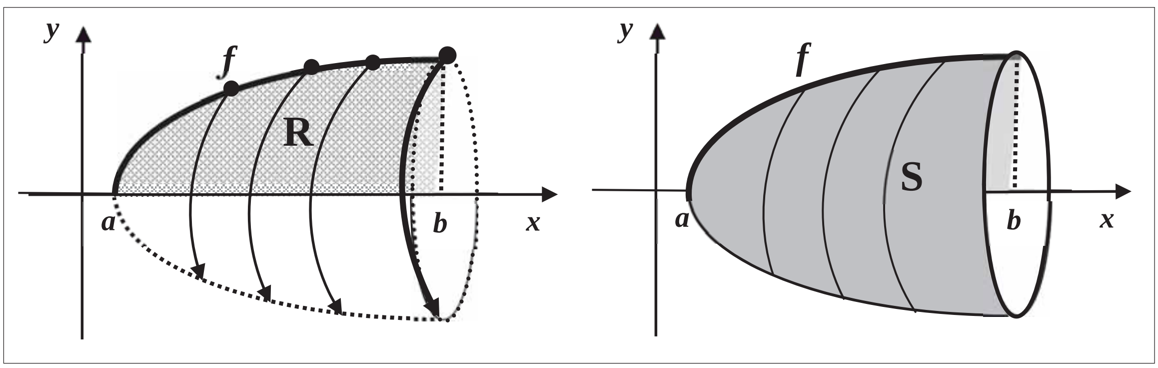
$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$; $\dfrac{\Delta x_i}{\Delta t_i} = x'(\alpha_i)$ con $\alpha_i \in (t_{i-1}\,;\ t_i)$ (teorema de Lagrange).

$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$; $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta t_i} = y'(\beta_i)$ con $\beta_i \in (t_{i-1}\,;\ t_i)$ (teorema de Lagrange).

Concluimos que: ***longitud de*** C_{AB} = **L** = $\int_c^d \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,.dt$

10.4.2 Volumen de S, sólido de revolución

Al hacer girar alrededor del **eje x** la **región R** comprendida entre la curva **graf. f** y el **eje x** se genera un sólido "**S**" , llamado "**sólido de revolución**",



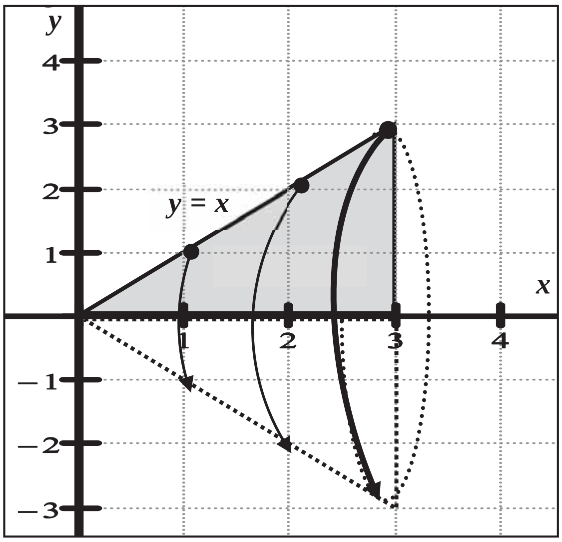
Para obtener el volumen del sólido **S** debemos acudir a un **"proceso de integración**; o sea: particionar el intervalo; obtener las "aproximaciones parciales"; sumarlas y obtener la "aproximación total". Finalmente, analizar si las aproximaciones totales para la norma de la partición tendiendo a cero tienden a un número. Si lo hacen, este número es, por definición el volumen del sólido **S**.

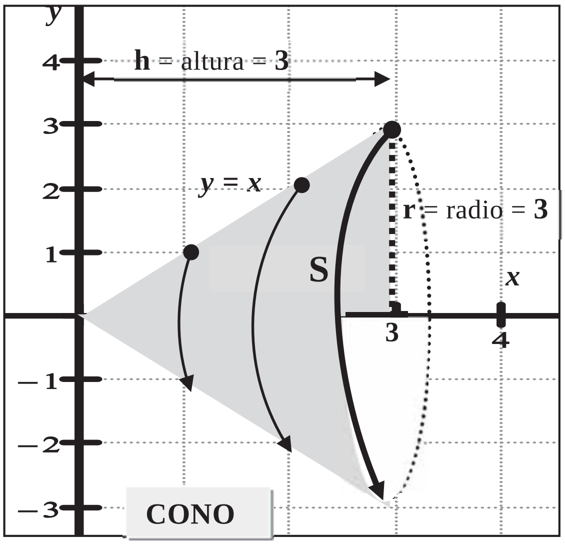
Se demuestra que si f es continua en [a; b], entonces:

$$\textbf{vol. S} = \pi \int_a^b f^{\,2}(x).dx$$

Ejemplo: dada **f(x) = x** en **[0; 3]** se pide:

*) graficar **S**, el sólido de revolución que genera la región **R** determinada por **f** .
*) calcular el volumen de **S** acudiendo al *cálculo integral*.
*) si se trata de un sólido o "cuerpo" conocido verificar si el resultado obtenido coincide con el "conocido" de la *geometría analítica*.





*) **vol. cono** $= \pi \int_0^3 x^2\,.dx = \pi\,.\,\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9\,\pi$ ✓

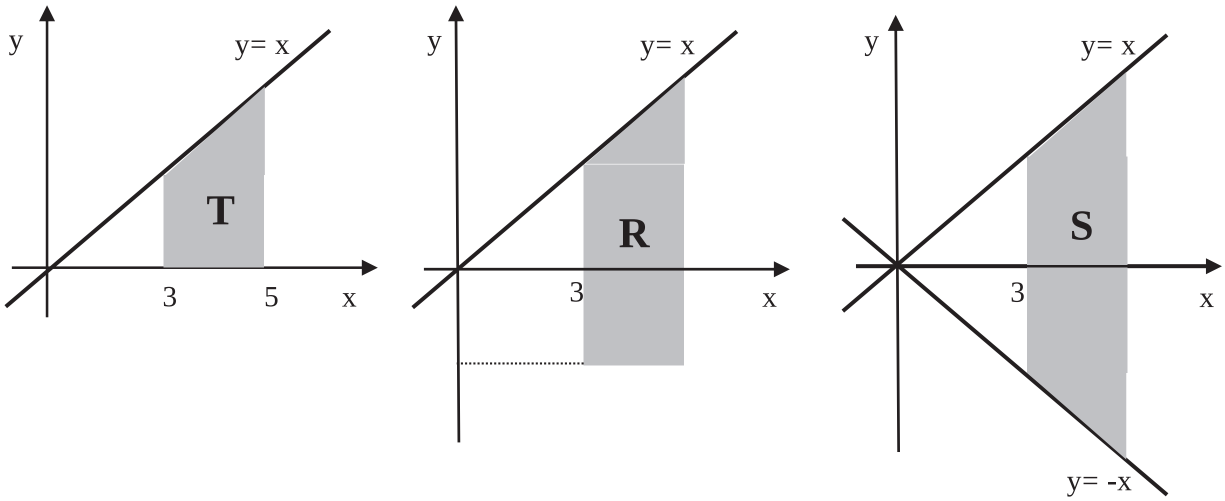
*) **vol. cono** $= \dfrac{1}{3}$. **"área base" x "altura"** $= \dfrac{1}{3}$. **" π . r² " x "h" = 9 π** ✓

10.5 Ejercicios: Aplicaciones de la Integral

1) Dadas las figuras planas que se indican a continuación, se pide:

a) hallar el área de las regiones sombreadas con las fórmulas usuales de la geometría.

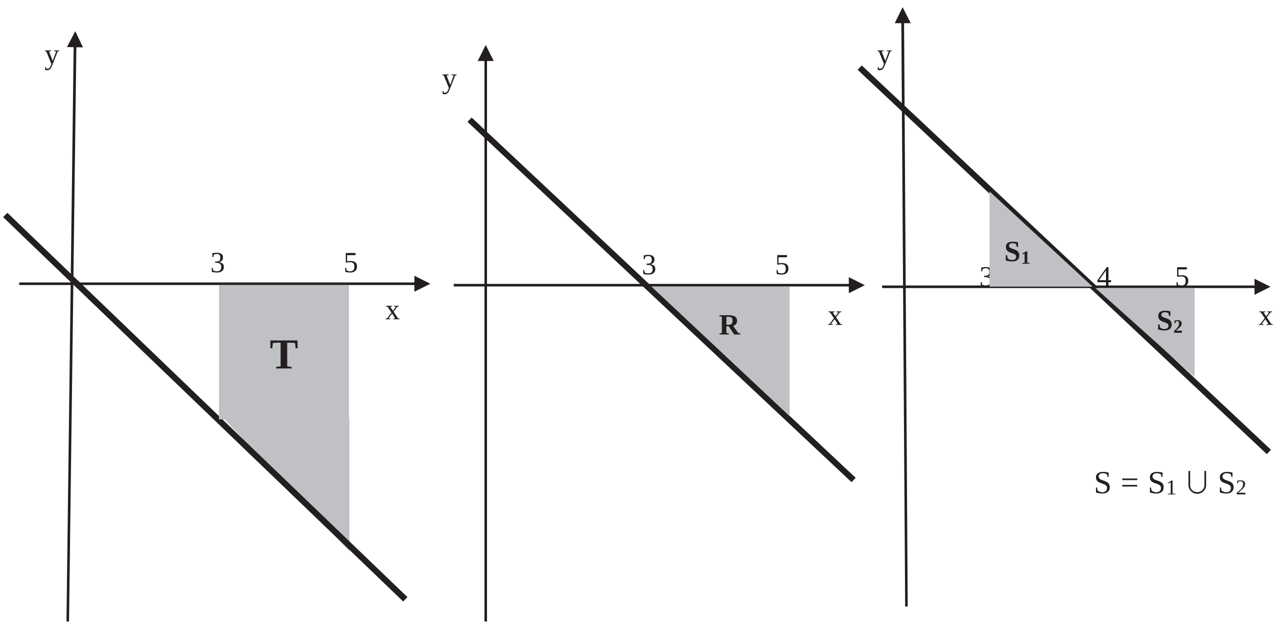
b) Verificar luego el resultado hallado con el auxilio del Cálculo Integral.



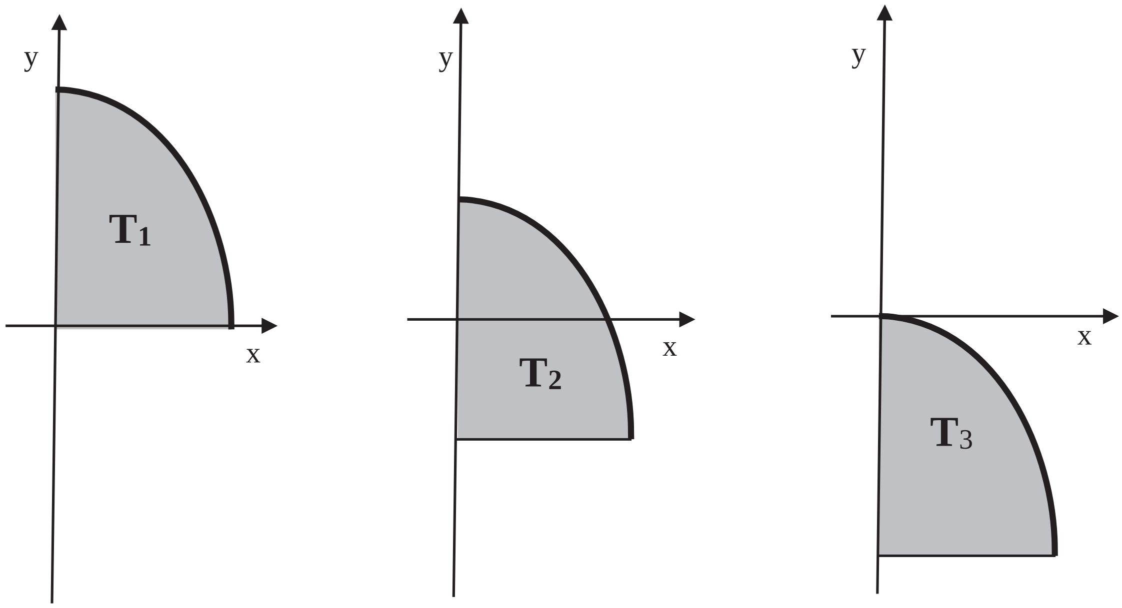
2) Las figuras planas que se indican a continuación están generadas por las funciones f, g, h con f (x) = -x ; g(x) = f(x) + 3 y h(x) = f(x) + 4 ; y todas definidas en el [3; 5]. Se pide:

a) hallar el área de las regiones sombreadas con las fórmulas usuales de la geometría.

b) Verificar luego el resultado hallado con el auxilio del Cálculo Integral.



3) Las figuras planas **T**1; **T**2; **T**3 a continuación están generadas por las funciones f, g, h con $f(x) = -x^2 + 9$; $g(x) = f(x) - 5$ y $h(x) = f(x) - 9$; todas definidas en el [0; 3]. Se pide:



a) hallar el área de **T**1; **T**2; **T**3 con el auxilio del cálculo integral y *verificar* que todas tienen el mismo área. Justificar este resultado.

b) Graficar la región determinada por f y -f en el [0; 3]; hallar su área:

1ro) con el auxilio del cálculo integral. ; ***2do***) Aplicando propiedades de la geometría.

c) Graficar las regiones **R**1 , **R**2 y **R**3 simétricas respecto del "*eje y*" de **T**1, **T**2 y **T**3 respectivamente . Hallar luego las áreas de $\mathbf{S}_i = \mathbf{T}_i \cup \mathbf{R}_i$; i = 1, 2, 3.

1ro) con el auxilio del cálculo integral.

2do) aplicando propiedades de la geometría.

d) Para f, g, h definidas en [0; 3] determinar el o los valores de "c" del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Interpretar geométricamente el resultado en cada caso posible.

e) Para f, g, h definidas en [- 3; 3], determinar el o los valores de "c" del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Interpretar geométricamente el resultado en cada caso posible.

4) Si $\mathbf{f(x) = -x^3 + 8}$; $\mathbf{g(x) = f(x) - 7}$; $\mathbf{h(x) = f(x) - 8}$

a) Graficar las regiones **T** ; **R** ; **S** *respectivamente* comprendidas entre el gráfico de f, g, h y el *eje x* y todas con dominio en el [0; 2] . Luego, calcular su área.

b) Graficar las regiones **T**, **R** y **S**, *respectivamente* comprendidas entre el gráfico de f , g , h y el *eje x* (y todas con dominio en el [-2; 2]). Hallar sus áreas.

1ro) con el auxilio del cálculo integral;

2do) Aplicando propiedades de la geometría (en el caso de ser posible).

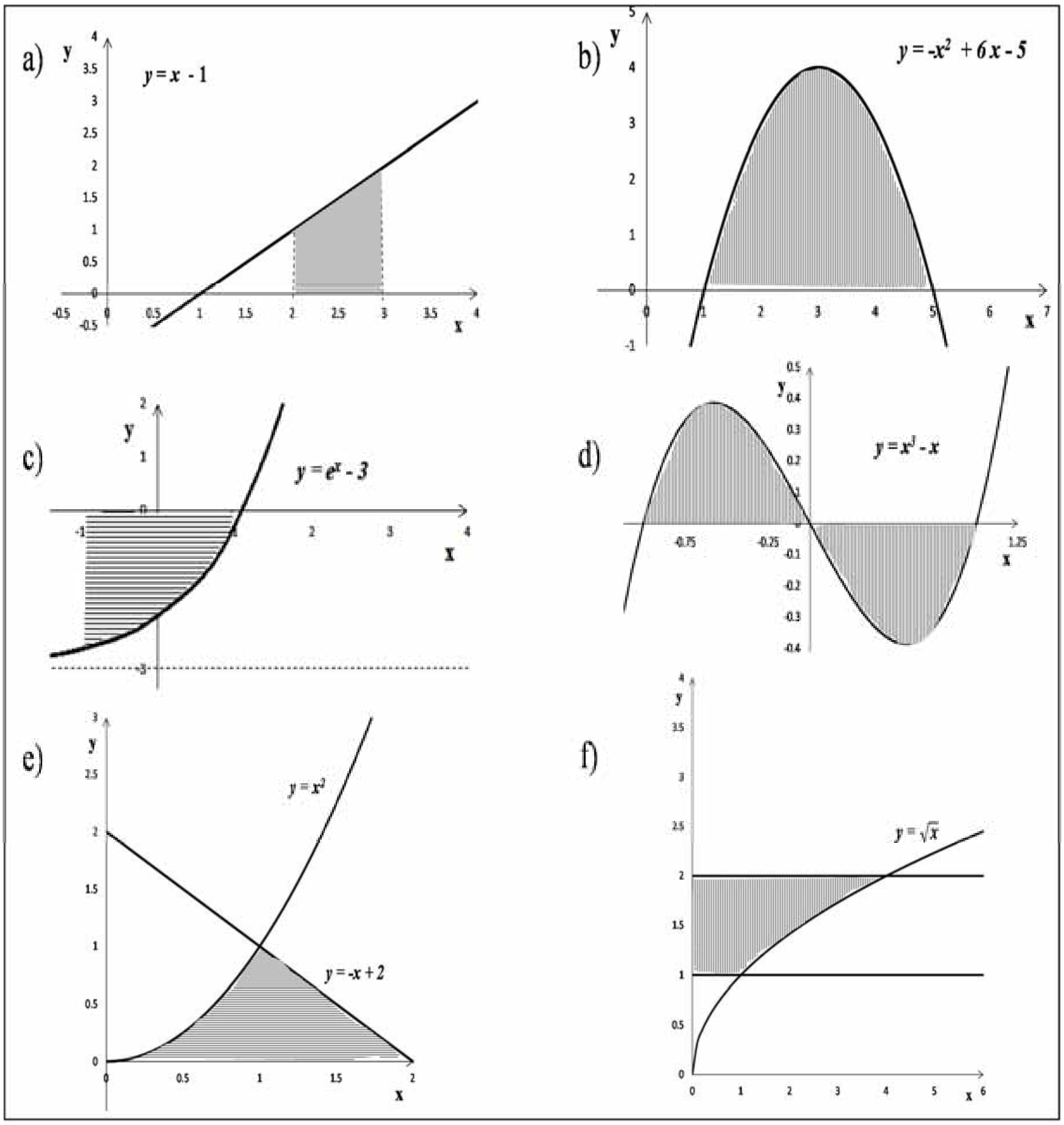
c) Para f, g, h definidas en [- 3 ; 3], determinar el o los valores de "c" del Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Interpretar geométricamente el resultado en cada caso posible.

5) Si con **R** representamos un círculo de radio 5, se pide:

- **a)** Graficar el círculo en un sistema cartesiano ortogonal, indicar las funciones que representan su contorno, escribir la región **R** en función de ellas.
- **b)** Dar el área de las siguientes figuras planas a partir del área del círculo y la aplicación de propiedades geométricas pertinentes al caso. Luego, obtener el área de las mismas pero a través del cálculo intgral.
  - **i)** un cuarto de círculo.
  - **ii)** medio círculo.

6) Hallar el área de las regiones rayadas mediante adecuadas integrales definidas.



7) Calcular el área de las regiones limitadas por:

a) f(x) = $x^2 - 4$; g(x) = $-(x-2)^2$.

b) y = cosx; y = senx; x = 0; x = p.

c) y = lnx; y = 1; x = 2e; y = 0.

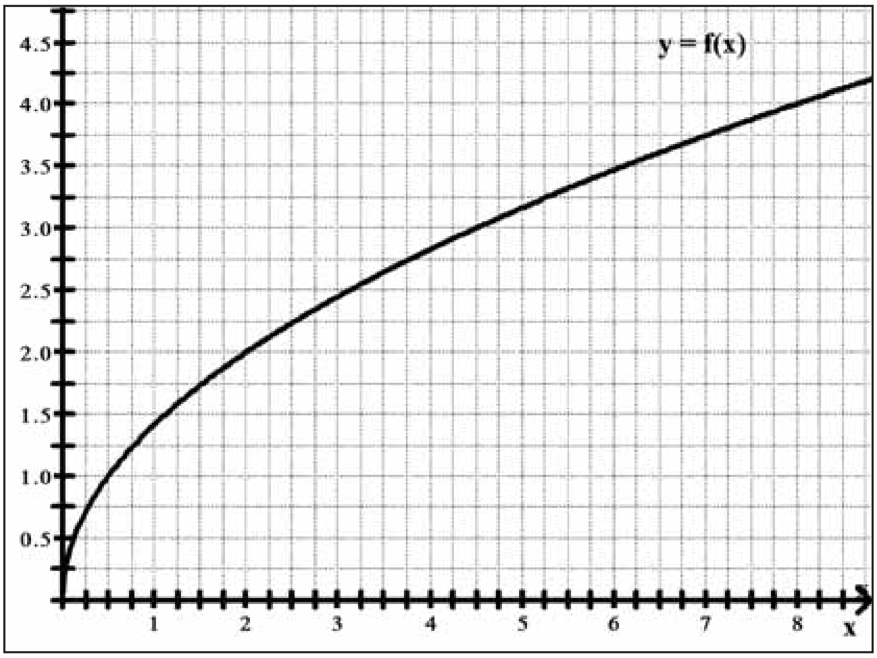
d) f(x) = 0; g(x) = $x^2 - 2|x| - 3$.

8) Para la función **f** cuyo gráfico se adjunta se pide:

a) dar $\mathbf{I_{sup}}$ e $\mathbf{I_{inf}}$ con **n=16,** aproximaciones por por exceso y defecto respectivamente de

$$I = \int_0^8 f(x)\,dx$$

Hacer esto aplicando un conveniente "proceso de integración" y "leyendo" del **graf. f** los valores que necesite al efecto.



b) Calcular $\mathbf{I} = \int_0^8 f(x)\,dx$ para $\mathbf{f(x)} = \sqrt{2x}$.

c) Vó F: estimar el "orden" del error cometido al aproximar **I** con $\mathbf{I_{sup}}$ e $\mathbf{I_{inf}}$ del item **(a).**

Cómo haría para que estos errores, E = |I- $\mathbf{I_{inf}}$| ó E = |I- $\mathbf{I_{inf}}$|, sean menor a **1/10?**

9) Demostrar, usando un conveniente polinomio de Taylor que $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2}\,dt \approx \mathbf{0{,}4613}$.

10) Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra:

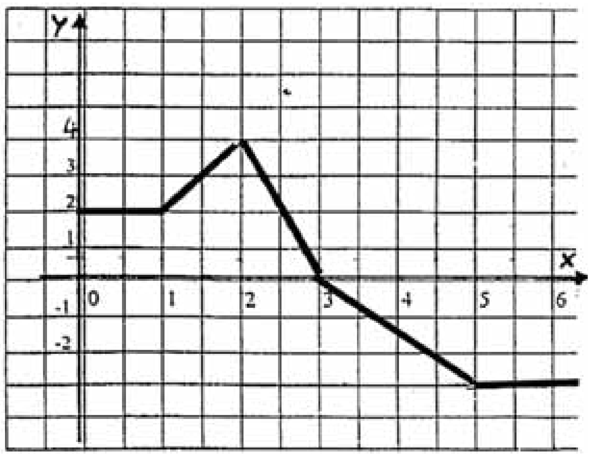
a) Evaluar g(0), g(1), g(3) y g(6).

b) ¿Sobre qué intervalos *g* es creciente?

c) ¿Dónde tiene *g* un valor máximo?

d) Hallar la ley de *g*.

e) Graficar *g* y *g'*.



11) Dada **F: [1; 5] → R** con **F** (x) = $\int_1^x (t^3 - 3t^2 - 2).dt$, se pide calcular **F´** por dos caminos distintos

12) Dada **F: [0; 10] → R** con **F** (x) = $\int_0^x (3-t).dt$, se pide:

a) Calcular **F**(3) ; **F**(4) ; **F**(6) ; **F**(9). Interpretar geométricamente los valores obtenidos (si puede).
b) Calcular **F´**(x) por el camino "más simple".
c) Graficar P ; Q ; R siendo estas funciones **3** primitivas de **F´**(x) , tales que: **P (0) = 2**; **Q (0) = 0**; **R (0) = - 2**;
Luego, indicar si alguna de ellas es igual a **F**.

13) Para la función **f** cuyo gráfico se adjunta se pide:

a) dar un valor aproximado de

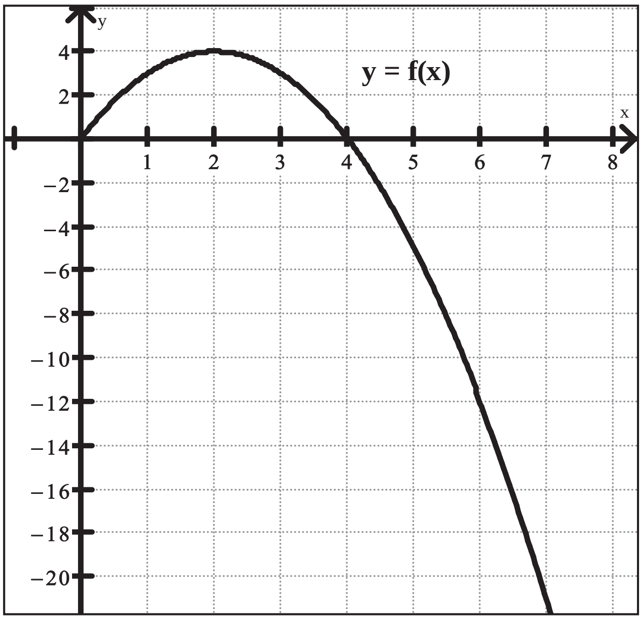
a₁) $\int_0^4 f(x)\,dx$

a₂) $\int_0^5 f(x)\,dx$

a₃) $\int_0^6 f(x)\,dx$

a₄) $\int_0^7 f(x)\,dx$

Hacer esto aplicando un conveniente "proceso de integración" y "leyendo" del **graf. f** los valores que necesite al efecto.



b) Dar una estimación del área comprendida por el **graf f** y el **eje x**, para cada uno de los intervalos que se indican a continuación: **[0, 4]; [0,5]; [0, 6]; [0, 7]**.

c) Sabiendo que el **graf f** es el de una parábola, se pide:
c_1) hallar la ley de **f**.
c_2) Calcular $\int_0^4 f(x)\,dx$; $\int_0^5 f(x)\,dx$; $\int_0^6 f(x)\,dx$; $\int_0^7 f(x)\,dx$; luego, indicar si las aproximaciones obtenidas en **(a)** son por exceso o por defecto.

d) Calcular las áreas indicadas en el ítem **(b)** e indicar el carácter de las aproximaciones.

e) Si ***x = x***(t) es la función de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una recta, y **v** su velocidad entonces **v = *x´***(t) ([***x***]= km ; [**t**]= hs. y [**v]** = km/ hs.
e_1) Si **v = f** (t) se pide explicar que representa (y porqué) c/u de las integrales en el ítem **(c)**.

Sugerencia*:* tener en cuenta que **v = f** (t) y **v = x´**(t); o sea, que **f** (t) = **x´**(t) ; aplicar el **TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL (**para la función de posición ***x = x(t), v****(t) = x´(t).*

Δx = "***desplazamiento total***" entre t_1 y t_2 es:

$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} x'(t).dt = \Delta x_{[t_1;t_2]}$.

e_2) **Graficar la trayectoria de la partícula si x(0)=2**, hallando para ello ***x= x(***t).
e_3) Explicar qué representa cada uno de los valores obtenidos en el ítem **(d).**

➢ **Cambio total o variación total en procesos a velocidad variable**.

Para resolver problemas donde la incógnita es el "*cambio o variación total*" debida a un "*proceso de cambio*" tenemos un importante resultado teórico en el que se tiene un principio válido tanto para *razones de cambio* en las ciencias naturales como en las sociales.

⊖ TEOREMA del CAMBIO TOTAL

En un proceso de cambio:
" la integral de la razón de cambio es el cambio total "

De otra forma, si **z = f (t)** es la función que describe un proceso para cada **t** en **[a; b]** y **v** la ***velocidad del proceso,*** entonces **v = f´(t)** y **Δf,** la ***variación o cambio total*** de **f,** es:

$$\Delta \mathbf{f} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{v(t).dt} = \int_a^b f'(t).dt = \Delta f_{[a;b]}$$

En los problemas que siguen se sugiere tener en cuenta este teorema.

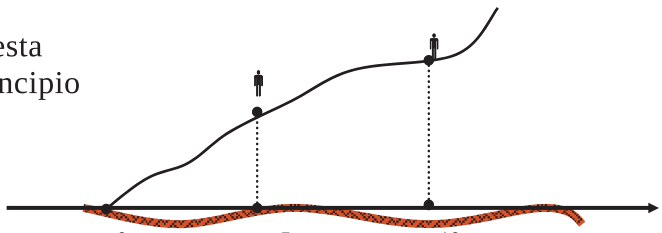
14) **a)** Si **w´**(t) es la razón de crecimiento de un niño en Kg. por años, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t).dt$?

b) Si se fuga aceite de un tanque a razón de **r = *r***(*t*) lts./min.**,** ¿qué representa $\int_0^{120} r(t).dt$?

c) Una población de abejas se inicia con **100** ejemplares y se incrementa a razón *p´(t)* especímenes por semana, **¿** qué representa $\int_0^{12} p'(t).dt + 100$ **?**

15) Si ***f ´*(x)** es la pendiente de una cuesta a una distancia de ***x*** metros del principio de la misma,

¿qué representa $\int_5^{10} f'(t).dt$?



16) Una partícula se mueve sobre una recta de modo que su velocidad en cada instante t es **v**(t) = **-** 6t ^{2} + 18 t (m/sg);

a) ¿cuánto se ***desplaza*** esta partícula en cada uno de los períodos de tiempo que se indican a continuación: $0 \le t \le 2$; $0 \le t \le 3$; $0 \le t \le 4$; $0 \le t \le 4{,}5$; $0 \le t \le 5$? ;

b) ¿qué **distancia** recorre en cada uno de tales períodos?

17) Si ***v****(t)* = **-** 6t ^{2} **+** 18 t *(ls /h)* representa la velocidad con que entra(sale) agua de un tanque que inicialmente tiene **25** ls. de agua ; se pide:

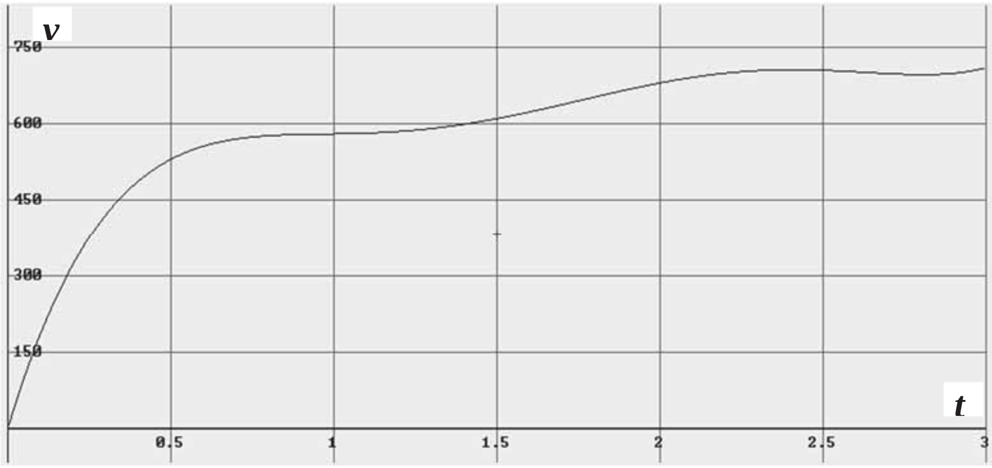
a) determinar la variación de volumen en el tanque en los períodos de tiempo que se indican a continuación: $0 \le t \le 2$; $0 \le t \le 3$; $0 \le t \le 4$; $0 \le t \le 4{,}5$.

b) determinar el volumen total de agua en el tanque a las **2; 3; 4 y 4 ½** hs.

c) el tanque, ¿se vacía en algún instante?, ¿cuándo?

18) Sea $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{2}}{(\mathbf{10 - 2t})^{\mathbf{2}}}$; $[v] = \dfrac{mg}{seg.}$ la velocidad con que cierta masa de soluto se disuelve en un solvente. Si la masa de soluto originariamente puesta en contacto con el solvente es de **0,4** mg y en ese instante no había soluto en el solvente y esa cantidad está muy lejos del punto de saturación, ¿en qué instante estará disuelta toda la masa?

19) La gráfica adjunta muestra el registro de la tasa de "disolución" en [mg/hs.] de un soluto en un solvente, durante las **3** primeras horas de puestos ambos en contacto.



a) Proponga y ejecute un proceso que le permita dar un valor aproximad de la masa total *disuelta* al cabo de las 3 hs.
b) ¿Cómo mejoraría la aproximación? ¿Cómo obtendría el valor exacto?. ¿Puede obtener el valor *exacto*?, ¿porqué?

20) Si el gráfico del ejercicio (**17)** representa la densidad lineal (en [mg/ms.]) en cada punto de una varilla de acero, la cual tiene **3** metros de largo.

a) Ejecute un proceso que le permita dar un valor aproximado de la masa de la varilla.
b) ¿Cómo mejoraría la aproximación? ¿Cómo obtendría el valor exacto?. ¿Puede obtenerlo?

21) La velocidad de un móvil que avanza en línea recta se lee en su velocímetro a intervalos de diez segundos y se registra en una tabla. Usar esta tabla para dar una estimación de la distancia recorrida en **100** segundos.

t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
v (m/s)	40	48	52	55	65	70	65	65	60	55	50

22) Se da la función velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encontrar el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado en cada caso. Graficar la trayectoria.

a) $v(t) = -3t + 6$ en : $0 \le t \le 2$; $0 \le t \le 4$ y $0 \le t \le 5$; siendo $x(0) = 0$

b) $v(t) = 3t^2 - 6t + 3$ en : $0 \le t \le 1$ y $0 \le t \le 2$; siendo $x(0) = 0$.

23) Un automovilista viaja hacia el campo desde una ciudad de tránsito muy congestionado; comienza a paso de tortuga y, conforme el tránsito disminuye acelera gradualmente. El conductor (para entretenerse) cada ½ hora registra la velocidad a la que va. Con sorpresa al cabo de un tiempo (y varias anotaciones) observa que los registros muestran un "patrón" el cual (haciendo rápidos cálculos mentales) le permite concluir que está viajando a una velocidad $\boldsymbol{v = 8\,t^{2}}$ *(Km/ hs.)*.

Si los cálculos de este automovilista estuvieran bien; ¿qué *distancia* había recorrido a las 3hs. de haber salido si durante ese tiempo no para nunca? Si el lugar al que va está a **243** Km. de donde partió y sigue a esa velocidad hasta llegar, ¿a que velocidad llega?

24) Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $\boldsymbol{v(t) = t^{2}.e^{-t}}$ mts. por segundos, ¿cuánto se desplaza en **3** segundos ?, ¿qué distancia recorre en **3** segundos?.

25) La función $\delta(x) = \mathbf{9 + 2}\sqrt{x}$ da, en kilogramos por metro, la densidad lineal de una varilla cuya longitud total es de **4** m. y para la cual ***x*** se mide en metros desde uno de los extremos de la varilla. Se pide, encontrar la masa total de la varilla.

26) Una cuerda no homogénea de **3** metros de largo está hecha de un material que es muy liviano cerca del extremo izquierdo y muy pesada cerca del derecho. Si se sabe que a una distancia **"x"** del extremo izquierdo su densidad es de $\mathbf{5x^2}$ gr./m ; hallar la masa total de la cuerda.

27) Una población de animales crece a razón de "**200 + 50 t** " animales al año (t medido en años), ¿en cuánto aumenta la población entre el cuarto y el décimo año?. ¿cuántos animales habrá al cabo de **10** años si no muere ninguno e inicialmente había **2**?

28) Una población de bacterias se inicia con **400** ejemplares y crece a razón de $\boldsymbol{r\,(t) = 450.200.\,e^{1.13\,t}}$ bacterias por horas. ¿Cuántas habrá después de tres horas?

29) Suponga que **h** es una función tal que **h(1) = -2** ; **h´(1) = 2** ; **h´´(1) = 3**; **h (2) = 6** ; **h´(2) = 5**; **h´´(2) = 13** y **h´´** es continua en todo **R**. Evaluar $\int_1^2 h''(u)\,du$.

➢ Longitud arco de curva:

30) Calcular la longitud de cada uno de los siguientes arcos de curva.

a) $y = \frac{x^2}{2}$; $0 \leq x \leq \sqrt{3}$

b) $y = \sqrt{x^3}$; $0 \leq x \leq 32/9$

c) $\begin{cases} x = 4cost - 1 \\ y = 4sent + 1 \end{cases}$; $0 \leq t \leq \pi/4$

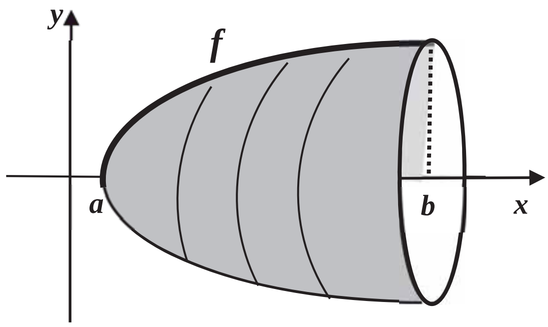
d) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}$; $0 \leq t \leq 1$

➢ Volumen de un sólido de revolución:

31) Al hacer girar alrededor del **eje x** la **región** comprendida entre una curva gráfica de una función **f** continua y definida positiva en [a; b]; se genera un sólido "**S**", llamado "sólido de revolución", cuyo volumen se calcula a través de la siguiente integral:

$$\textbf{vol. S} = \pi \int_a^b f^2(x).dx$$

Para las siguientes funciones se pide graficar el sólido que generan al girar alrededor del **eje x** y calcular su volumen usando la integral indicada. En caso de resultar un sólido "conocido", verificar que el resultado obtenido coincide con el de la geometría clásica.



a) **f** (x) = **x- 3** ; **Df = [3; 8] .**

b) **f** (x) = $2\sqrt{x}$; **Df = [0; 4] .**

c) **f** (x) = $\sqrt{9 - x^2}$; **Df = [-3; 3] .**

d) **f** (x) = e^x ; **Df = [0; 1] .**

e) la región limitada por **f(x) = x** y **g(x) = x²**

➢ TRABAJO:

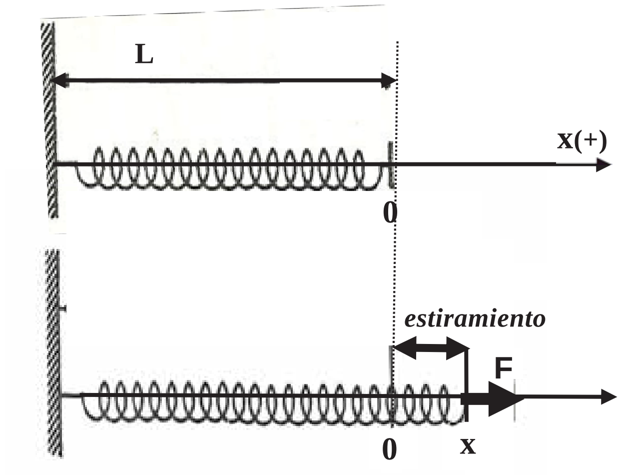
32) Para un gas perfecto cuando la expansión es ***isotérmica*** entonces se cumple la ley de Boyle-Mariotte : **p v = cte** ; en particular, **p v = n R T**
(**p**=presión; **v**=volumen; **R**=cte. de los gases; n=nº de moles; **T=Temperatura (cte.)**)

a) V ó F, justificar: para una expansión isotérmica, **p = f (v)**; **f** continua en $\mathbf{R}^+$.

b) Sabiendo que el trabajo requerido para ***expandir isotérmicamente*** un gas perfecto desde un volumen $\mathbf{v}_1$ a otro $\mathbf{v}_2$ se calcula con la siguiente expresión: $\mathbf{W} = \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{p}\,.\,\mathbf{dv}$, se pide resolver la integral, hallar una expresión para **W**. Luego, discutir el signo **W**.

33) <u>Ley de Hooke</u>

La ley de Hooke expresa que la fuerza (**F**) de recuperación de un resorte es proporcional a la “elongación” sufrida en el mismo: $\mathbf{F = k \cdot x}$
($\mathbf{k}$ = cte del resorte ó cte de elasticidad**).**



Consideramos un resorte cuyo extremos izquierdo está fijo mientras el derecho es libre de moverse a lo largo de la recta de acción del resorte. El resorte, en ***reposo*** (ni comprimido ni estirado) tiene una longitud **L** a la que llamamos ***longitud natural***. Si está en reposo decimos que está en su ***posición de equilibrio***
En estas condiciones se introduce un *<u>sistema de referencia</u>* (**eje x**) a lo largo de la línea del resorte, con el *<u>sentido positivo</u>* (+) hacia la derecha y el *<u>origen</u>*, **O**, en el extremo derecho del resorte cuando está en la ***<u>posición de reposo</u>*****.** Con **x** indicamos la ***<u>posición</u>*** del *<u>extremo derecho del resorte</u>* a partir de **O** y a lo largo del **eje x**. Así construido el sistema **x** puede ser ***<u>positiva</u>***, ***<u>cero</u>*** o ***<u>negativa</u>*** según el extremo móvil esté a la ***<u>derecha</u>***, ***<u>en</u>***, o la ***<u>izquierda</u>*** de su ***<u>posición de equilibrio</u>*** **(x= 0).**

El sistema se pone en movimiento *forzando* al extremo derecho a abandonar la posición de equilibrio a través de una fuerza **F** cuya intensidad y sentido depende de **“x”** según la **ley de Hooke .** Para estirar el resorte la fuerza debe actuar hacia la derecha (**x >0).** Para comprimir el resorte la fuerza debe actuar hacia la izquierda (**x < 0).**
Si con **W** indicamos el trabajo realizado para estirar (o comprimir) un resorte **“**ℓ **cm”** respecto a su posición de equilibrio**,** entonces $\mathbf{W} = \int_{\mathbf{0}}^{\ell} \mathbf{F(x).\,dx}$ con $\mathbf{F(x) = k \cdot x}$

a) Calcular el trabajo realizado sobre un resorte cuya constante elástica es **k = 1, 8** erg**/**cm, si el mismo mide **7 cm.** y se lo ha estirado hasta alcanzar **9 cm.**
b) Calcular el trabajo realizado para comprimir un resorte **6 cm.** desde su posición de reposo si se sabe que para comprimirlo **2,5 cm** la fuerza requerida es de **12 kg.**

➢ <u>Valor Promedio de *f* sobre [*a; b*]:</u>

Dado un conjunto discreto de “n” números $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ su promedio es:

$$y_{prom} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Pero, ¿cómo calculamos el *promedio* de un *continuo* de números, o sea, de un conjunto de números que viene dado por una función $y=f(x)$ en un intervalo $[a; b]$?
Por ejemplo, ¿cómo calculamos la temperatura *promedio* de un día, T_{prom}, si conocemos la función $T=f(t)$, t en horas (minutos o segundos) que informa la temperatura en cualquier momento de ese día?

Para hacer este cálculo dividimos el intervalo en 'n' partes iguales, cada una de ellas de longitud: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, elegimos 'n' puntos c_1, c_2, c_3,….., c_n en cada sub-intervalo y calculamos el promedio de $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f(c_3)$,….., $f(c_n)$: $\frac{f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\cdots+f(c_n)}{n}$

Por ejemplo si f es la función temperatura y n=24, esto significa que tomamos lecturas de temperaturas cada una hora y las promediamos.
Si despejamos 'n' de Δx y reemplazamos en el promedio anterior queda:

$$\frac{f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\cdots+f(c_n)}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

Si hacemos que 'n' crezca calculamos el promedio de una cantidad mayor de números (por ejemplo, promediando lecturas de temperatura cada minuto, o cada segundo). En el límite, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(c_i)dx$$

Definimos entonces ***el valor promedio de f sobre [a; b]***, como:

$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(c_i)dx$$

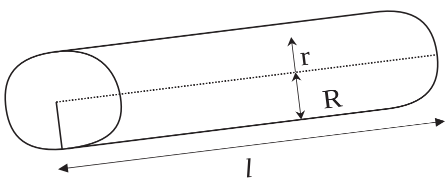
Actividades:

1) Hallar el valor promedio de $f(x) = 1 + x^2$ sobre [-1,2]. ¿Existe algún número de $c \in [-1,2]$ tal que $f(c) = f_{prom}$?

2) Dada $x=f(t)$, función posición de un móvil, demostrar que la *velocidad media* del móvil en [t1, t2] es la misma que el *promedio de velocidades* (v_{prom} con $\boldsymbol{v}=x'$) en el mismo intervalo. (Sugerencia: usar el teorema del cambio total)

3) La velocidad $\boldsymbol{v}$ de la sangre que fluye en un vaso de radio **R** y longitud l, a una distancia r del eje central es:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$



donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η la viscosidad de la sangre.
Se pide hallar la velocidad promedio, v_{prom}, sobre el intervalo 0 < r < R. Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

10.6 Integrales Impropias

Ciertas aplicaciones del cálculo conducen de manera natural a la formulación de integrales en las que:

1.-El intervalo de integración no es acotado; tiene la forma: **[a;+∞) ó (-∞; b] ó (-∞;+∞)**

2.- El integrando tiene una discontinuidad infinita en algún punto **c:** $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

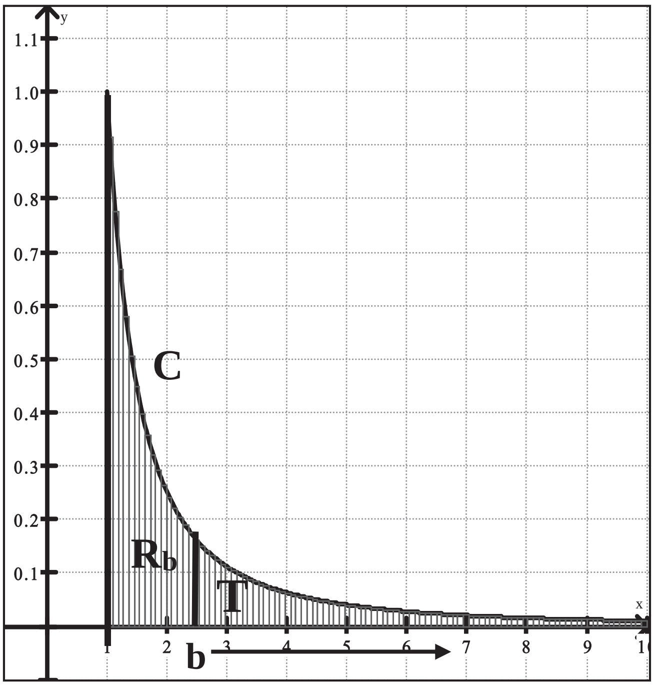
O sea, de integrales de la forma: $\int_1^{\infty} f(x).dx$; $\int_{-\infty}^{4} f(x).dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx$; $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}.dx$

Estas integrales reciben el nombre de **"Integrales Impropias".**

<u>Ejemplo 1</u>: Integral Impropia

(1ra especie- intervalo no acotado)

Dada **f : [1 ; + ∞) → R** con **f**(x) = $\frac{1}{x^2}$ **,** si **R**



si $\mathbf{R_b}$ es la región "acotada" por la curva **C = graf f ,** el **eje x** y las rectas x **= 1;** x **= b** entonces, **área** $\mathbf{R_b}$ **=** $\int_1^{b} \frac{1}{x^2}.dx$. **(b >1)**

área $\mathbf{R_b}$ **=** $1 - \frac{1}{b}$ (verificar) .

Dada **T ,** la región "no acotada" comprendida entre la curva **C ,** el **eje x** y la recta x **= 1,** lo "razonable" es suponer que esta región no tiene "*área finita*".

Sin embargo, y aunque resulte sorprendente, existen regiones no acotadas con *áreas finitas*.

<u>Problema</u>: ¿área T?

Para analizar si este área existe (o no), lo que hacemos es calcular que sucede con el **área** $\mathbf{R_b}$ cuando **b→** +∞ . Si este límite es **finito** (**L**∈**R**); decimos que **área T =** **L**.

***<u>Calculamos</u>*:** $\lim\limits_{b \to +\infty} \text{área}\, R_b = \underbrace{\lim\limits_{b \to +\infty} \left[\int_1^{b} \frac{1}{x^2}.dx \right]}_{} = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[1 - \frac{1}{b} \right] = 1$

***<u>Concluimos</u>*:** **área T = 1** (= $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx$)

Definición Integrales Impropias (1ra especie)

Caso 1: **dom f = (a; +∞)**: $\int_a^{\infty} f(x).dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\int_a^b f(x).dx\right]$ (**b** > **a**)

Caso 2: **dom f = (- ∞ ; b)**: $\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\int_a^b f(x).dx\right]$ (**a** < **b**)

Caso 3: **dom f = (- ∞ ; ∞)**: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \left[\int_{-\infty}^{c} f(x).dx\right] + \left[\int_{c}^{\infty} f(x).dx\right]$

(si ambas integrales "convergen" para cualquier elección conveniente de **c**)

Integrales Impropias

- Si el límite existe decimos que la integral impropia "converge". **(ej. 1)**
- Si el límite no existe decimos que la integral impropia "diverge".
- Si el límite es "infinito" decimos que la integral impropia "diverge a infinito".

Actividades:

1) Evaluar las siguientes integrales impropias de 1ra especie, indicar V ó F**:**

a) $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2}.dx = \frac{1}{3}$

b) $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{x^2}.dx = \frac{1}{3}$ (¿puede prever este resultado sin calcular la integral?; ¿porqué?)

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{2}$ (¿puede prever este resultado sin calcular la integral?; ¿porqué?)

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}.dx = \pi$

f) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}.dx = +\infty$

g) $\int_1^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}.dx = +\infty$ (**sug.**: usar la siguiente igualdad $\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$).

2) Para el **Caso 3,** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \left[\int_{-\infty}^{c} f(x).dx\right] + \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx$

(si ambas integrales "convergen" para cualquier conveniente elección de **c**)
Podemos preguntarnos si no habrá otra forma "más simple" de calcular esta integral como por ejemplo, con la siguiente expresión: $\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x).dx$

La respuesta es **NO**. Para justificar esta respuesta basta mostrar que no da el mismo resultado.

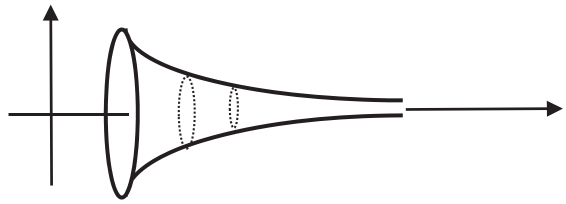
Se pide: mostrar que $\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} \frac{1+x}{1+x^2}.dx = \pi$ mientras que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}.dx$, **diverge**.

(**sug.**: tomar **c = 1**; usar ejercicio **(g)).**

3) Muestre que el área bajo la curva $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ es "infinita".

4) Calcule el volumen del "cuerno de Gabriel" si se sabe que este volumen es finito.

* cuerno de Gabriel**:** sólido generado al girar alrededor del eje x la región determinada por la curva $\mathbf{y} = \frac{1}{x}$ y el eje x, para $x \geq 1$



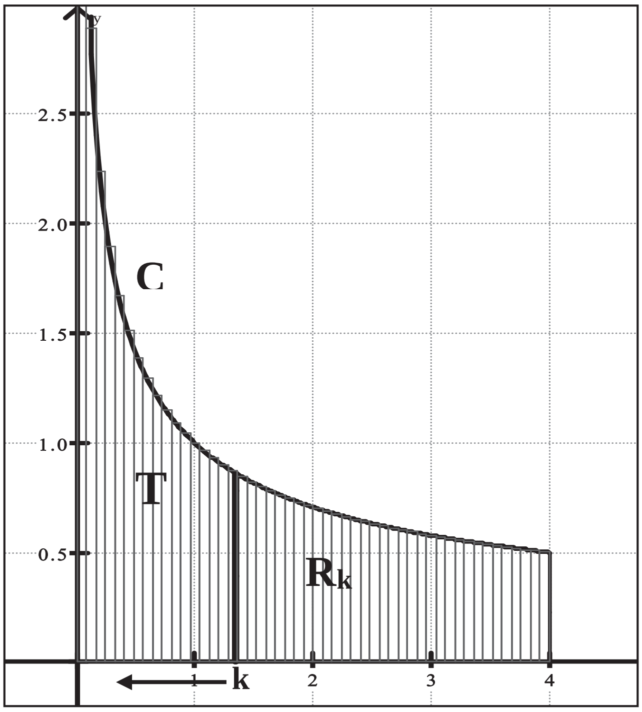
Ejemplo 2: Integral Impropia

(2da especie- función discontinua)

Dada **f : (0 ; 4] → R** con $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

si $\mathbf{R_k}$ es la región "acotada" por la curva **C = graf f ,** el **eje x** y las rectas $x = k$ **;** $x = 4$ entonces, **área** $\mathbf{R_k} = \int_k^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$. (**a** >**0**)

área $\mathbf{R_k} = 4 - 2.\sqrt{k}$ (verificar) .



Dada **T**, la región "no acotada" comprendida entre **C,** el **eje x** y las rectas $x = 0$ **,** $x = 4$ **;** lo "razonable" es suponer que esta región no tiene "*área finita*" . Sin embargo, y aunque siga siendo sorprendente, existen regiones de este tipo con *áreas finitas*.

Problema: **¿área T?**

Para analizar si este área existe (o no), lo que hacemos es calcular que sucede con el **área** $\mathbf{R_k}$ cuando **k → 0** . Si este límite es finito (**L**∈**R**); decimos que **área T = L**

O sea; ***calculamos***: $$\underbrace{\lim_{k \to 0} R_k = \lim_{k \to 0^+} \left[\int_k^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx \right]} = \lim_{k \to 0^+} \left\lfloor 4 - 2\sqrt{k} \right\rfloor = 4$$

concluimos: **área T = 4** $\left(= \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}.dx \right)$

Definición Integrales Impropias (**2da especie**)

Caso 1: dom f = (a; b] , $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$) ; $\int_a^b f(x).dx = \lim_{k \to a^+} \left[\int_k^b f(x).dx \right]$

Caso 2: dom f = [a; b) , $\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$) ; $\int_a^b f(x).dx = \lim_{k \to b^-} \left[\int_a^k f(x).dx \right]$

Caso 3: dom f = [a; b] – { c }, $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

$$\int_a^b f(x).dx = \left[\int_a^c f(x).dx \right] + \left[\int_c^b f(x).dx \right]$$

(si ambas integrales impropias del lado derecho, "convergen")

5) Evaluar las siguientes integrales impropias de 1ra especie, indicar V ó F**:**

a) $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} . dx = +\infty$ **b)** $\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^2} . dx = +\infty$

c) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} . dx = \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt[3]{3}\right)$

10.7 Integrales de Funciones Vectoriales

10.7.1 Introducción

Sea la función vectorial $\vec{v}$: **[a; b]**$\rightarrow\Re^2$, con $\vec{v}(t)=f(t).\bar{i}+g(t).\bar{j}$, donde ***f*** y ***g*** son funciones continuas $\forall$ ***t*** $\in$ **[a;b]**, las **primitivas** de $\vec{v}$ son funciones vectoriales y la **integral indefinida** es una familia de funciones vectoriales.
Dado que las funciones componentes de $\vec{v}$ son funciones escalares, la familia de primitivas de $\vec{v}$ puede obtenerse a partir de las integrales indefinidas de sus funciones componentes. Luego:

$$\int \bar{v}(t).dt=\left(\int f(t).dt\right).\bar{i}+\left(\int g(t).dt\right).\bar{j}$$

Haciendo extensivos los ***Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral*** para funciones vectoriales y aplicando a continuación la ***Regla de Barrow***, la **integral definida** de una función vectorial $\vec{v}$ en **[a;b]** es un vector y puede obtenerse integrando cada una de sus funciones componentes y luego evaluando en los extremos del intervalo:

$\int_a^b \bar{v}(t).dt=\bar{R}(t)\Big|_a^b=\bar{R}(b)-\bar{R}(a)$ donde $\bar{R}$ es una primitiva de $\vec{v}$, es decir, $\bar{R}'(t)=\bar{v}(t)$ $\forall t\in$**[a;b]**. Reemplazando llegamos a: $\int_a^b \bar{R}'(t).dt=\bar{R}(t)\Big|_a^b=\bar{R}(b)-\bar{R}(a)=\Delta\bar{R}_{[a;b]}$

Es decir que el resultado de integrar la razón de cambio instantánea de $\bar{R}$ cuando ***t*** varía desde ***a*** hasta ***b*** es el cambio total de $\bar{R}$ para ese mismo intervalo.

10.7.2 Cambio total

* Si $\bar{r}=\bar{r}(t)=(x(t);y(t))$, es la ***<u>función de posición</u>*** de un objeto que se mueve en el plano con **t** $\in$[**t**$_1$ **;** **t**$_2$], entonces su ***<u>velocidad</u>*** es $\bar{v}(t)=\bar{r}'(t)$. Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{v}(t).dt=\int_{t_1}^{t_2} \bar{r}'(t).dt=\int_{t_1}^{t_2}(x'(t);y'(t)).dt=\left(\int_{t_1}^{t_2} x'(t).dt;\int_{t_1}^{t_2} y'(t).dt\right)=$$
$$(x(t_2)-x(t_1);y(t_2)-y(t_1))=(\Delta x;\Delta y)=\Delta\bar{r}_{[t_1;t_2]}$$

es el "*cambio total de posición*" ó "*desplazamiento total*" **(Δx; Δy)** entre t_1 y t_2

Conocida la función **velocidad**, ¿Se puede determinar cuál es la **posición** del móvil en cada instante? **NO**, pues falta la condición inicial.

$$\int \bar{v}(t).dt=\int \bar{r}'(t).dt=\int (x'(t);y'(t)).dt=\left(\int x'(t)dt;\int y'(t).dt\right)=(x(t)+A;y(t)+B)$$

Ejemplo: Una partícula comienza su movimiento siendo su posición inicial $\bar{r}(0)=(1;0)$ con una velocidad $\bar{v}(t)=(2.t;sen(t))$. Determina la velocidad inicial, posición y aceleración en cada instante.

$$\int \bar{v}(t).dt=\int \bar{r}'(t).dt=\int (2.t;sen(t)).dt=\left(\int 2t.dt;\int sen(t).dt\right)=(t^2+A;-cos(t)+B)$$

$$A=1;\ B=1 \Rightarrow \bar{r}(t)=(t^2+1;-cos(t)+1)$$

10.7.3 Actividades:

1) Evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \bar{r}(t)\,dt$ si $\bar{r}(t) = (2t\,;\, t+1)$

b) $\int_0^{\pi} \bar{r}(\theta)\,d\theta$ si $\bar{r}(\theta) = (\cos\theta\,;\, \operatorname{sen}\theta)$

c) $\int_3^8 \bar{r}(t)\,dt$ si $\bar{r}(t) = (5\,;\, t\,;\, \sqrt{t+1})$

2) Encontrar $\bar{r}(t)$ si $\bar{r}'(t) = t^2\,\bar{i} + 4t^3\,\bar{j} - t^2\,\bar{k}$ y $\bar{r}(0) = \bar{j}$

3) Determinar los vectores velocidad y posición de una partícula que tiene la aceleración y la velocidad y posición inicial dadas:

a) $\bar{a}(t) = -10\,\bar{k}$ $\quad \bar{v}(0) = (1;1;-1)$ $\quad \bar{r}(0) = (2;3;0)$

b) $\bar{a}(t) = \bar{i} + 2\,\bar{j} + 2t\,\bar{k}$ $\quad \bar{v}(0) = \bar{0}$ $\quad \bar{r}(0) = \bar{i} + \bar{k}$

c) $\bar{a}(t) = t\,\bar{i} + t^2\,\bar{j} + \cos 2t\,\bar{k}$ $\quad \bar{v}(0) = \bar{i} + \bar{k}$ $\quad \bar{r}(0) = \bar{j}$

4) Una partícula en movimiento comienza con una posición inicial $\bar{r}(0) = (1;0;0)$ y una velocidad $\bar{v}(t) = (2t^2 + 1\,;\, 3t^2 - 1\,;\, t + 1)$. Determinar velocidad inicial, posición y aceleración en el tiempo y aceleración inicial.

5) En un laboratorio de biología se cruzan moscas de la fruta (*Drosophila melanogaster*) con distintas características a fin de estudiar el efecto sobre la progenie. Una de ellas se escapa del frasco donde estaban y se posa en un pizarrón que había en la habitación. Suponiendo situar un sistema de referencia cartesiano ortogonal con origen ubicado en el vértice inferior izquierdo del pizarrón y ejes coordenados conteniendo a dos de los lados del mismo, la mosca estaría inicialmente posada en el punto **P(0;5).** A partir de esa posición comienza a moverse con velocidad instantánea dada por $\bar{v}(t) = (2\,;\, 8 - 8.t)$ hasta que alcanza el borde inferior del pizarrón, momento en el cual deja de verse. Si el tiempo se mide en minutos y las dimensiones del pizarrón en decímetros:

a) Determinar la función $\bar{r}$ que describe la posición de la mosca en cada instante explicitando dominio, ley y codominio.

b) Demostrar que la trayectoria ***T*** descripta por la mosca es un arco de parábola.

c) Hallar el vector desplazamiento en el período de tiempo estudiado.

d) Graficar la trayectoria de la mosca señalando el sentido de recorrido y el vector desplazamiento hallado en el ítem anterior.

e) Indicar verdadero o falso justificando la respuesta:

i) A los 2 minutos la mosca se hallaba a igual altura que al comienzo del movimiento.

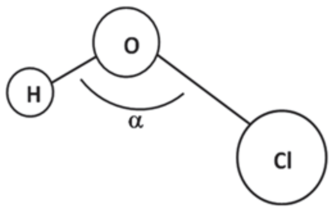
ii) La mosca tarda 5 minutos en detener su movimiento.

iii) $\bar{s}(\lambda) = (\lambda\,;\, 4.\lambda - \lambda^2 + 5)$ con $0 \le \lambda \le 5$ describe también la trayectoria de la mosca.

6) Según el modelo atómico de Bohr-Rutherford, los electrones giran alrededor del núcleo atómico siguiendo órbitas circulares estables. Si situamos un sistema de referencia cartesiano ortogonal con **origen de coordenadas en el centro de la circunferencia** recorrida por cada electrón, la **posición** de uno de ellos puede definirse por la función vectorial $\vec{r}$, con $t \in [0,+\infty]$. Siendo $\vec{v}(t) = (sen(2t), cos(2t))$ la **velocidad** del electrón en cada instante t y $\vec{r}(0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

a) Hallar la ley de la función $\vec{r}$ y graficar la trayectoria del electrón señalando el sentido de recorrido.
b) Indicar el tiempo que tarda el electrón en volver a pasar por la posición inicial.
c) Calcular el desplazamiento neto del electrón en el período $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mediante dos procedimientos diferentes.

7) Una molécula no es una asociación rígida de átomos. Está demostrado que todas las moléculas están en movimiento continuo; por lo tanto un modelo molecular puede ser un sistema en el que los átomos de la molécula se representan con esferas de diferentes masas y los enlaces químicos de la misma con resortes de longitudes variables.
En una molécula triatómica heteronuclear, como el ácido hipocloroso (HClO, ver gráfico adjunto a la derecha), el aumento y disminución periódica del ángulo del enlace H-O-Cl produce un cambio continuo en la distancia interatómica entre los átomos de H y Cl.



Si situamos la molécula en un sistema de referencia cartesiano ortogonal de manera que:
- el "átomo de oxìgeno" (O), simula quedar estático en el origen de coordenadas;
- la posición del "átomo de hidrógeno" (H) podría considerarse fija en el punto (-1;0);
- la posición del átomo de cloro (Cl) podría describirse por una función vectorial $\bar{r}$ y la velocidad con que se mueve puede modelizarse a través de la función $\vec{v}(t) = (-sen(t), \; 2.cos(t).sen(t))$ con $t \in \Re_o^+$. Sabiendo que inicialmente el Cl estaba ubicado en el punto de coordenadas (1, 1):

a) Graficar la situación inicial de la molécula de HClO en un sistema cartesiano apropiado.
b) Hallar la función $\bar{r}$ que modeliza la posición de Cl en cada instante t, indicando ley, dominio y codominio de $\bar{r}$.
c) Dar una parametrización de la curva C definida por $\bar{r}$.
d) Demostrar que la trayectoria descripta por el átomo de Cl es un arco de parábola, encontrando previamente la ecuación cartesiana de C.
e) Graficar la trayectoria del Cl en el gráfico del ítem **a**.
f) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar todas tus respuestas:

i) En el instante $t = \frac{3}{2}\pi$, el Cl se está acercando a su posición inicial.
ii) El tiempo T empleado en volver a alcanzar la posición inicial es $T = \pi$
iii) En el intervalo $[0,2\pi]$ el desplazamiento del Cl es nulo.
iv) En el intervalo $[0,2\pi]$ la distancia recorrida por el Cl es nula.
v) La aceleración del Cl es constante.

11 — Ecuaciones Diferenciales

11.1 Introducción

La descripción matemática de procesos o fenómenos de distinta naturaleza se hace mediante funciones que muestran la relación de dependencia entre las magnitudes del caso. Conocida ***f*** (*función del proceso*) se sabe que para hallar la velocidad del mismo basta calcular ***f ´*** y para hallar su aceleración, ***f ´´***.
A menudo debemos resolver problemas que de alguna manera podemos llamar *inversos* del anterior; o sea, problemas donde se conoce la velocidad (***f ´***) *y/ó* la aceleración (***f ´´***) a la que se desarrolla el proceso y la ***incógnita*** es ***f***, la función del proceso. En general, y en los hechos, puede que velocidad y aceleración tampoco sean conocidas pero que, investigando, se pueda describir por medio de una ***ecuación*** la ***" relación entre f y sus derivadas"*** .

*<u>**Ecuación Diferencial**</u>**:** ecuación donde la **incógnita** es una **función** y en la que aparecen una o más **derivadas** de la función incógnita.
En este capítulo nos ocupamos de las **Ecuaciones Diferenciales**, los distintos tipos y métodos de resolución de las mismas. Vemos problemas de naturaleza análoga a la siguiente:

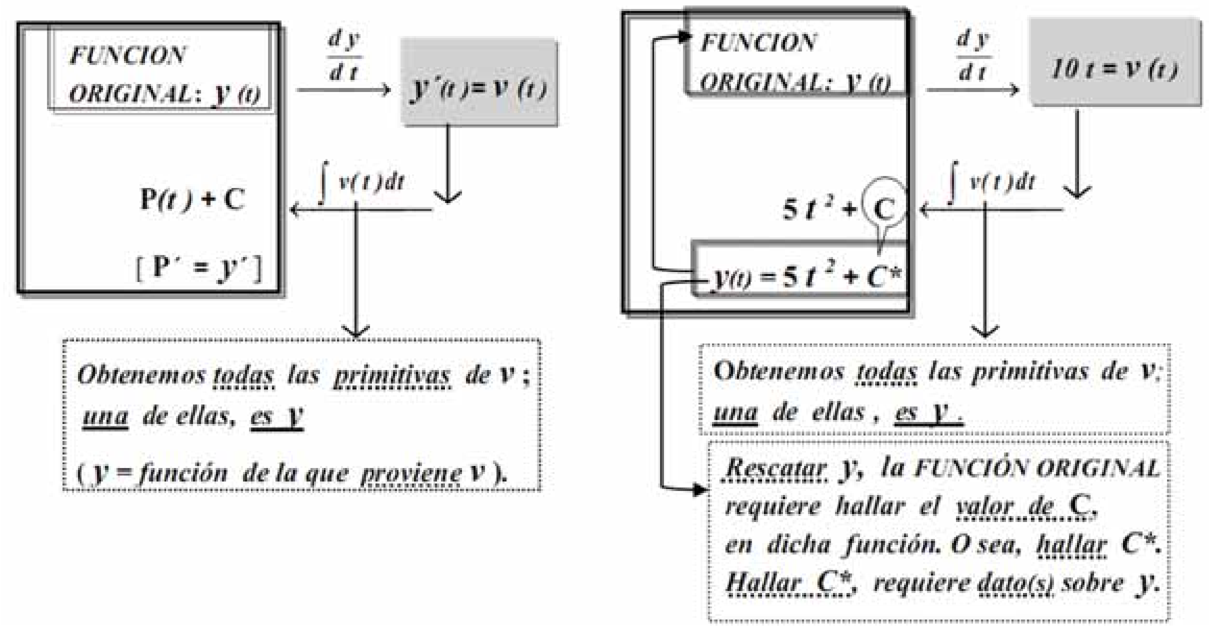
Ej.1: *<u>***dato:***</u> $\boxed{y' = v(t)}$ (*v* = *velocidad*) → <u>***incógnita:***</u> ***y = f(t)*** tal que ***f ´(t) = v(t)***

Ej.2: *<u>***dato:***</u> $\boxed{y'' = a(t)}$ (*a* = *aceleración*) → <u>***incógnita:***</u> ***y = f(t)*** tal que ***f ´´(t) = a(t)***

Ej. 3: *<u>***dato:***</u> $\boxed{y' = 0.1\,y}$ → <u>***incógnita:***</u> ***y*** tal que, la <u>razón de cambio</u> de ***y*** sea <u>proporcional</u> a ***y***.

Ej.1: la resolución de este problema requiere hallar una función ***f*** tal que ***f ´ = v*** ; en otras palabras, <u>**una primitiva de *v***</u> .

⌧ Ya sabemos obtener **primitivas** de una función; que para ello debemos <u>**integrar**</u> la función. Sabemos también que al integrar no obtenemos <u>**una**</u> sino <u>**infinitas primitivas**</u>.
Así, en el caso de un problema "real", vemos que para hallar la solución debemos **integrar** la función dato y hacer **"**algo más**"** **.**



⌧ ***Resumiendo***:

> El tipo de *problema* del que nos vamos a ocupar tiene, en esencia, la siguiente estructura:
> * ***Incógnita*: *f*** *(una función)*
>
> * ***Datos***: $\begin{cases} \text{ecuación diferencial (la que describe la relación entre } f \text{ y sus derivadas)} \\ \text{dato}_{(s)} \text{ inicial}_{(s)} \quad \text{(para determinar una solución del problema).} \end{cases}$

Problema 1:
*Se comienza a llenar un tanque de **100 ls**. con agua que sale de una canilla a una velocidad* $v\,(t) = 3\,t^2$, $[v]$ = lts./h. *Hallar* $V = V(t)$ *si el tanque tiene* ***6 ls*** *al comenzar a llenarlo.*

* ***proceso:*** llenado de un tanque de ***100 ls.*** de capacidad.
Función del proceso: $V = V(t)$ con **V** = volumen *de agua en el tanque al instante* t.

* ***incógnita***: $V = V(t)$

* ***datos***: $v = 3\,t^2$, velocidad del proceso $\Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = 3\,t^2$
$V(0) = V_o = 6$ *(ls)* $\Rightarrow$ dato inicial sobre la función incógnita

> ***Problema reformulado***: $\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = 3\,t^2 & (\textit{ecuación diferencial}) \\ V(0) = 6 & (\textit{dato inicial}) \end{cases}$

* ***Resolución***:
1ro) resolvemos la ecuación diferencial → hallamos todas las primitivas de *v*.

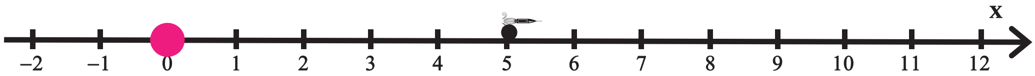
$$\frac{dV}{dt} = 3\,t^2 \xrightarrow{\text{todas las primitivas}} \int 3.t^2\,.dt = t^3 + C$$

2do) determinamos $C^* \;/\; V(t) = t^3 + C^*$

$$V(0) = 0 + C^* \xrightarrow[\text{dato: } V(0)=6]{} C^* = 6$$

3ro) **Rta**: la función solución es: $V(t) = t^3 + 6$.

Problema 2:



*Una partícula **P** se desplaza según un movimiento rectilíneo y con aceleración **a = - 6 t*** $\left[a\right]=\frac{cm}{seg^2}$ *. Si la velocidad inicial es **v_o = 12** y al momento de comenzar a moverse la partícula está a **5 cms.** del origen; ¿dónde se encuentra pasado **1 seg** ?; **¿2 segs ?**; **¿3 segs?**. Graficar su "trayectoria".*

* ***proceso:*** moviendo rectilíneo con aceleración ***no constante***.
Función del proceso: **x** = ***x*** (t) con **x** = *posición de **P** al instante **t**.*

* ***datos****:* ***a = - 6 t*** ; *aceleración de **P*** ⇒ ***x´´(t) = - 6 t***
x_0 = **5** (*posición inicial*) ⇒ ***x(0) = 5***
v_o = 12 (*velocidad inicial*) ⇒ ***x´(0)= 12***

* ***incógnita****:* **x** (1); **x** (2); **x** (3) ⇒ ***incógnita "oculta"*** : **x** = ***x*** (t).

Problema reformulado:	***x´´ = - 6 t***	(***ecuación diferencial***)
	x (0) = 5 ***x´ (0) = 12***	*(**condiciones iniciales**)*

* ***Resolución***:
El ***dato*** es la ***derivada segunda*** de la función incógnita; así, ***rescatar*** la función requiere ***integrar dos veces***. Como consecuencia de esto, tenemos ***dos constantes*** en la función solución (una por cada integral), de allí la necesidad de ***dos condiciones iniciales***.

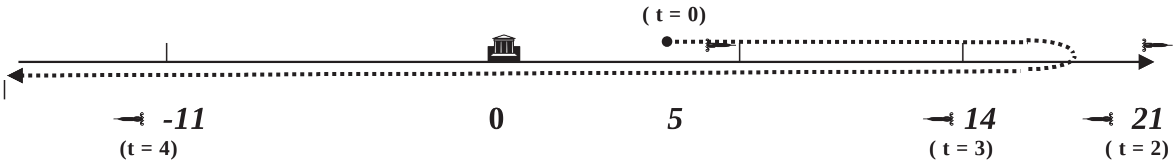
Función Original: ***x*** = ***x*** (t) ***x*** = ***P***(t ; C_1 ; C_2)	$\xrightarrow{d\,x/dt}$ $\xleftarrow{\int x'(t).dt}$	***x´ (velocidad)*** ***x´*** = ***v*** (t; C_1)	$\xrightarrow{d\,v/dt}$ $\xleftarrow{\int x''(t).dt}$	***x´´ (aceleración)*** ***x´´*** = ***a*** (t)
x = ***x*** (t) ***x*** = **-** t^3 **+** C_1 t **+**	$\xrightarrow{d\,x/dt}$ $\xleftarrow{\int x'(t).dt}$	***x´*** = ***v*** (t) ***x´*** = -3 t^2 + C_1	$\xrightarrow{d\,v/dt}$ $\xleftarrow{\int x''(t).dt}$	***aceleración*** ***x´´ = - 6 t***

- ***x*** = **- t^3 + C_1 t + C_2** ⇒ *x (0)* = **C_2** $\xrightarrow{1er\ cond. \rightarrow\ x(0)=5}$ **C_2 = *5***
- ***x´*** = **- 3 t^2 + C_1** ⇒ ***x´ (0)*** = C_1 $\xrightarrow{2da\ cond. \rightarrow\ x'(0)=12}$ **C_1 = *12***

Rta 1: ***x (t) = - t^3 + 12 t + 5*** (***v(t) = x´ (t) =*** **- 3 t^2 + 12** → ***v(2) = 0***)
Rta 2: **t = 1** → ***x (1) = 16*** ⇒ ***P*** está ***16 cm.*** a la ***derecha*** del origen (***v(1)*>0**).
t = 2 → ***x (2) = 21*** ⇒ ***P*** está ***21 cm.*** a la ***derecha*** del origen (***v***(2) = **0**)
t = 3 → ***x (3) = 14*** ⇒ ***P*** está ***14 cm.*** a la ***derecha*** del origen (***v(3)*** **< 0**)
t = 4 → ***x (4) = -11*** ⇒ ***P*** está ***11 cm.*** a la ***izquierda*** del origen

Trayectoria: ***P*** parte de $x_o = 5$ y avanza hacia la derecha durante ***2 seg.***, instante en que se "para" , $v(2) = 0$, a ***21 ms***. del origen. A partir de allí la velocidad es negativa ($v(t) < 0$, $\forall$ $t > 2$), lo que indica que a los ***2 seg***. pega la vuelta y comienza a moverse avanzando hacia la izquierda. A los ***3 seg.*** todavía no llegó al origen, está a ***14 cm.*** del mismo y a su derecha. A los ***4 seg.*** se encuentra a ***11 cm.*** del origen pero, a su izquierda.

Observación: averiguar cuando ***P*** pasa por el origen requiere resolver la ecuación $x(t^*)=0$, ecuación que no podemos resolver sin auxilio de la tecnología pues no conocemos su "*resolvente*". Si no necesitamos mucha precisión en el valor de t^* entonces, a simple vista, vemos que la partícula pasa por el origen en algún momento entre los ***3*** y ***4 seg***. de iniciado el movimiento.



Problema 3:

*Para hallar la función **f** que **modeliza** el proceso de disolución de cierto soluto en un solvente se procede a medir, cada hora y durante 5 horas, la cantidad de masa de soluto disuelta hasta el momento de tomar la muestra. Se organiza la información obtenida en una tabla, la que se adjunta. (en otras palabras, se obtiene la representación "numérica" de **f**).*

*Se pide investigar la "nube de puntos/dato" en busca de algún tipo de "regularidad" o "patrón" en el conjunto de puntos que la forma. En caso de detectar "algo", usar este dato para dar la ley de **f** con fórmula, $m = f(t)$.*

(m = masa disuelta en t hs., [m]= gr)

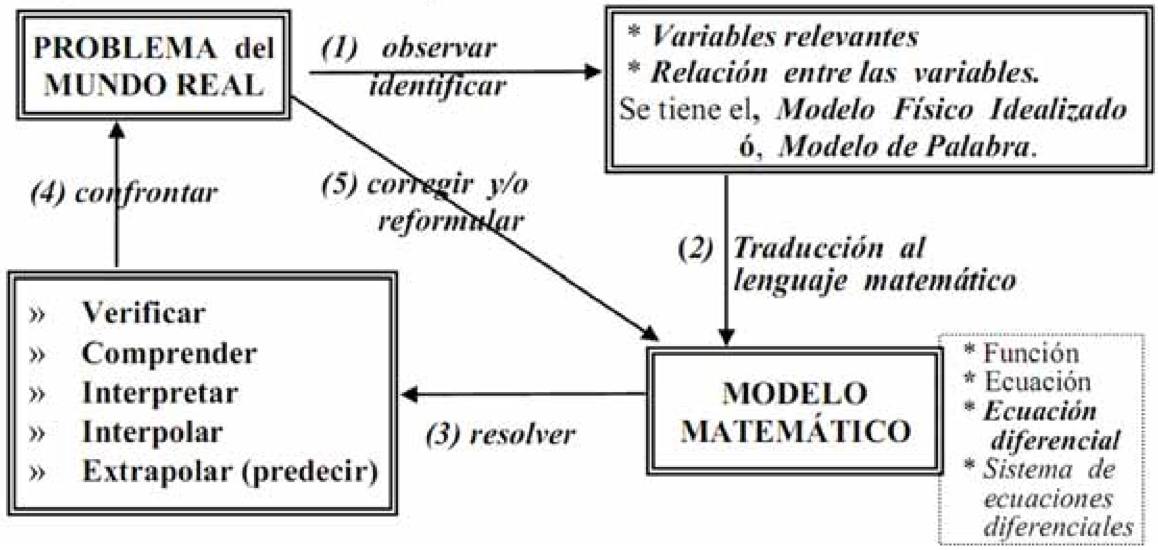
(NOTA: se sabe que el proceso se desarrolla en forma regular y continua durante las 5 hs.)

t	$m = f(t)$
0	$m_o = 10.00$
1	$m_1 = 11.00$
2	$m_2 = 12.10$
3	$m_3 = 13.31$
4	$m_4 = 14.64$
5	$m_5 = 16.10$

En este caso el problema planteado consiste en buscar el "***modelo matemático***" de un cierto proceso a partir de **datos experimentales**; o sea, lo que en particular se ha dado en llamar, el ***"modelo empírico"***.

Modelo Empírico: modelo obtenido por *observación*, *experimentación* o *simulación* del proceso. O sea, es un *modelo matemático* basado en la *obtención y registro metódico de datos*; posterior búsqueda de un *patrón de comportamiento* para la *nube de puntos* que se obtenga. Muchas veces este proceso desemboca en una "***ecuación diferencial***"

El siguiente cuadro resume el proceso descripto:



⌧ Procedemos a recorrer este circuito, comenzando por **(1)**

t	$m = f$ (t)	$\Delta m_i = m_i - m_{i-1}$	***(1) OBSERVACIÓN*** relación entre Δm_i y m_{i-1}
0	$m_o = 10.00$	-------	-------------
1	$m_1 = 11.00$	$\Delta m_1 = \mathbf{1}$	$= 10\%\ m_o$
2	$m_2 = 12.10$	$\Delta m_2 = \mathbf{1.1}$	$= 10\%\ m_1$
3	$m_3 = 13.31$	$\Delta m_3 = \mathbf{1.21}$	$= 10\%\ m_2$
4	$m_4 = 14.64$	$\Delta m_4 = \mathbf{1.33}$	$= 10\%\ m_3$
5	$m_5 = 16.10$	$\Delta m_5 = \mathbf{1.46}$	$= 10\%\ m_4$
i	m_i		
i+1	m_{i+1}	Δm_{i+1}	$= 10\%\ m_i$

(1) Relación entre las variables**:** $\Delta t = 1 \rightarrow \Delta m = 10\%\ m$

(2) modelo de palabra	variación de soluto en la unidad de tiempo **=** 10% de la cantidad de soluto presente

traducir

(3) modelo matemático	$\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = 0.1\ m$

matemáticamente "***no operable***"

reformula

$\Delta m \cong d\,m$
$\Delta t = d\,t$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \cong \frac{dm}{dt} = m'(t)$$

(3) modelo matemático	$m' = 0.1\ m$

matemáticamente "***operable***"

resolver

¿Cómo?

¿Qué obtuvimos?

$$m' = 0.1\ m$$

una ecuación

cuya incógnita es una función:
m / m = m(t)

donde aparece la derivada de la función incógnita:
m´ / m´ = m´ (t)

⟹ ***Ecuación Diferencial***

El modelo empírico finalmente resulta ser una "***ecuación diferencial***" y, en consecuencia, la respuesta del problema planteado, ***una solución*** de dicha ecuación. Pero, ¿*cómo resolvemos esta ecuación*? La misma es *distinta* a las vistas en los problemas anteriores pues en ella aparecen *relacionadas* la derivada y la propia función incógnita, $m = m(t)$.
En general en los problemas que desembocan en el planteo de una ecuación diferencial, dicha ecuación consiste (como en este caso) en una *relación* entre la función y una (o más) de sus derivadas. En tal caso la resolución de ecuaciones diferenciales se complica, no podemos simplemente "*rescatar*" la función a partir de sucesivas integraciones; más aún, existen ecuaciones para las cuales no existe forma o método conocido de encontrar la solución exacta, aunque teóricamente se haya probado que dicha solución existe. Sin embargo, para algunos tipos de ecuaciones diferenciales, existen métodos simples y efectivos para hallar la solución exacta.
En lo que sigue vemos algunos de estos métodos, para algunos tipos particulares de ecuaciones diferenciales.

11.2 Definiciones y Conceptos Básicos

****Ecuación Diferencial***: llamamos ecuación diferencial a toda ecuación donde la incógnita es una función y en la cual aparecen una o más derivadas de la función incógnita.
Según sea la función incógnita las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

***Ecuaciones diferenciales ordinarias* - EDO**:
la incógnita es función de una variable; o sea, funciones de la forma: $y = y(x)$; $x = x(t)$.

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:
la incógnita es función de dos o más variables; o sea, funciones del tipo: $z = f(x;y)$; $w = f(x;y;z)$

****Orden de una ecuación diferencial***: es el orden de la derivada de *mayor orden* en la ecuación.

Ejemplos:

Ecuación Diferencial	*Incógnita*	*Tipo*	*Orden*
$V' = 3t^2$ (*Problema 1*)	$V = V(t)$	**EDO**	*1*
$x'' = -6t$ (*Problema 2*)	$x = x(t)$	**EDO**	*2*
$x' = 0.1x$ (*Problema 3*)	$x = x(t)$	**EDO**	*1*
$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	*2*
$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	*2*
$y''' - 3y'' + 2y' = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	*3*
$x + y y' = 0$	$y = y(x)$	**EDO**	*1*
$y' = y^{2/3}$	$y = y(x)$	**EDO**	*1*
$(y')^2 + 3y^3 = \operatorname{sen} x$	$y = y(x)$	**EDO**	*1*

Ecuación Diferencial	*Incógnita*	*Tipo*	*Orden*
$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$	$z = f(x; y)$	***Der. Parciales***	***1***
$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z}=\frac{-2mE}{h^2}.\psi$ ***Ecuación de Schrödinger. Modelo atómico para una partícula***	$\psi=\psi(x; y; z)$ ψ no depende de t.	***Der. Parciales***	***2***
$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\frac{-2mE}{h^2}.\psi$ ***Ecuación de Schrödinger. Modelo atómico para una partícula***	$\psi=\psi(x)$ ψ no depende de t	**EDO**	***2***

* ***Solución de una Ecuación Diferencial***:

Dada una ecuación diferencial, decimos que la función ϕ es ***solución*** de la ecuación si ***al sustituir*** la función y las derivadas que aparecen en la ecuación, por ϕ y sus derivadas, la ecuación ***se satisface***; es decir, ***se verifica la igualdad***.

Ejemplos: verificar que las funciones indicadas son solución de la correspondiente ecuación.

Ecuaciones Diferenciales	*Incógnita*	*Orden*	*Solución general*	*Sol. particular*
$V' = 3t^2$ (*Problema 1*)	$V = V(t)$	***1***	$V(t) = t^3 + C$	$V(t) = t^3 + 6$
$x'' = -6t$ (*Problema 2*)	$x = x(t)$	***2***	$x = -t^3 + C_1 t + C_2$	$x = -t^3 + 4t + 5$
$x' = 0.1x$ (*Problema 3*)	$x = x(t)$	***1***	$x = C e^{0.1t}$	$x = 10\ e^{0.1t}$
$x^2 y'' + x y' - 4y = 0$	$y = y(x)$	***2***	$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$	$y = x^2$
$y'' - 3y' + 2y = 0$	$y = y(x)$	***2***	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$	$y = e^x - e^{2x}$
$y''' - 3y'' + 2y' = 0$	$y = y(x)$	***3***	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3$	$y = e^x + e^{2x} + 3$
$x + y y' = 0$	$y = y(x)$	***1***	$x^2 + y^2 = C$	$x^2 + y^2 = 25$
$y' = y^{2/3}$	$y = y(x)$	***1***	$y = (\frac{x}{3} + C)^3$	$y = (\frac{x}{3} + 2)^3$
$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-\lambda.\psi$	$\psi=\psi(x)$	***2***	$\psi = \mathbf{A}\ \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\ t) + \mathbf{B}\cos(\sqrt{\lambda}\ t)$ ó $\psi = \mathbf{C}\ \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\ t + \alpha)$	$\psi = 3\cos(\sqrt{\lambda}\ t)$

Verificación de soluciones: para ***establecer*** si una función $y = f\ (x)$ es solución de una ecuación diferencial, reemplazamos y por $f(x)$ en la ecuación, derivamos, y concluimos recordando que

"f es solución de la ecuación diferencial $\Leftrightarrow$ verifica la igualdad, $\forall x$**"**.

Ejemplo: analizar si $y = x^2$ es solución de $x^2\ y'' + x\ y' - 4y = 0$.

$$x^2\ y'' + x\ y' - 4\ y = \text{(reemplazamos } y \text{ por } x^2\text{)}$$
$$= x^2\ [x^2]'' + x\ [x^2]' - 4\ [x^2] = x^2 . [2] + x\ [2x\ ] - 4\ [x^2\ ] =$$
$$= 2x^2 + 2x^2 - 4\ x^2 = 4x^2 - 4\ x^2 = 0 \quad \forall\ x$$

Derivadas:

$y = x^2$
$y' = 2x$
$y'' = 2$

Luego; $y = x^2$, ***es solución*** de: $x^2\ y'' + x\ y' - 4y = 0$

Ejemplo: analizar si $y = x^3$ es solución de $x^2\ y'' + x\ y' - 4y = 0$

$$x^2\ y'' + x\ y' - 4\ y = \text{(reemplazamos } y \text{ por } x^3\text{)}$$
$$= x^2\ [x^3\ ]'' + x\ [x^3]' - 4\ [x^3] = x^2 . [6x] + x\ [3\ x^2\ ] - 4\ [x^3\ ] =$$
$$= 6\ x^3 + 3\ x^3 - 4\ x^3 = 9\ x^3 - 4\ x^3 = 5\ x^3 \neq 0 \quad \forall\ x$$

Derivadas:

$y = x^3$
$y' = 3\ x^2$
$y'' = 6\ x$

Luego; $y = x^3$, ***no es solución*** de $x^2\ y'' + x\ y' - 4y = 0$

Observaciones:
En los problemas 1 y 2 aparece una ecuación diferencial de orden "***1***" y "***2***" respectivamente. En la resolución vimos que *recuperar* la función original (la solución) requiere a su vez "***1***" ó "***2***" integraciones; que cada integración aporta una constante a la función solución. O sea, que en la *solución general*, estarían apareciendo *tantas constantes* como el *orden* de la ecuación diferencial.

Se puede probar que:
*si una ecuación diferencial admite una solución entonces ***admite infinitas*** ; en particular, admite una ***familia de soluciones*** (es decir un conjunto de soluciones del mismo *tipo*).
* si la ecuación diferencial es de orden "***n***" entonces, en la ecuación prototipo que representa la familia de soluciones, aparecen "***n***" constantes arbitrarias.
Tenemos distintos tipos de soluciones:

Definición 1: ***solución general***: solución en la que aparecen las "***n***" constantes arbitrarias.

$$x = -t^3 + C_1\ t + C_2 \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = C$$

Definición 2: ***solución particular***: solución que se obtiene al asignar un valor fijo a cada una de las constantes de la solución general.

$$x = -t^3 + 4\ t + 5 \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = 9$$

Definición 3: ***solución singular:***
Es una solución "aislada"; es decir, que no se encuentra incluida en la solución general (no se puede obtener asignando valores a las constantes)

Ejemplo: $y' = y^{2/3}$ $\rightarrow$ ***solución general***: $y = (\frac{x}{3} + C)^3$, $C \in \mathbf{R}$.

En este caso es fácil verificar que $y\,(x) = 0\ \ \forall x$, también es solución. También es fácil ver que no hay valor que se pueda dar a C tal que $y\,(x) = 0$ quede *incluida* en la solución general. Luego, $y\,(x) = 0$ es una ***solución singular***.

Modos de obtener una solución particular

Una solución particular se puede obtener básicamente de dos formas, y cuál de ellas uso depende del problema que se esté resolviendo. Así, esta solución puede darse:

a) directamente, asignando valores arbitrarios a las constantes de la solución general; ó,

b) a partir de las llamadas "***condiciones iniciales***" (en el caso que estas existan).

Por ejemplo:

a) resolver $y'' = -9.8$ y dar una solución particular.

**solución general*: $y(t) = -4.9\,t^2 + C_1\,t + C_2$ (obtenida integrando 2 veces);

**solución particular (arbitraria)*: $C_1 = 3$; $C_2 = -5 \rightarrow y(t) = -4.9\,t^2 + 3\,t - 5$.

b) Se arroja un peso **P** desde **16 Km** de altura y con velocidad inicial igual a cero. ¿Cuánto tarda **P** en llegar al suelo?

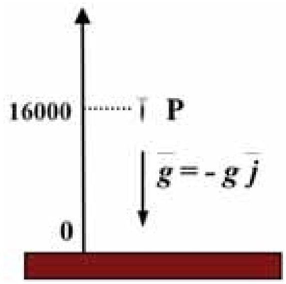
****proceso:*** caída de un cuerpo (moviendo rectilíneo con aceleración ***constante***: $g = 9.8$ m/seg^2)

Función del proceso: $y = y\,(t)$ con $y =$ *posición de* **P** *al instante t.*

* ***datos:*** $g = 9.8$ (m/seg^2), *aceleración de la gravedad.*

$y_{(0)} = 16\,000$ (mts.) (*posición inicial* (*velocidad inicial*).

* ***incógnita***: $t\ /\ y\,(t) = 0 \Rightarrow$ ***incógnita ´oculta´***: $y = y\,(t)$



Luego, *reformulamos el problema*:

$$\begin{cases} y'' = -9.8 & (\textit{ecuación diferencial}) \\ \left.\begin{array}{l} y_{(0)} = 16000 \\ y'_{(0)} = 0 \end{array}\right\} & (\textit{condiciones iniciales}) \end{cases}$$

* ***resolución***: ***solución general*** $\rightarrow y(t) = -4.9\,t^2 + C_1\,t + C_2$

condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} y_{(0)} = 16000 \Rightarrow C_2 = 16000 \\ y'_{(0)} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{array}\right\} y(t) = -4.9\,t^2 + 16\,000$$

Rta : $t\ /\ y\,(t) = 0$; $y(t) = -4.9\,t^2 + 16\,000 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{t} = \pm\sqrt{\frac{16000}{4.9}} \approx \pm 56$

Luego; **P** tarda aproximadamente ***56*** seg. en llegar al suelo.

El "problema de valores iniciales" (Pvi) .

Cuando hallar la solución de un problema requiere resolver una ecuación diferencial sujeta a ***condiciones iniciales***, decimos que tenemos un ***Pvi***.

Esto sucede, por ejemplo, en el problema (b) del item anterior:

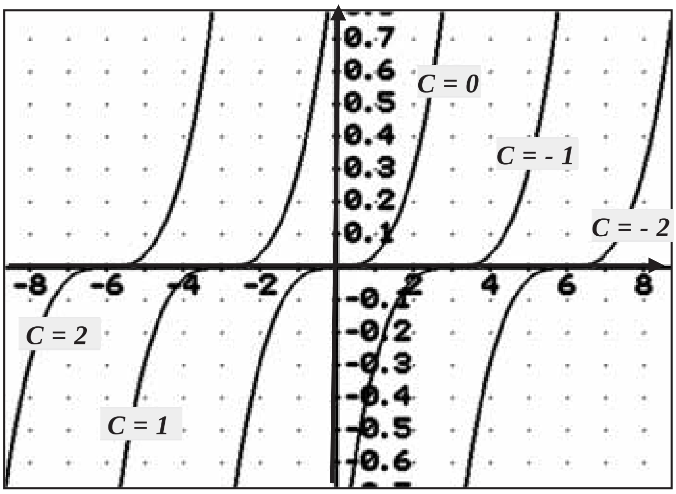
$$\textit{Pvi}. \rightarrow \begin{cases} y'' = -9.8 & (\textit{ecuación diferencial}) \\ \left.\begin{array}{l} y_{(0)} = 16000 \\ y'_{(0)} = 0 \end{array}\right\} & (\textit{condiciones iniciales}) \end{cases}$$

Observar que en este caso la cantidad de condiciones iniciales (2), coincide con el orden de la EDO. Luego veremos que esto no es casual sino que es necesario para obtener la solución que, entre las infinitas soluciones de la ecuación diferencial es, “***solución del problema***”.

<u>Ecuación y Curva / Solución</u>.

La solución general de una **EDO** es siempre una ***ecuación en dos variables*** en la que además aparecen una o más *constantes* (***C***), las que llamamos *parámetros.*
Geométricamente, una ecuación en dos variables en la que aparecen parámetros, es la ecuación prototipo de una ***familia de curvas.*** (O sea, *de un conjunto de curvas, todas del mismo tipo*).
Tenemos entonces que la ***ecuación/ solución*** de una ecuación diferencial define una ***familia de curvas***, las que llamamos ***curvas/ solución***. (También conocidas como ***curvas integrales***).

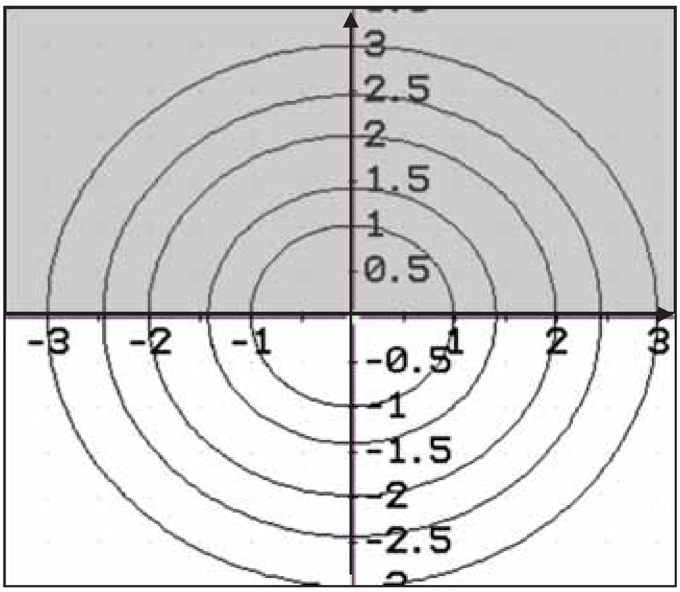
Ejemplo 1: $y' = y^{2/3}$ → solución general: $\boxed{y = \left(\frac{x}{3} + C\right)^3 ; \quad C \in \mathbb{R}}$



familia de curvas/solución

familia de parábolas cúbicas

Ejemplo 2: $x + y\,y' = 0$ → solución general: $\boxed{x^2 + y^2 = C; \quad C \in \mathrm{R}}$



(***C* > 0**)

familia de curvas/solución

familia de circunferencias

* no definen $y = f(x)$

* no definen $x = f(y)$

Verificación de solución en ejercicio 2:
Si restringimos la región del plano donde trabajar (por ej., 1er y 2do cuadrante) entonces, *en esa zona*, las curvas/solución (semicircunferencias) definen función con fórmula $y = y(x)$.
Tenemos así que ´*escondidas*´ en la ecuación/solución hay *funciones* las cuales *no se pueden explicitar sin una apropiada restricción de la región de trabajo*. Para verificar que estas funciones *escondidas* en la ecuación son las *funciones/solución* de la ecuación diferencial, lo que hacemos es reemplazar y por y(x) en la ecuación/solución, derivar luego según las reglas ordinarias de derivación:

$$x^2 + y^2 = 4 \xrightarrow[\substack{y = y(x) \\ ej: y = \sqrt{4-x^2}}]{} x^2 + y^2_{(x)} = 4 \longrightarrow 2x + 2y_{(x)}\ y'_{(x)} = 0 \quad \forall x$$

$$\xrightarrow[\text{finalmente}]{} x + y_{(x)}\ y'_{(x)} = 0 \quad \underline{\forall x}$$

Conclusión: $x^2 + y^2_{(x)} = 4$ **es solución** de $x + y\ y' = 0.$

Tenemos así otros tipos de soluciones: ***explícitas, implícitas y "formales"***
Al resolver una ecuación diferencial puede ser que la ***ecuación/solución*** obtenida sea directamente la ***función/solución*** (***ej.1***) o que, por el contrario, dicha función se encuentre ***´escondida´*** en la ecuación (***ej.2***). Para indicar esto decimos que la solución de una EDO viene dada en forma:

♦ ***explícita***: si en la ecuación/solución la variable dependiente aparece explicitada o se puede explicitar en función de la independiente. (***ej.1*** → $y = (\frac{x}{3} + C)^3$).

♦ ***implícita***: si en la ecuación/solución la variable dependiente no aparece explicitada en función de la independiente. En este caso decimos que la ecuación define ***implícitamente*** a y como función de x.
Y esto puede ocurrir por dos motivos:
(1) Porque la ecuación/solución define función ***sólo*** poniendo restricciones (***ejemplo 2*** → $x^2 + y^2 = C$).
(2) Porque no se puede explicitar y en *función* de x debido a la *estructura* de la ecuación/solución.
Ejemplo: $(y - 3).y' - \frac{4}{x}.y = 0$ → solución general → $y = \ln(K x^4 |y^3|)$; $K > 0$ (*sol. implícita*)

(No se puede explicitar y en *función* de x aún poniendo restricciones).
(También resulta difícil determinar si existe o no, curva/solución).

♦ ***Soluciones "formales".***
Vimos que $x^2 + y^2(x) = C$ verifica $x + y\ y' = 0$, $\forall x$. Obviamente también lo hace $\underline{\forall C}$.
Pero, $x^2 + y^2 = C$, **¿** define *curva* $\forall C$**?** Vemos esta cuestión:

*$C < 0$ → $\{(x; y) \,/\, x^2 + y^2 = C\} = \varnothing$ (no existe punto alguno que verifique la ecuación)
*$C = 0$ → $\{(x; y) / x^2 + y^2 = C\} = \{(0; 0)\}$ (existe un único punto que verifica la ecuación)
*$C > 0$ → $\{(x; y) \,/\, x^2 + y^2 = C\}$ = ***circunferencia,*** centro en $\mathbf{O}(0;0)$; radio $\sqrt{C}$.

Concluimos entonces que la ecuación define ***curva/solución*** sólo en el caso de C positivo, aun cuando ***"de forma"*** (ó ***"formalmente"***) verifica $x + y\ y' = 0$ para todo valor de C.

Al resolver una ecuación diferencial muchas veces nos vamos a encontrar con situaciones como las dos últimas en las que no podemos explicitar una variable en función de la otra. En general, tampoco vamos a poder decidir si existe o no *curva/solución*. O lo que es lo mismo, si existe *"solución"*. En tal caso, para salvar la situación, decimos que la ecuación hallada es una ***"solución formal"***: solución que tiene la ***forma*** de una solución, ***pero puede no serlo***.

¿Para qué sirve una solución formal?: si acudiendo a algún resultado *teórico* podemos establecer que la ecuación diferencial *tiene solución*, entonces dicha solución tiene la ***"forma"*** hallada.

EDO – 1er Orden. ***Distintas formas en la que se pueden presentar***

(A) $x + y\,y' = 0$; o sea, de la forma: $\boxed{F(x; y; y') = 0}$

(B) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ $\boxed{= f(x; y)}$; o sea, de la forma: $\boxed{y' = f(x; y)}$

(C) $\underbrace{\dfrac{3.x}{y}}_{\boxed{P(x;y)}}\,dx + \underbrace{\dfrac{\cos y}{x\,y}}_{\boxed{Q(x;y)}}\,dy = 0$; o sea, de la forma: $\boxed{\begin{array}{c} P(x; y)\,dx + Q(x; y)\,dy = 0 \\ \text{"forma diferencial"} \end{array}}$

Se puede pasar de una forma a la otra:

(A) → (B) $x + y.\,y' = 0 \;\rightarrow\; y' = -x/y$

(B) → (C) $y' = \dfrac{x+y}{x-y} \;\rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y} \;\rightarrow\; (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$

(C) → (B) $\dfrac{3.x}{y}\,dx + \dfrac{\cos y}{x\,y}\,dy = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{\cos y}{x\,y}\,dy = -\dfrac{3.x}{y}\,dx \;\rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2}{\cos y}$

$\rightarrow\; y' = -\dfrac{3x^2}{\cos y}$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

Teorema de Existencia y Unicidad **(TEU)**

Dada f una función de dos variables, $z = f(x; y)$, y $P_o(x_o; y_o)$ un punto del dominio de f entonces, si f satisface una "*serie de requisitos*" el problema de valores iniciales,

$$\textbf{Pvi}: \begin{cases} y' = f(x; y) & \textit{(ecuación diferencial de 1er orden)} \\ y(x_o) = y_o & \textit{(condición inicial)} \end{cases}$$

tiene solución (***E****xistencia*), y esta es única (***U****nicidad*)
(sin demostración).

Observación: f es una función de dos variables "derivable". Lo que se pide es que f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ***(derivada parcial de f respecto de y)*** sean ***continuas*** en alguna región plana que contenga al punto $P_o(x_o; y_o)$.

Ejemplo: Hallar la curva Γ que pase por el punto $\mathbf{P_o}\,(0;\,5)$ y para la cual, en cada punto $\mathbf{P}(x;\,y) \in \Gamma$ la pendiente de la recta tangente a Γ en **P** es igual al opuesto del cociente entre la abscisa y la ordenada de **P**.

* ***Datos:*** $\mathbf{P_o}\,(0;\,5)$ punto de paso de la curva Γ.
t recta tg a Γ en **P**, entonces $\mathbf{m}_t = -\,x\,/\,y$

* ***Incógnita:*** $\Gamma \Rightarrow$ ´***incógnita oculta***´: $y = y\,(\mathrm{t})$ tal que ***graf*** $y = \Gamma$.

* ***Resolución:*** reformulando el problema queda un **Pvi**:

$$\textbf{Pvi}: \begin{cases} y' = -\,x\,/\,y \ (\textit{\textbf{ecuación diferencial de 1er orden,}}\ \textit{con}\ f\,(x;y) = -\,x/y\,) \\ y\,(0) = 5 \qquad (\textit{\textbf{condición inicial}}\,) \end{cases}$$

♦ La solución gral. es: $x^2 + y^2 = C$; $C \in \mathbf{R}$ (como vimos, una solución *formal*).

♦ El **TEU** asegura que este **Pvi** , tiene solución y única: $y = y(x)$
(en este caso se cumplen los requisitos para f; particularmente, existe $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\,/\,y^2$ en (0;5))

$$x^2 + y^2 = C \xrightarrow[y\,=\,y(x)]{} x^2 + y^2(x) = C \rightarrow 0 + (\,y(0))^2 = C \xrightarrow[y(0)=5]{} C = 25$$

♦ La solución particular es: $x^2 + y^2 = 25$.

¿*Podemos explicitar* $y = y(x)$?; ¿dar la ecuación de Γ en forma explícita?

Despejando y en la ecuación llegamos a: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$; o sea,
obtenemos dos funciones: $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ *(semicircunferencia superior); e,*
$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ *(semicircunferencia inferior)*

Como Γ es la curva que pasa por $\mathbf{P_o}\,(0;\,5)$, tenemos que: $y = y_1 = \sqrt{25 - x^2}$;
o sea, Γ es la semicircunferencia superior de una circunferencia de radio 5.

11.3 Procedimientos para hallar la Solución General de una EDO

En lo que sigue nos ocupamos de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, para los cuales existen métodos de resolución; o sea, una forma sistemática de buscar la solución general.

Veremos los siguientes casos:

Ecuación	Forma de la ecuación	MÉTODO	
1er orden	$y' = M(x).N(y)$	***variables***	*se separan las variables.
1er orden	$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$	***separables (v.s.)***	* se integra * se concluye
lineal-1er orden	$y' + P(x)\,y = Q(x)$	***sustitución***	*se propone $y = u.v$ *se sustituye en la ec. *u y v nuevas
lineal–2do orden *(homogénea)*	$a_o(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$	***´teórico´***	$y_h = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ $\{y_1 ; y_2\}$ l.i.
lineal–2do orden *(no homogénea)*	$a_o(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)\,y = b(x)$	***´teórico´***	$y = y_h + y_p$
lineal–2do orden *(homogénea- **coef. ctes**)*	$a_o\,y'' + a_1\,y' + a_2\,y = 0$ $(a_o ; a_1 ; a_2 \in \mathrm{R})$	***´práctico´*** (ecuación característica) →	$y_h = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$ $\{y_1 ; y_2\}$ l.i. para hallar, y_1 e y_2
lineal–2do orden *(no homogénea- **coef. ctes**)*	$a_o\,y'' + a_1\,y' + a_2\,y = b(x)$ $(a_o ; a_1 ; a_2 \in \mathrm{R})$	***´práctico´*** (coef. indet.) →	$y = y_h + y_p$ para hallar y_p

Observación:

Por simplicidad de escritura, en el cuadro, el método para las ecuaciones lineales de orden mayor que "1" se ejemplifica sólo para las de orden "*2*". En realidad el mismo vale para ***ecuaciones lineales*** de cualquier orden,

$$\textbf{\textit{EDO lineal –orden n :}}\quad a_o(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n\,y = b(x)$$

con la única diferencia que en y_h, solución de la homogénea, aparecen ***´n´*** constantes en lugar de "***2***" y, por ende, ***´n´*** funciones solución: $y_1 ; y_2 ; \ldots\ldots ; y_n$.

En lo que sigue veremos primero las **EDO-*1er orden***.
Observar que en este caso el tipo de ecuación más sencillo es: $y' = f(x)$; o sea, el que ocurre cuando la función del segundo miembro es sólo función de x . Ya vimos que en este caso basta buscar la (o las) primitivas de f .
Veremos luego las **EDO- *lineales de orden ´n´*** . Para estas ecuaciones existe una ***teoría general*** acerca de cómo hallar la solución; teoría muy potente pero que sólo puede ser llevada a la práctica en el caso que la ecuación lineal sea *a coeficientes constantes* (único caso en que tenemos un método *práctico* para hallar las ***´n´*** soluciones necesarias para dar la solución de la homogénea).

EDO a VARIABLES SEPARABLES

Una EDO a *variables separables* es de la forma: $y' = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y)$ ó $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$.
Luego, cualquiera sea el caso, para este tipo de ecuaciones podemos reunir todos los términos en x por un lado y todos los término en y por otro, y resolver.

Procedimiento para resolver $y' = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y)$

1) establecer claramente la incógnita de la ecuación diferencial. En este caso: $y = y(x)$.

2) llevar la ecuación a la **forma diferencial**. $\frac{dy}{dx} = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y)$.

3) separar, si existe, $y^* \in R$ tal que $\mathbf{N}(y^*) = 0$ (o sea, $y(x) = y^*$, $\forall x \in R$)

4) separar variables, llegar a la expresión: $q(y)\,dy = p(x)\,dx$.

5) integrar miembro a miembro: $\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$

6) resolver las integrales: $\mathbf{R}(y) + C_1 = \mathbf{S}(x) + C_2$ ($\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$ / $\mathbf{R}' = \mathbf{q}$ y $\mathbf{S}' = \mathbf{p}$)
obtener la ***solución general***: $\mathbf{R}(y) = \mathbf{S}(x) + C$; $C \in R$ (***forma implícita***)

7) explicitar y (de ser posible): $y = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{S}(x) + \mathbf{C})$; $C \in R$ (***forma explícita***)

8) analizar si $y = y^*$ es solución. Si lo fuera, analizar si puede o no ser incluida en la general. Si fuera solución y no se puede incluir en la general, es una ***solución singular***.

9) escribir todas las soluciones de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} y = \mathbf{R}^{-1}(\mathrm{S}(x) + \mathrm{C}) \; ; \; C \in R & (\textit{sol. general}) \\ y = y^* & (\textit{sol. singular}) \text{ (si existe y tantas como existan)} \end{cases}$$

Procedimiento para resolver un problema de valores iniciales con una **EDO a v.s.**

$$\textbf{Pvi}: \begin{cases} y' = \mathbf{M}(x).\mathbf{N}(y). & (\textit{ecuación diferencial 1er orden – v .s. }) \\ y(x_0) = y_0 & (\textit{ condición inicial}) \end{cases}$$

En este caso tenemos dos caminos:

1º) Realizar los ***pasos 1- 9*** antes indicados para resolver la ecuación diferencial y luego, con los valores iniciales, determinar la solución particular.

2º) En el ***paso 5***, si y_0 no es solución singular, en vez de aplicar integral indefinida, aplicar las ***Integrales "definidas"***, tomando como extremos inferiores, y_0 y x_0 respectivamente.

5) integrar miembro a miembro: $\int_{y_0}^{y} q(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} p(x)\,dx$

6) resolver las integrales: $\mathbf{R}(y) - \mathbf{R}(y_0) = \mathbf{S}(x) - \mathbf{S}(x_0)$ ($\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$/ $\mathbf{R}' = \mathbf{q}$ y $\mathbf{S}' = \mathbf{p}$)
obtener directamente la ***solución particular***: $\mathbf{R}(y) = \mathbf{S}(x) - \mathbf{S}(x_0) + \mathbf{R}(y_0)$

7) explicitar y (de ser posible).

Ejemplo: resolver $y' = \frac{y-1}{x+2}$

1) $y' = \frac{1}{x+2}.(y-1) \Rightarrow$ ***1er orden – v.s.; Incógnita:*** $y = y(x)$.

2) pasamos a la *forma diferencial*: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}.(y-1)$

3) separamos $y^* = 1$ (debemos dividir por "y-1" para "*separar variables*")

4) separamos variables: $\frac{1}{y-1}\,dy = \frac{1}{x+2}.\,dx$

5) integramos miembro a miembro: $\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int \frac{1}{x+2}.\,dx$

6) resolvemos las integrales: $\ln|y-1| + C_1 = \ln|x+2| + C_2$
obtenemos la ***solución general***: $\ln|y-1| = \ln|x+2| + C$; $C \in R$ (***forma implícita***)

7) explicitamos y (de ser posible): $\ln|y-1| = \ln|x+2| + C$; $C \in R$
$\ln|y-1| = \ln|x+2| + \ln K$; $K > 0$
$\ln|y-1| = \ln(K|x+2|)$; $K > 0$ (aplicamos ***inversa ln***)
$|y-1| = K|x+2|$; $K > 0$ (eliminamos valor abs.)
$y-1 = \pm K(x+2)$; $K > 0$ (reescribimos la cte)
$y-1 = C(x+2)$; $C \neq 0$

solución general: $y = C(x+2)+1$; $C \neq 0$ (***forma explícita***)

8) analizamos $y = 1$ → $\begin{cases} y' = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ verifica la ecuación $\Rightarrow$ $y = 1$ es solución

En la solución general si C= 0 entonces $y = 1$; o sea, esta solución se puede incluir en la general sacando la restricción de que C no sea cero.

9) ***todas las soluciones de la ecuación diferencial:*** $y = C(x+2)+1$; $C \in R$

Ejemplo: resolver el Pvi: $y' = \frac{y-1}{x+2}$; $y(1) = 7$

**Camino 1*: reemplazo en la solución general y obtengo la particular:
$y = C(x+2)+1 \xrightarrow[x=1\,;\,y=7]{} 7 = C(1+2)+1$ → $C = 2$
solución particular: $y = 2(x+2)+1$ → $y = 2x+5$

***Camino 2**:* $y' = \dfrac{y-1}{x+2}$; $y(1) = 7$

5) integramos miembro a miembro: $\displaystyle\int_7^y \frac{1}{y-1}\,dy = \int_1^x \frac{1}{x+2}\,.\,dx$

6) resolvemos las integrales: $\ln|y-1| - \ln|6| = \ln|x+2| - \ln|3|$

$$\ln|y-1| = \ln|x+2| + \ln\frac{6}{3}$$

7) explicitamos y $|y-1| = 2\,|x+2|$

$y-1 = \pm 2(x+2) \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow y = 2x+5 \\ \rightarrow y = -2x-3 \end{array}}$$

solución particular $(y(1) = 7)$: $\boldsymbol{y = 2x + 5}$

Ejemplo: resolver $x\,dx + y\,dy = 0$

4) separamos variables: $y\,dy = -\,x\,dx$

5) integramos miembro a miembro: $\displaystyle\int y\,dy = -\int x\,dx$

6) obtenemos la ***solución general***: $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C$; $C \in \mathbb{R}$ (***sol. formal***)

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{ó} \quad x^2 + y^2 = C$$

7) explicitamos y (de ser posible): **no es posible**

9) escribo todas las soluciones de la ecuación diferencial: $x^2 + y^2 = C$; $C \in \mathbb{R}$

Ejemplo: hallar la curva solución de $x\,dx + y\,dy = 0$ que pase por el punto **P**(3; - 4).

* Reemplazamos en la solución general y obtenemos la particular

$$x^2 + y^2 = C \xrightarrow[x=3\,;\,y=-4]{} 3^2 + (-4)^2 = C \rightarrow C = 25$$

curva ?: $x^2 + y^2 = 25$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow y(3) = 4 \\ \rightarrow y = -\sqrt{25 - x^2} \rightarrow y(3) = -4 \rightarrow \text{pasa por} \end{array}}$$

Luego, la curva pedida es la *semicircunferencia ´ inferior´* de radio 5 y centro en el origen.

Observación: cuando la ecuación diferencial está en la *forma diferencial*, entonces la ***incógnita*** puede ser tanto ***"y como función de x"*** como ***"x como función de y"*.**

Así, por ejemplo, en el caso anterior otra forma de dar la solución del problema es:

$$x = \sqrt{25 - y^2} \rightarrow x(-4) = 3 \rightarrow \text{pasa por } \mathbf{P}.$$

(semicircunferencia *´derecha´* de radio 5 y centro en el origen)

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE 1er ORDEN – EDOL-1

*__DEFINICIÓN 1__:
Llamamos ecuación diferencial "*lineal*" de 1er orden a toda ecuación de la forma:

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

donde **P** y **Q** son funciones continuas en un mismo intervalo **I**.

Dentro de las **EDOL-1** distinguimos dos tipos de ecuaciones:

DEF 1.1: EDOL-1-Homogénea, si **Q** es la función "nula"; o sea, **Q(x) = 0,** $\forall x \in I$.

DEF 1.2: EDOL-1- No Homogénea, si **Q "**no**"** es la función "nula"; o sea, $Q \not\equiv 0$.

Procedimiento para resolver $y' + P(x) \,.\, y = Q(x)$

1) Proponemos un ***cambio de variable*** → $y(x) = u(x).v(x)$ con ***u ; v*** derivables y ***a determinar***.

2) Derivamos: $y' = u' \,.\, v + u \,.\, v'$

3) Cambio de ecuación: $y' + P(x) \,.\, y = Q(x)$ (reemplazamos *y* e *y´*)

$u' \,.\, v + u \,.\, v' + P(x).\, u \,.\, v = Q(x)$ (asociamos, sacamos factor común)

$[u' + P(x).\, u] \,.\, v + u \,.\, v' = Q(x)$ **(*)** ecuac. dif. con "**2**" incógnitas.

4) Condiciones sobre ***u*** *y* ***v*** para resolver **(*)**

$$\begin{cases} 1) \quad u' + P(x).u = 0 & \rightarrow ¿\,u\,? \\ 2) \quad u.v' = Q(x) & \rightarrow ¿\,v\,? \end{cases}$$

Si ***u*** *y* ***v*** satisfacen ***1-2)*** entonces ***y(x)= u(x).v(x)*** es ***solución*** de $y' + P(x)\, y = Q(x)$

5) __Resolución de__ *(1):*

$$u' + P(x)\, u = 0 \quad (\rightarrow \text{EDOL-1-Homogénea ; a “variables separables”})$$

Resolvemos por separación de variables, obtenemos ***una*** solución de ***(1)*** : $u = u^*(x)$

6) __Resolución de__ ***(2)***: reemplazamos la ***u*** obtenida en (5) en ***(2)*** .

$$u^*(x) \,.\, v'(x) = Q(x) \quad (\rightarrow \text{EDO a “variables separables”})$$

Resolvemos por separación de variables, obtenemos la solución gral. de ***(2)***: $v = v^*(x) + C$

7) Damos la **solución general** de $y' + P(x).\, y = Q(x)$

$$y = u\,.v \quad \rightarrow \quad \boxed{y(x) = u^*(x)\,.[\,v^*(x) + C\,]}$$

Resolver: $y' - \frac{2}{x} \cdot y = x$

$\rightarrow$ $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ / $P(x) = -\frac{2}{x}$; $Q(x) = x$

1) Proponemos ***cambio de variable*** $\rightarrow$ $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ **con** u ; v **derivables** .

2) Derivamos: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3) Cambio de ecuación: $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ (reemplazamos y e y')

$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$ (asociamos, sacamos factor común)

$[u' + P(x) \cdot u] \cdot v + u \cdot v' = Q(x)$ **(*)** ecuac. dif. con "**2**" incógnitas.

4) Condiciones sobre u *y* v **para resolver (*)**

$$\begin{cases} 1) \quad u' + P(x) \cdot u = 0 & \rightarrow ¿\, u\, ? \\ 2) \quad u \cdot v' = Q(x) & \rightarrow ¿\, v\, ? \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1) \quad u' - \frac{2}{x} \cdot u = 0 \\ 2) \quad u \cdot v' = x \end{cases}$$

Si u *y* v satisfacen ***1-2)*** entonces $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ es ***solución*** de $y' + P(x)\, y = Q(x)$

5) Resolución de *(1):* $u' + P(x)\, u = 0$ **(EDOL-1-Homogénea;** a "variables separables"**)**

$u' - (2/x) \cdot u = 0 \rightarrow u^*(x) = x^2$

5) Resolución de *(2)*: **reemplazamos** $u \rightarrow u^*(x) \cdot v'(x) = Q(x)$ ($\rightarrow$ **EDO** "vs. separables")

$x^2 \cdot v' = x \rightarrow v(x) = \ln|x| + C$

7) Damos la solución general de $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.

$y(x) = u^*(x) \cdot v(x) \rightarrow \boxed{y(x) = x^2 \cdot [\ln|x| + C]}$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de ORDEN "n" [EDOL- n]

***DEFINICIÓN 1**:

Llamamos ecuación diferencial "*lineal*" de orden "n" a toda ecuación de la forma:

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x)$$

con a_o ; a_1 ; .... ; a_n ; b , ***funciones*** definidas en **I** ; $a_o(x) \neq 0$; $\forall x \in I$.

DEF 1.1: EDOL-n - No Homogénea, si **b** no es la función nula; o sea, $b \not\equiv O$.

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \quad \text{(I)}$$

DEF 1.2: EDOL-n -Homogénea, si **b** es la función nula → $b = O$ con $O(x) = 0, \forall x \in I$

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = O \quad \text{(II)}$$

EJEMPLOS: $x^2 y'' + 2y = 0$ **(lineal orden 2 - homogénea)**

$y''' + x.\, y'' - 3\cos x \cdot y' + 4y = e^x$ **(lineal orden 3 – no homogénea)**

DEF 1.3: EDOL-n, *"a coeficientes constantes"*

Ecuación diferencial lineal (homogénea o no) en la que todos los coeficientes, $a_i(x)$, son ***funciones constantes***; o sea, son de la forma:

$$a_o \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x)$$

con a_o ; a_1 ; ....; a_{n-1} ; $a_n \in \mathbb{R}$; $a_o \neq 0$

EJEMPLOS: $3y'' + 2y = 0$ **(lineal orden 2 - homogénea)**

$2y''' + 5.\, y'' - 3 \cdot y' + 4y = e^x$ **(lineal orden 3 – no homogénea)**

DEFINICIÓN 2: Problema de valores iniciales – Pvi

El problema de hallar una función **y = y (x)** tal que:

$$\begin{cases} a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \\ \left.\begin{array}{l} y(x_o) = y_o \\ y'(x_o) = y_1 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1} \end{array}\right\} \textit{Condiciones Iniciales} \end{cases}$$

con $x_o \in I$; y_o ; y_1 ; ...., $y_{n-1} \in \mathbb{R}$; es llamado **"Problema de valores iniciales".**

TEU (1) - Teorema de Existencia y Unicidad:

Si las **funciones** $a_1; a_2; \dots; a_n$ y **b son continuas en I** ; entonces cualquiera sea $x_o \in I$ y cualesquiera sean los "**n**" números reales $y_o; y_1; \dots, y_{n-1}$, el **Pvi** tiene solución (**E**xistencia) y única (**U**nicidad) en **I** . **(s/d)**

Corolario: **si** $a_1; a_2; \dots; a_n$ son continuas en **I** , la ecuación diferencial es homogénea,

$x_o \in I$, $y_o = y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 0$; **entonces, el siguiente, Pvi**:

$$\begin{cases} a_o(x)\,.\,y^{(n)} + a_1(x)\,.\,y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,.\,y' + a_n(x).\,y = 0 \quad \text{(homogénea)} \\ y(x_o) = y'(x_o) = y''(x_o) = \dots = y^{(n-1)}(x_o) = 0 \end{cases}$$

tiene solución única, **y esta es la *trivial*:** $y(x) = 0$, $\forall x \in I$.

Demostración: ♦ $y(x) = 0$, $\forall x \in I$; es solución de toda **EDOL-n, homogénea;**
♦ $y(x) = 0$, $\forall x \in I$; verifica las condiciones iniciales;
entonces, $y(x) = 0$, $\forall x \in I$, **es solución del Pvi**.
♦ por hipótesis, los coeficientes son funciones continuas;
entonces por el **TEU**, $y(x) = 0$, $\forall x \in I$, **es solución y "única".**

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES "HOMOGÉNEAS" [EDOLH-n]

TEOREMA 2: Si $\{ f_1 ; f_2; \dots; f_j \}$ son *j-soluciones* de una EDOL-Homogénea entonces cualquier combinación lineal (c.l.) de ellas, *también lo es*.

O sea, si $\Phi = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_j f_j \Rightarrow \Phi$ es *solución* de la EDOL-**H**

Demostración: (demostramos para **n = 2**, **j = 3** ; queda como ejercicio para **n = 3; j = 2**)
Dadas $\{ f ; g ; h \}$, tres soluciones de una EDOL**H-2**:

$$\boxed{a_o.\, y'' + a_1\,.\, y' + a_2\,.\, y = 0 \,; \quad (\forall x \in D)} \quad \textbf{(I)}$$

debemos demostrar que $\Phi(x) = [c_1 f + c_2 g + c_3 h]_{(x)}$ es solución de **(I);**
o sea que, reemplazada Φ en la ecuación **(I)**, **la satisface $\forall x \in D$**

Por **Hip**: ♦ **f** sol. de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o.\, f'' + a_1\,.\, f' + a_2.\, f = 0$; $(\forall x \in D)$
♦ **g** sol. de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o.\, g'' + a_1\,.\, g' + a_2.\, g = 0$; $(\forall x \in D)$
♦ **h** sol. de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o.\, h'' + a_1.\, h' + a_2.\, h = 0$; $(\forall x \in D)$

A partir de estos datos, investigamos si $\Phi(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) + c_3 h(x)$ cumple la **Tesis**:

$$a_o\,.\,\Phi'' + a_1\,.\,\Phi' + a_2\,.\,\Phi =$$
$$= a_o\,.\,[c_1 f'' + c_2 g'' + c_3 h''] + a_1.[c_1 f' + c_2 g' + c_3 h'] + a_2.[c_1 f + c_2 g + c_3 h] =$$
$$= c_1.[a_o f'' + a_1.\, f' + a_2.f] + c_2.[a_o g'' + a_1.\, g' + a_2.g] + c_3.[a_o h'' + a_1.\, h' + a_2.h] =$$
$$= c_1.\, 0 + c_2.\, 0 + c_3.\, 0 = 0 \,; \quad (\forall x \in D) \qquad \textbf{[q.e.d.]}$$

Ejercicio: Verificar que $f(x) = \text{sen}\, x$; $g(x) = \cos x$ y $\Phi(x) = 3 f(x) + 5 g(x)$, son solución de $y'' + y = 0$

<u>DEFINICIÓN 3</u>: *"linealmente dependiente"* (l.d.)

El conjunto de funciones $\{ f_1 ; f_2 ; \ldots\ldots ; f_j \}$ es ***"linealmente dependiente"*** en **[a; b]**, si existen constantes $c_1 ; c_2 ; \ldots\ldots ; c_j$ (***<u>no todas nulas</u>***), tales que:

$$c_1 . f_1(x) + c_2 . f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + c_j . f_j(x) = 0 \;;\; \forall x \in [a; b].$$

<u>DEFINICIÓN 4</u>: *"linealmente independiente"* (l.i.)

El conjunto de funciones $\{ f_1; f_2; \ldots\ldots ; f_j \}$ es ***"linealmente independiente"*** en **[a; b]**, si ***no es "linealmente dependiente"*** **.** O sea; $\{ f_1 ; f_2 ; \ldots\ldots ; f_j \}$ es **l.i.** si:

$$\text{"}c_1 . f_1(x) + c_2 . f_2(x) + \ldots\ldots\ldots + c_j . f_j(x) = 0; \;\; \forall x \in [a; b] \Rightarrow c_1 = c_2 = \ldots\ldots = c_j = 0\text{"}.$$

<u>NOTA</u>: Si a "$c_1 . f_1 + c_2 . f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_j . f_j = O$" la llamamos, **ecuación básica (E.B.);** entonces $\{f_1; f_2; \ldots; f_j\}$ es **l.i.** $\Leftrightarrow$ la **E.B.** se satisface <u>únicamente</u> si todas las constantes <u>son nulas.</u>

<u>Ejemplos</u>:

1) $\{ f(x) = e^x \;;\; g(x) = 3.e^x \}$; Dominio: **R**

E.B. $\rightarrow$ $c_1 . f(x) + c_2 . g(x) = 0 \;;\; \forall x \in R$

$\rightarrow$ $c_1 . e^x + c_2 . 3 e^x = 0; \;\; \forall x \in R \;\Leftrightarrow\; e^x . [c_1 + 3 c_2] = 0; \;\; \forall x \in R$

$\boxed{e^x \neq 0; \forall x} \;\Leftrightarrow\; c_1 + 3 c_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; c_1 = -3. c_2$

Luego, si por ejemplo, $c_1 = 6 \;;\; c_2 = -2 \;\Rightarrow\; [6] . e^x + [-2] . 3 e^x = 0, \;\forall x \in R$;
o sea, <u>existen constante no nulas</u> para las cuales se satisface la **E.B.**

<u>Conclusión</u>: $\{f(x) = e^x \;;\; g(x) = 3 e^x\}$ **es l.d.**

<u>Observación 1</u>: en este caso "vemos" que: $\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}} = 3$ (*cte*)

2) $\{ f(x) = 1 \;;\; g(x) = x \}$; Dominio: **R**

E.B. $\rightarrow$ $c_1 . f(x) + c_2 . g(x) = 0 \;;\; \forall x \in R \;\rightarrow\; c_1 + c_2 . x = 0; \;\forall x \in R$

Pero, $c_1 + c_2 . x \overset{*}{=} 0, \;\underline{\forall x \in R} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ (porque existe ***<u>único</u>*** **x** verifica (*))

Luego, la **E.B.** se satisface <u>únicamente</u> si todas las constantes <u>son nulas</u>.

<u>Conclusión</u>: $\{ f(x) = 1 \;;\; g(x) = x \}$ **es l.i. en R .**

<u>Observación</u>: en este caso "vemos" que: "$\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}} = x$" ; o sea, que: $\dfrac{g_{(x)}}{f_{(x)}} \neq cte$ **.**

3) $\{ f(x) = 1 \;;\; g(x) = x \;;\; h(x) = x^2 \}$; Dominio: **R**

E.B. $\rightarrow$ $c_1 . f(x) + c_2 . g(x) + c_3 . h(x) = 0; \;\forall x \in R \rightarrow c_1 + c_2 . x + c_3 . x^2 \overset{*}{=} 0; \;\underline{\forall x \in R}$

$\Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (a lo sumo ***<u>dos</u>*** **x´s** verifican (*))

<u>Conclusión</u>: $\{ f(x) = 1 \;;\; g(x) = x \;;\; h(x) = x^2 \}$ **es l.i. en R**

CRITERIOS PARA DETERMINAR “ l.d.” ó “ l.i.”

(1) Dos o más funciones no pueden ser **li** si una de ellas es la **función nula**. (verificar)

(2) **f** y **g** tal que ninguna sea la función nula en **[a; b]** y $g(x) \neq 0$, $\forall x \in [a; b]$, entonces:

$$\{ f ; g \} \text{ l.d. en } [a; b] \Leftrightarrow \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = cte.$$

Ej. 1) $\{ 3e^x ; e^x \}$ l.d. en R

(3) **f** y **g** tal que ninguna sea la función nula en **[a; b]** y $g(x) \neq 0$, $\forall x \in [a; b]$, entonces:

$$\{ f ; g \} \text{ l.i. en } [a; b] \Leftrightarrow \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \neq cte.$$

Ej. 2) $\{ 1 ; x \}$ l.i. en R

(4) Si **f** y **g** ***<u>soluciones no nulas</u>*** en [a; b] de una EDOLH- 2; entonces:

$$\{ f ; g \} \text{ l.i. en } [a; b] \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f_{(x)} & g_{(x)} \\ f'_{(x)} & g'_{(x)} \end{vmatrix} \neq 0 \ ; \forall x \in [a; b]$$

Ej. 2) $\{ 1 ; x \}$ l.i. en R pues $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ ; \ \forall x \in R$

(5) Si $\{ f_1; f_2; \ldots\ldots; f_n \}$ ***n-soluciones no nulas*** en [a; b] de una **EDOLH – orden “n”**

entonces “ $\{ f_1; f_2; \ldots\ldots; f_n \}$ **l.i.** en **[a; b]** $\Leftrightarrow$ **det A** $\neq 0$; $\forall x \in [a; b]$ ”

→**A** matriz de “n” filas por “n” columnas, donde cada columna está formada por una ***función solución*** (f_i) y sus **(n-1)** ***derivadas*** $(f_i' ; f_i'' ; \ldots ; f_i^{(n-1)})$.

Ej. 3): $\{1; x+1; x^2 \}$ l.i. en R pues $\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0; \ \forall x \in R.$

<u>Ejemplos</u>:

4) Determinar si **f(x) = sen x** y **g(x) = cos x** son solución **l.i.** de $y'' + y = 0$.

- ♦ $f(x) = \text{sen } x; \ f'(x) = \cos x ; \ f''(x) = -\text{sen } x \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0 , \forall x$ (f sol.)
- ♦ $g(x) = \cos x; \ g'(x) = -\text{sen } x ; \ g''(x) = -\cos x \Rightarrow g''(x) + g(x) = 0 , \forall x$ (g sol.)
- ♦ $\dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \text{tg } x \neq cte \Rightarrow$ **sen x** y **cos x** son soluciones **l.i.** de la **EDOLH-2.**

5) Mostrar que $f(x) = 1$; $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$ son soluciones **l.i.** de $y''' = 0$.

6) Mostrar que $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = 5e^{3x}$ son soluciones **l.d.** de $y'' - 6y' + 9y = 0$.

7) Mostrar que $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = x\,e^{3x}$ son soluciones **l.i.** de $y'' - 6y' + 9y = 0$.

8) Mostrar que $e^x; \ e^{-x}; \ e^{2x}$ son soluciones **l.i.** de $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

TEOREMA 3 – FUNDAMENTAL

Dada una ecuación diferencial lineal, homogénea y de **orden n** (EDOLH–n)

$$a_0(x).y^{(n)} + a_1(x) . y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) . y' + a_n(x).y = 0$$

si a_0 ; a_1 ; …. ; a_n son funciones continuas en [a;b] y $a_0(x) \neq 0$; $\forall x \in [a;b]$ entonces se verifica que:

(I) la ecuación tiene **"n"** soluciones **"linealmente independientes": f_1; f_2 ; ….; f_n .**

(II) **f** es solución de la EDOLH $\Leftrightarrow$ es combinación lineal de "**n**" soluciones **l.i.** **(s/d)**

Observaciones:

☞ f_1 ; f_2 ; ….; f_n solucs. de **EDOLH**
$\Phi = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n f_n$ } **Φ solución de EDOLH – n (Teor. 2)**

☞ f_1 ; f_2 ; ….; f_n solucs. **l.i.** de **EDOLH**
"n" : orden de la EDOLH
f : solución de la EDOLH } $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n f_n$ **(Teo 3-F)**

Conclusiones respecto a las EDOLH-n :

(1) En **(I) Teo 3-F** se asegura la existencia de "**n**" soluciones; en el **Teo 2,** que toda combinación lineal (c.l.) de soluciones de una **EDO** es solución de la **EDO**. Luego, y dado las infinitas formas como se pueden elegir las constantes en la c.l.; concluimos que las **EDOLH** tienen **infinitas soluciones.**

(2) Por **(II)** del **Teo 3-F,** si las "**n**" soluciones son **"l.i."**, entonces **todas** las soluciones **se pueden escribir como c.l. de ellas** (no existen soluciones que no se puedan escribir como **c.l.** de **n** soluciones **l.i.**). Luego, y dado este principio, concluimos que en la solución de una **EDOLH** debe haber **tantas constantes** como **orden tenga la ecuación.**

DEFINICIÓN 5: BASE de SOLUCIONES

Dada una **EDOLH-n,** llamamos **Base de Soluciones** a todo conjunto de **"n" soluciones "linealmente independientes"** de la ecuación diferencial.

DEFINICIÓN 6: SOLUCION GENERAL.

Llamamos **solución general** de una **EDOLH-n** a la solución **f** construida como combinación lineal de las funciones de la **Base de Soluciones**; o sea:

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n f_n \quad ; \quad (c_i = \textit{ctes arbitrarias}).$$

La conclusión más importante y útil a los efectos del cálculo de soluciones que obtenemos del **Teo 3-F** es que: **conocido un "conjunto finito de soluciones", conocemos "todas".**

Ejemplos:

9) $y''' = 0$ **(EDOLH – orden 3)**

$B = \{y_1(x) = 1;\ y_2(x) = x;\ y_3(x) = x^2\}$ **(l.i.)**

$S = \{ f \ / \ f$ **solución de** $y''' = 0 \}$

S = conjunto de *todas* las soluciones

$S = \{f \ / \ f(x) = c_1 + c_2 . x + c_3 . x^2 ;\ \ c_1, c_2 \in R\}$

S
- $g(x) = 2 + 3 . x + . x^2$
- $k(x) = 5$
- $h(x) = 5 x^2$
- $p(x) = x + x^2$
- $q(x) = 2 + x + 3 x^2$

BASE
- $y_1 = 1$
- $y_2 = x$
- $y_3 = x^2$

10) Dada $y'' + y = 0$ **(EDOLH – orden 2):**

$B = \{y_1(x) = \text{sen } x ;\ y_2(x) = \cos x\}$ **(l.i.)**

$S = \{f \ / \ f(x) = c_1 . \text{sen } x + c_2 . \cos x;\ c_1, c_2 \in R\}$

S
- $k(x) = 3 \text{ sen } x + 4 . \cos x$
- $g(x) = 5 \text{ sen } x$
- $p(x) = - 3. \cos x$
- $q(x) = \text{sen } x - \cos x$

BASE
- $y_1 = \text{sen } x$
- $y_2 = \cos$

? Si una función tiene **"otra forma"**, por ejemplo, $h(x) = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{6})$,
¿se puede afirmar que **no es** solución de $y'' + y = 0$ **?.** La respuesta es, **NO.** Hay funciones que se pueden representar de "distintas maneras" (entre ellas las trigonométricas). Así, el solo hecho de que una función no tenga la "forma" de la solución general <u>no implica</u> que <u>no sea</u> solución. Al respecto, no podemos decir nada.

Para resolver esta incógnita, hay dos caminos:
(C.1) derivar, reemplazar en la ecuación y "ver" que pasa (si la verifica o no).
(C.2) tratar de escribir **h** como **c.l.** de las funciones de la **BASE** de la **EDOLH**.
(Por **Teo. 3-(II)** si esto es posible; **h** es solución de la EDOLH)

(C.1) Derivamos: $h(x) = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{6})$; $h'(x) = \cos\,(x + \frac{\pi}{6})$; $h''(x) = - \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{6})$

Reemplazamos: $h''(x) + h(x) = - \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{6}) + \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{6}) = 0$; $\forall x \in R$.

Concluimos: **h** es solución de $y'' + y = 0$.

(C.2) Por Trigonometría: $\text{sen}\,(x + \frac{\pi}{6}) = \text{sen } x . \boxed{\cos \frac{\pi}{6}} + \cos x . \boxed{\text{sen } \frac{\pi}{6}}$

$$\text{sen}\,(x + \tfrac{\pi}{6}) = \text{sen } x . \underbrace{\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{C_1} + \cos x . \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{C_2} = c_1 . \text{sen } x + c_2 . \cos x$$

Conclusión: **h** es solución de $y'' + y = 0$.

? **Respecto al C.2: ¿siempre se puede acudir a él?** La respuesta es, **NO.**
¿Porqué?: porque requiere conocer una **Base de Soluciones**, lo que no siempre se da.

11) Dada $x^2 y'' + x y' - 4 y = 0$ en $[1; \infty)$ → $h(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2}$; **¿es solución ?**

$x^2 y'' + x y' - 4 y = 0$ → **EDOLH- orden 2** → $B = \{ y_1 ; y_2 \}$**(l.i.)** (¿¿??)

Luego, para resolver este problema no se puede acudir al **C.2** ; si al **C.1**

Ejercicio: verificar, por el **C.1**, que **h** es solución de $x^2 y'' + x y' - 4 y = 0$

Ecuaciones Diferenciales Lineales "No Homogéneas" [EDOL-no H-n]

A partir de la Ecuación Diferencial Lineal "No Homogénea":

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \quad \text{(I)}$$

con $a_i(x)$ $i = 0, 1, \ldots, n$, funciones continuas en **[a; b]** ; $a_o(x) \neq 0$; $\forall x \in [a; b]$
definimos los siguientes nociones:

DEF. 7: A la **EDOL- Homogénea** incluida en **(I),**

$$a_o(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = O \quad \text{(II)}$$

la llamamos: **Ecuación Homogénea asociada a (I).**

DEF 7.1: A la solución general de **(II),** la llamamos: **solución de la homogénea ;**
la indicamos: y_h

DEF 7.2: A cualquier solución de **(I)** que no tenga constantes**:**
la llamamos: **solución particular ;**
la indicamos: y_p.

TEOREMA 4:

> Si **f** es una solución cualquiera de **(I) (No Homogénea);**
> y **h** es una solución cualquiera de **(II) (Homogénea asociada) ;**
> entonces, **f + h** es solución de **(I),** la No Homogénea **.**
> O sea, si $\Phi = f + h \Rightarrow [\, a_o.\Phi^{(n)} + a_1.\Phi^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x).\Phi' + a_n.\Phi\,]_{(x)} = b_{(x)}, \forall x$

Demostración: (demostramos para **n = 2** ; queda como ejercicio para **n = 3**)

Sea $a_o.\, y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = b$; $(\forall x \in D)$ **(I)**

$a_o.\, y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = O$; $(\forall x \in D)$ **(II)**

debemos demostrar que $\Phi(x) = [\, f + h\,]_{(x)}$ es solución de **(I);**
o sea que, reemplazada Φ en la ecuación **(I),** **la satisface $\forall x \in D$**

Por **Hip**: ♦ **f** sol. de **(I)** $\Rightarrow a_o.\, f'' + a_1.f' + a_2.\, f = b$; $(\forall x \in D)$

♦ **h** sol. de **(II)** $\Rightarrow a_o.h'' + a_1.\, h' + a_2.\, h = O$; $(\forall x \in D)$

A partir de estos datos, investigamos si $\Phi(x) = f(x) + h(x)$ cumple la **Tesis**:

$$a_o \cdot \Phi'' + a_1 \cdot \Phi' + a_2 \cdot \Phi =$$

$$= a_o \cdot [\, f'' + h''\,] + a_1.[\, f' + h'\,] + a_2.[\, f + h\,] =$$

$$= [a_o f'' + a_1.\, f' + a_2.f\,] + [a_o h'' + a_1.\, h' + a_2.\, h] = b + O = b \quad (\forall x \in D) \qquad \text{[q.e.d.]}$$

Ejemplo: dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 8\, e^{3x}$.

Mostrar que: $h(x) = e^{2x}$ es solución de la **"homogénea asociada";**

$f(x) = e^{3x}$ es solución de la **" no homogénea " ;**

$\Phi = f + h$ es solución de la **" no homogénea " .**

TEOREMA 5:

Si Φ es solución de la **No Homogénea (I);** entonces $\Phi = y_h + y_p$

con: y_h solución de la homogénea **(II) ;**

y_p solución particular de la **No Homogénea (I).**

Demostración: (demostramos para $n = 2$; queda como ejercicio para $n = 3$)

Sea **(I)** $a_o . y'' + a_1 . y' + a_2 . y = b$; $(\forall x \in D) \rightarrow y_p$ solución **(I)**

(II) $a_o . y'' + a_1 . y' + a_2 . y = O$; $(\forall x \in D) \rightarrow y_h$ solución **(II)**

Debemos demostrar que: $\Phi = y_h + y_p$;

equivalentemente, que: $\Phi - y_p = y_h$; o sea, que $\Phi - y_p$ sea solución de **(II)**

Por **Hip**: ♦ Φ solución de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o . \Phi'' + a_1 . \Phi' + a_2 . \Phi = b$; $(\forall x \in D)$

♦ y_p solución de **(I)** $\Rightarrow$ $a_o . y_p'' + a_1 . y_p' + a_2 . y_p = b$; $(\forall x \in D)$

Con estos datos, $y = \Phi - y_p$, ¿es solución de **(II)** ?:

$$a_o . y'' + a_1 . y' + a_2 . y = a_o . [\Phi - y_p]'' + a_1 . [\Phi - y_p]' + a_2 . [\Phi - y_p] =$$
$$= a_o . [\Phi'' - y_p''] + a_1 . [\Phi' - y_p'] + a_2 . [\Phi - y_p] =$$
$$= [a_o \Phi'' + a_1 . \Phi' + a_2 . \Phi] - [a_o y_p'' + a_1 . y_p' + a_2 . y_p] = b - b = 0 \checkmark \ \text{[q.e.d.]}$$

DEF. 8: A Φ , la llamamos**: Solución General de la No Homogénea ;**

la indicamos: $y_g \rightarrow$ $y_g = y_h + y_p$

NOTA: la Solución de la Homogénea, y_h, por **Teo. 3F** es: $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

Finalmente entonces: $y_g = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n] + y_p$

Método General para resolver una EDOL- No Homogénea – Orden n

(1º) Hallar **B**ase de **S**oluciones de la **H**omogénea. $\rightarrow B = \{y_1 ; y_2; \ldots; y_n\}$ **(l.i.)**
(2º) Hallar **S**olución de la **H**omogénea. $\rightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.
(3º) Hallar **S**olución **P**articular de la **N**o **H**omogénea $\rightarrow y_p$
(4º) Dar la **S**olución **G**eneral $\rightarrow y_g = [c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n] + y_p$

Ejemplos:

12) Dada $y''' - 2 y'' - y' + 2 y = 0$ ($\rightarrow$ **EDOLH – 3 ;** $B = \{y_1 (x) ; y_2 (x); y_3 (x)\}$ **(l.i.)**)

Fácilmente se puede demostrar que $B = \{ e^x ; e^{-x} ; e^{2x} \}$ (ejercicio)

Luego, su solución general es: $y_g = y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 . y_3$.

$$\boxed{y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}.}$$

13) Dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4.x$ **(*)**, dar su solución general.

↳**EDOL"NoH"- 3** → $b(x) = 4.x$ (lineal); $B = \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$

(1º) $B = \{ e^{x} ; e^{-x} ; e^{2x} \}$ (ejemplo 12)

(2º) $y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ (ejemplo 12)

(3º) ¿y_p? → **por "prueba y error"**

¿función de prueba?: y → lineal, función prototipo de la clase de **b.**

$y(x) = A.x + B$ (¿A? ; ¿B?, ¿existen?)

▸ $y(x) = A.x + B$; $y'(x) = A$; $y''(x) = 0$; $y'''(x) = 0$

Reemplazamos en **(*)** y hallamos (si existen) **A** y **B**:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = -A + 2(Ax + B) = 2Ax + (2B - A) = 4.x$$

$$2A.x + (2B - A) = 4.x \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 4 \\ 2B - A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases} \rightarrow y_p = 2.x + 1$$

(4º) ¿y_g? → $\boxed{y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 2x + 1}$

14) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 12 e^{3x}$ **(*)**, dar su solución general.

↳**EDOL"NoH"- 3** → $b(x) = 12 e^{3x}$ (exponencial); $B = \{y_1(x) ; y_2(x); y_3(x)\}$

(1º) $B = \{ e^{x} ; e^{2x} ; 1 \}$ (verificar)

(2º) $y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3$

(3º) ¿y_p? → **por "prueba y error"**

¿función de prueba?: y → exponencial, función prototipo de la clase de **b.**

$y(x) = A.\ e^{3x}$ (¿A? ; ¿existe?)

▸ $y(x) = A.\ e^{3x}$; $y'(x) = 3.\ A e^{3x}$; $y''(x) = 9 A.\ e^{3x}$; $y'''(x) = 27.\ A.\ e^{3x}$

Reemplazamos en **(*)** y hallamos **A** (si existe) **:**

$$y''' - 3y'' + 2y' = [\,27A - 27A + 6A\,].\ e^{3x} = [\,6A\,]\ e^{3x} = 12 e^{3x}$$

$$[\,6A\,]\ e^{3x} = 12 e^{3x} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 6A = 12 \\ \quad A = 2 \end{array} \right) \rightarrow y_p = 2 e^{3x}$$

(4º) ¿y_g? → $\boxed{y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 + 2 e^{3x}}$

15) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 12e^x$ **(*)**, dar su solución general.

↳**EDOL"NoH"- 3** → $b(x) = e^x$ (exponencial) ; $B = \{y_1(x) ; y_2(x); y_3(x)\}$

(1º) $B = \{ e^x ; e^{2x} ; 1 \}$

(2º) $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3$

(3º) ¿y_p? → **por "prueba y error"**

¿función de prueba?: y → exponencial, función prototipo de la clase de **b.**

$y(x) = A. e^x$ (¿A? ; ¿existe?)

- $y(x) = A. e^x$; $y'(x) = A e^x$; $y''(x) = A. e^x$; $y'''(x) = A. e^x$

Reemplazamos en **(*)** y hallamos **A** (si existe) **:**

$$y''' - 3y'' + 2y' = [A - 3A + 2A]. e^x = [0 . A] e^x \neq 12e^x \ (\forall A)$$

⇒ no existe **A** tal que $A.e^x$ sea **s**olución **p**articular de la **EDOL- NoH**

- **¿Esto implica que no existe solución particular??** .

NO, esto sólo implica que la solución particular <u>no es una "exponencial"</u>.

?

¿Por qué ahora no lo es y en el ejemplo-14 (muy parecido**), si lo era?;**
¿A que "clase" de funciones pertenecerá la solución particular? ;
¿Habrá "algo" en la ecuación diferencial que de "pistas" al respecto?

16) Dada $x^2 y'' + x y' - 4y = 12$ **(*)**, dar su solución general

↳**EDOL"NoH"- 2** → $b(x) = 12$ (constante); $B = \{y_1(x) ; y_2(x)\}$

(1º) ¿B ?

(2º) ¿y_h?

(3º) ¿y_p? → **¿función de prueba?:** y → cte, función prototipo de la clase de **b.**

- $y(x) = A$; $y'(x) = 0$; $y''(x) = 0$.

Reemplazamos en **(*)** y hallamos (si existe) **A**:

$$x^2 y'' + x y' - 4y = -4A = 12 \Leftrightarrow A = -3 \rightarrow y_p = -3$$

(4º) ¿y_g ? → $\boxed{y_g = y_h + y_p \rightarrow y_g = y_h - 3}$ → ¿y_h? → ¿B ?

<u>**NOTA**</u>: estos dos últimos ejemplos muestran que si bien el **Método General** da un camino para resolver las **EDOL,** <u>*en la práctica*</u> y en algunos casos, su aplicación se dificulta. El principal problema está en el **1er paso**; o sea, en la determinación de la Base de Soluciones **(ej: 16)**

Existe <u>*un caso*</u> donde las características que en particular presenta la **EDOL,** permiten salvar esta dificultad, encontrar un **Método para hallar B.** Es el caso de las **EDOL-CC:**

Ecuaciones Diferenciales Lineales a <u>Coeficientes Constantes</u>:

$$a_o.y^{(n)} + a_1. y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} .y' + a_n . y = b$$

$$a_o ; a_1 ; \ldots\ldots\ldots; a_{n-1} ; a_n \in \mathbb{R} ; a_o \neq 0$$

<u>**Método General para una EDOLH - Coeficientes Constantes**</u>

$$a_o. y^{(n)} + a_1. y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} .y' + a_n . y = 0 \ ; \ \forall x \in [a; b] \qquad \text{(III)}$$

a_o ; a_1 ; ………; a_{n-1} ; a_n $\in$ R ; $a_o \neq 0$.

☞ **$a_i(x) = a_i$, $\forall\, x \in$ [a; b] → *funciones constantes* → *continuas en* [a; b].**

(1º) B = Base de Soluciones de (III) → B = {y_1 ; y_2; …..; y_n }

➯**<u>¿cómo</u> procedemos para hallar B? → por "<u>Prueba y Error</u>".**

(Paso-1) elegir una ***"función de prueba"*** **,** ***f*** .

(Paso-2) derivar ***f***, reemplazar ***f*** y sus derivadas en **(III):**

f **; ¿ verifica (III) ? :** ☞ **SI** $\Rightarrow$ ***f*** ***<u>es solución</u>***

☞ **NO** $\Rightarrow$ ***f*** **no *<u>es solución</u>*** $\Rightarrow$ **(Paso-1)**

(Paso-3) repetir **(P-2)** hasta obtener **"n"** soluciones de **(III): {f_1 ; f_2 ; …..; f_n }**

(Paso-4) analizar si **{f_1 ; f_2 ; …..; f_n }** es **BASE de SOLUCIONES**:

¿ es l.i. ?:☞ **SI** $\Rightarrow$ **FIN del Proceso → B = {f_1 ; f_2 ; …..; f_n }**

☞ **NO $\Rightarrow$ (Paso-1), reiniciar el proceso hasta obtener B.**

<u>Ejecución del proceso de Prueba y Error</u>:

▸ **(Paso-1): Para elegir *f* *(función de prueba)*: ¿<u>por donde empezamos</u>? .**

Inspeccionamos la **EDOL** al efecto de "ver" si presenta alguna característica que nos remita a alguna función "conocida". Al tal fin, lo primero que hacemos es "*simplificar*" el problema, plantear el **"*caso simple*" (n = 2) :**

$$a.\ y''_{(x)} + b.\ y'_{(x)} + c.\ y_{(x)} = 0\ ;\ \forall\, x \in [a; b]\ \ \text{(III-2)}$$

$$a\ ;\ b\ ;\ c \in \mathbb{R}\ ;\ a \neq 0.$$

☑ **¿Que vemos?:** Que **y = y(x)** para ser solución de **(III-2),** debe verificar que **, y´** e **y´´** al ser *multiplicadas* por un número real y luego *sumadas*, hagan **"cero"** la ecuación, <u>*para todo*</u> "***x***". Que, <u>para que esto pase</u>, **y(x)** debe verificar que sus derivadas sean **"*múltiplos de sí misma*"**; o sea: **$y^{(k)}(x) = \alpha_k\, y(x)$, $\alpha_k \in$R.**

☑ **¿Existe tal función?:** si, la "exponencial" tiene esta propiedad.

$y = e^{r.\,x}$ → $y´ = r.\ e^{r.\,x}$; $y´´ = r^2.e^{r.\,x}$; ……; $y^{(k)} = r^k.e^{r.\,x}$

<u>Conclusión 1</u>: ***función de prueba*** **→ $y = e^{r.x}$.**

▸ **(Paso-2): La exponencial, ¿*<u>es solución</u>*?: $y = e^{r.\,x}$ → $y´ = r.\ e^{r.\,x}$; $y´´ = r^2.\ e^{r.\,x}$**

$$a.\ y'' + b.\ y' + c.\ y = a.[r^2.\ e^{r.\,x}] + b.\ [r.\ e^{r.\,x}] + c.[e^{r.\,x}] = 0,\ \ \forall\, x \iff$$

$$\iff [\,a.\ r^2 + b.\ r + c\,].\ e^{r.\,x} = 0\ ,\ \forall\, x \iff \boxed{a.\ r^2 + b.\ r + c = 0}$$

<u>Conclusión 2</u>: $y = e^{r.\,x}$ es solución de (III-2) $\iff$ r es cero de $a.\ r^2 + b.\ r + c = 0$.

<u>NOTA</u>: fácilmente vemos que la *conclusión* obtenida *no depende* del orden de la **EDOL;** que podemos generalizar la misma a **ecuaciones diferenciales lineales de orden "n"**.

<u>DEF. 9</u>: <u>Ecuación Característica</u> (EC).

Llamamos, **Ecuación Característica** a la **ecuación**:

$$a_o . r^n + a_1 . r^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} . r + a_n = 0,$$

asociada a la **EDOL** (III): $a_o . y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} . y' + a_n . y = 0$

<u>Conclusión General / Paso-2</u>

$y = e^{r.x}$ es solución de (III) $\Leftrightarrow$ r es cero de $a_o . r^n + a_1 . r^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} . r + a_n = 0$.

$y = e^{r.x}$ solución de (III) $\Leftrightarrow$ r raíz de la "Ecuación Característica".

▸ **(Paso-3) Obtener "n" soluciones de (III): $\{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$**

Por Algebra sabemos que una ecuación de grado "**n**" tiene "**n**" raíces; que estas pueden ser simples ó repetidas, reales ó complejas; que, si son complejas, aparecen de "***a pares***".

Luego:
- ♦ Si **m = cantidad de raíces reales** (sin repetir) de la EC entonces **$m \leq n$;**
- ♦ Si r_j **solución** EC, $r_j \in \mathbf{R}$ entonces $y_j = e^{r_j . x}$ solución de **(III); j=1, 2,…, m**

<u>Conclusión 3</u>: de la EC podemos obtener **"m"** soluciones **<u>distintas</u>** de **(III)** con **$m \leq n$.**

¿m = n?
- ☞**SI $\Rightarrow$ (Paso - 4)**
- ☞**NO $\Rightarrow$ (Paso-1)** (reiniciar el proceso, obtener las **"n-m"** sols. faltantes**)**

▸ **(Paso-4) $\{y_1 ; y_2 ; \ldots; y_n\}$; ¿ es BASE de SOLUCIONES ?**

¿ es l.i. ? :
- ☞ **SI $\Rightarrow$ FIN del Proceso → B = $\{y_1 ; y_2 ; \ldots; y_n\}$**
- ☞ **NO $\Rightarrow$ (Paso-1), reiniciar el proceso hasta obtener B.**

<u>Ejemplo 17</u>: $y'' - 4.y' + 3.y = 6.e^{x}$ (**→EDOLH-2 → B = $\{y_1; y_2\}$ (l.i.) ; b(x)** $= 6.e^{x}$ **)**

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → B = $\{y_1; y_2\}$ (l.i.)

▸ **(Pasos 2; 3):** EC → $r^2 - 4.r + 3 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3;\ r_2 = 1$ (**2** raíces, reales y distintas)

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 3 \Rightarrow \\ r_2 = 1 \Rightarrow \end{array}\left(\begin{array}{l} y_1 = e^{3.x} \\ y_2 = e^{x} \end{array}\right)\right\} \rightarrow \textbf{2 soluciones: ¿son l.i.?}$$

▸ **(Paso- 4):** $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{3x}}{e^{x}} = e^{2.x} \neq cte \overset{\text{criterio 3 l.i.}}{\Longrightarrow\Longrightarrow}$ **$\{y_1 ; y_2\}$ es li. ; es Base de Soluciones**

$$\Longrightarrow \quad B = \{ e^{3.x} ; e^{x} \}$$

(2º) <u>Solución de la Homogénea</u>: $y_h = c_1 e^{3.x} + c_2 e^{x}$.

(3º) <u>Solución Particular</u>: $y_p = A\,x\,e^{x} \rightarrow A = -3 \rightarrow y_p = -3\,x\,e^{x}$

(<u>Verificar</u>. <u>Explorar porqué no es</u>: **A.e^x)**

(4º) <u>Solución General</u>: $y_g = c_1 e^{3.x} + c_2 e^{x} - 3\,x\,e^{x}$

<u>Construcción de la Base de Soluciones según las raíces de la EC.</u>

Distintos Casos para la EDOLH-2 : $a_o\ y'' + a_1\ y' + a_2\ y = 0\ ;\ \forall\ x \in [a; b]$ **(III-2)**

$a_o\ ;\ a_1\ ;\ a_2 \in \mathbb{R};\quad \boxed{a_o \neq 0}$

Caso 1: Raíces Reales y Distintas:

$$a_o\ y'' + a_1\ y' + a_2\ y = 0$$

$$\text{EC} \rightarrow a_o\, r^2 + a_1 . r + a_2 = 0 \Leftrightarrow r_1\ ;\ r_2 \in \mathbb{R} \wedge \boxed{r_1 \neq r_2\ \ (*)}$$

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → B = {y_1 ; y_2 } (l.i.)

▸ **(Pasos 2; 3):** $\begin{array}{l} r_1 \Rightarrow \\ r_2 \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{l} y_1 = e^{r1 .x} \\ y_2 = e^{r2 .x} \end{array} \right) \rightarrow$ **2 soluciones distintas: ¿son l.i.?**

▸ **(Paso- 4):** $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{r_1 . x}}{e^{r_2 . x}} = e^{(r_1 - r_2).x} = e^{\alpha . x} \neq cte$ **[por (*)** $\alpha = r_1 - r_2 \neq 0$**]**

$$\underset{\text{crit. } 3}{\Longrightarrow} \{y_1\ ;\ y_2\} \text{ es li.} \Longrightarrow \text{Base de Soluciones} \Longrightarrow B = \{e^{r1 .x}; e^{r2 .x}\}$$

$$\boxed{\textbf{(2º) Solución de la Homogénea – } \underline{\textbf{Caso 1}}\textbf{:}\quad y_h = c_1\, e^{r1 .x} + c_2\, e^{r2 .x}}$$

Caso 2: Raíces Reales e Iguales:

$$y'' - 2.\alpha . y' + \alpha^2\, y = 0$$

$$\text{EC} \rightarrow r^2 - 2\,\alpha . r + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (r - \alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow r_1\ ;\ r_2 \in \mathbb{R} \wedge \boxed{r_1 = r_2 = \alpha\ \ (*)}$$

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → B = {y_1 ; y_2 } (l.i.)

▸ **(Pasos 2; 3):** $\begin{array}{l} r_1 \Rightarrow \\ r_2 \Rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{l} y_1 = e^{r1 .x} \overset{(*)}{=} e^{\alpha . x} \\ y_2 = e^{r2 .x} \overset{(*)}{=} e^{\alpha . x} \end{array} \right) \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow$ **1 solución** → **(Paso -1)**

▸ **(Paso-1) Buscamos otra solución →** ***función de prueba*:** $y = x.\, e^{\alpha . x}$

$$y = e^{\alpha .x} . x \xrightarrow{\times\ \alpha^2} \alpha^2 .\ y = e^{\alpha .x} . x . \alpha^2$$

$$y' = e^{\alpha .x} . (1 + \alpha . x) \xrightarrow{\times\ -2\,\alpha} - 2.\alpha . y' = e^{\alpha .x} . (-2\,\alpha - 2\,\alpha^2 . x)$$

$$y'' = e^{\alpha . x} (2\alpha + \alpha^2 . x) \xrightarrow{\cdots\cdots\cdots} \underline{y'' = e^{\alpha . x} . (2\alpha + \alpha^2 . x)}$$

$$y'' - 2.\alpha . y' + \alpha^2\, y = e^{\alpha . x} (2\alpha + \alpha^2 x - 2\alpha - 2\alpha^2 x + \alpha^2 x)$$

$$y'' - 2.\alpha . y' + \alpha^2\, y = 0 \rightarrow \text{es solución!!}$$

Conclusión: $y_2 = x . e^{\alpha . x}$ **es solución de la EDOLH-2**

▸ **(Paso-4):** $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{x.\, e^{\alpha . x}}{e^{\alpha . x}} = x \neq cte \Rightarrow \{y_1; y_2\}$ es li. $\Rightarrow B = \{e^{\alpha . x};\ x . e^{\alpha . x}\}$

$$\boxed{\textbf{(2º) Solución de la Homogénea - } \underline{\textbf{Caso 2}}:\quad y_h = c_1\, e^{\alpha . x} + c_2\, x . e^{\alpha . x}.}$$

NOTA: La ***función de prueba*:** $y = x.\, e^{\alpha . x}$; se obtiene acudiendo al método de sustitución.

Se propones como solución la función: $y = e^{\alpha . x} . v(x)$; se busca v (nueva incógnita)

$$y = e^{\alpha .x} . v \xrightarrow{\times\ \alpha^2} \alpha^2 .\ y = e^{\alpha .x} .\ \alpha^2\, v$$

$$y' = e^{\alpha.x}.(v' + \alpha.v) \xrightarrow{\times -2\alpha} -2.\alpha.y' = e^{\alpha.x}.(-2\alpha v' - 2\alpha^2.v)$$

$$y'' = e^{\alpha.x}(v'' + 2\alpha v' + \alpha^2.v) \xrightarrow{\cdots\cdots\cdots} \underline{y'' = e^{\alpha.x}.(v'' + 2\alpha v' + \alpha^2.v)}$$

$$y'' - 2.\alpha.y' + \alpha^2 y = e^{\alpha.x}(v'') = 0$$

☑ $e^{\alpha.x}(v'') = 0 \Leftrightarrow v'' = 0 \Leftrightarrow v(x) = c_1 x + c_2 \xrightarrow{\text{sol part.}} v(x) = x$

Caso 3: **Raíces Complejas :**

$$a_o\ y'' + a_1\ y' + a_2\ y = 0$$

EC → $a_o r^2 + a_1 . r + a_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 ; r_2 \in C \wedge$ $r_1 = a + bi$; $r_2 = a - bi$

(1º) Hallar la Base de Soluciones de EDOLH-2 → B = {y_1; y_2} (l.i.)

▶ **(Pasos 2; 3):** $r_1 \Rightarrow z_1 = e^{r_1 . x}$

$r_2 \Rightarrow z_2 = e^{r_2 . x}$ → **2 soluciones a variable compleja!!**

Nuestro trabajo requiere **funciones solución a variable real**.

Para ello, acudimos a la **"Fórmula de Euler"**

☞ **"Fórmula de Euler":** $e^{\alpha i} = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)$

EULER ($\alpha = b.x$)

☞ $z_1 = e^{r_1\ x} = e^{(a+bi)\ x} = e^{(ax + i\ b\ x)} = e^{(ax)}.e^{(bx)i} =$

$= e^{(ax)}.(\cos(bx) + i.\operatorname{sen}(bx)) = [e^{(ax)}.\cos(bx)] + i.[e^{(ax)}\operatorname{sen}(bx)]$

☞ $z_1 = [e^{(ax)}.\cos(bx)] + i.[e^{(ax)}\operatorname{sen}(bx)] = y_{11}(x) + i . y_{12}(x)$

con: $y_{11} = e^{(ax)}.\cos(bx)$ (parte real de z_1 → ***función real a variable real***)

$y_{12} = e^{(ax)}.\operatorname{sen}(bx)$ (parte imaginaria de z_1 → ***función real a variable real***)

Luego, obtenemos dos funciones escalares soluciones de la **EDOLH.**

$\underset{\text{crit. } 3}{\Longrightarrow}$ {y_{11} ; y_{12}} l.i. $\Longrightarrow$ B = {$e^{(ax)}.\cos(bx)$; $e^{(ax)}.\operatorname{sen}(bx)$}

(2º) Solución de la Homogénea – Caso 3: $y_h = c_1\ e^{(ax)}.\cos(bx) + c_2\ e^{(ax)}.\operatorname{sen}(bx)$

$$y_h = e^{(ax)}.[c_1 \cos(bx) + c_2 \operatorname{sen}(bx)]$$

$$a_o . y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} . y' + a_n . y = b(x) \; ; \; \forall x \in [a; b] \qquad \text{(IV)}$$

$$a_o \; ; \; a_1 \; ; \ldots\ldots\ldots ; \; a_{n-1} \; ; \; a_n \in R \; ; \; a_o \neq 0.$$

☞ $a_i(x) = a_i$, $\forall x \in [a; b] \rightarrow$ ***funciones constantes*** $\rightarrow$ ***continuas en*** **[a; b].**

<u>Observación 1</u>: este tipo de **EDOL** es un caso particular de Ecuación Diferencial Lineal. Luego, el Método General a aplicar para resolver **(IV)** es el ya visto; pero, con un problema <u>resuelto</u>. Para las **EDOL-CC** (**y sólo para ellas!!**) contamos con un Método para hallar **B,** la **B**ase de **S**oluciones de la **H**omogénea.

<u>Método General para resolver una EDOL- No Homogénea – Coefs Ctes o No</u>

(1º) Hallar **B**ase de **S**oluciones de la **H**omogénea.	$\rightarrow$ $B = \{y_1 \; ; y_2; \; \ldots..; \; y_n \}$ **(l.i.)**
(2º) Hallar **S**olución de la **H**omogénea.	$\rightarrow$ $y_h = c_1 y_1 + c_2 \; y_2 + \ldots . + c_n y_n$.
(3º) Hallar **S**olución **P**articular de la **N**o **H**omogénea	$\rightarrow$ y_p
(4º) Dar la **S**olución **G**eneral	$\rightarrow$ $y_g = [\, c_1 y_1 + c_2 \; y_2 + \ldots . + c_n y_n] + y_p$

<u>Observación 2</u>: si repasamos los pasos del Método General vemos que resta un problema por resolver; el de la **S**olución **P**articular **(3º)**. Para hallar esta solución acudimos al método de "Prueba y Error", detectamos ciertos problemas en el criterio usado para elegir la "función de prueba". Recordamos que tal función era la "prototipo" de la clase de funciones a la que pertenece **"b"** (el "término independiente") y que si bien en muchos casos este criterio sirvió (hallamos la solución particular) hubo otros en los que no; y esto aunque las ecuaciones diferenciales eran muy similares.
Resolvemos este último problema a través de "sistematizar" la búsqueda de soluciones particulares.
Para lograr este objetivo existen distintos métodos, vemos uno de ellos.

<u>Solución Particular – *MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS*.</u>

Este Método, en esencia, es el de **"Prueba y Error"** que usamos en los ejemplos.
Consiste en elegir como ***"función de prueba"*** la función prototipo correspondiente a la clase de funciones a la que pertenece **"b"** (o sea, una función similar a **"b"** pero con **"coeficientes indeterminados"**); reemplazarla en la ecuación diferencial y hallar, de ser posible, los ***valores de los coeficientes*** para que la función propuesta sea la solución particular buscada.

Ejemplos:

18) Dada $y''' - 2y'' - y' + 2y = 6.x - 3$ **(*)** , $b(x) = 6.x - 3 \rightarrow$ **" lineal "**.

¿y_p? $\rightarrow$ **función de prueba:** $y(x) = A.x + B$ (¿A? ; ¿B?, ¿existen?)

▸ $y(x) = A.x + B$; $y'(x) = A$; $y''(x) = 0$; $y'''(x) = 0$ (Reemplazamos en **(*)**)

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = -A + 2(Ax + B) = 2Ax + 2B - A = 6.x - 3$$

$$2A.x + (2B - A) = 6.x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 6 \\ 2B - A = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \rightarrow y_p \end{cases}$$

▸ $\boxed{y_p = 3x}$ (verificar)

19) Dada $y''' - 3y'' + 2y' = 3e^{3x}$ **(*)** , $b(x) = 3e^{3x} \rightarrow$ **" exponencial "**.

¿y_p? → ***función de prueba***: $y_p(x) = A.\ e^{3x}$

▸ $y_p(x) = A.\ e^{3x}$; $y_p'(x) = 3.\ A\ e^{3x}$; $y_p''(x) = 9\ A.\ e^{3x}$; $y_p'''(x) = 27.\ A.\ e^{3x}$

Reemplazamos en **(*)**:

$$y''' - 3\,y'' + 2\,y' = [\,27\,A - 27\,A + 6\,A\,].\ e^{3x} = [\,6\,A\,]\ e^{3x} = 3\ e^{3x}$$

$$[\,6\,A\,]\ e^{3x} = 3\ e^{3x} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 6\,A = 3 \\ \quad A = \tfrac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow y_p$$

▸ $y_p = \tfrac{1}{2}\ e^{3x}$ (verificar)

20) Dada $y''' - 3\,y'' + 2\,y' = e^{x}$ **(*)** , $b(x) = e^{x}$ → **" exponencial "**.

↳ **EC:** $r^3 - 3\,r^2 + 2\,r = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1\ ;\ r_2 = 2\ ;\ r_3 = 0$

(1º) $B = \{\,e^{x}\ ;\ e^{2x}\ ;\ 1\,\}$

(2º) $y_h = c_1\,e^{x} + c_2\,e^{2x} + c_3$

(3º) ¿y_p? → ***función de prueba***: $y_p(x) = A.\ e^{x}$

▸ $y_p(x) = A.\ e^{x}$; $y_p'(x) = A\ e^{x}$; $y_p''(x) = A.\ e^{x}$; $y_p'''(x) = A.\ e^{x}$

Reemplazamos en **(*)**:

$$y''' - 3\,y'' + 2\,y' = [\,A - 3\,A + 2\,A\,].\ e^{x} = [\,0\,.\,A\,]\ e^{x} = 0 \neq 12\ e^{x}$$

⇒ **<u>no existe</u> A** tal que **A.e^{x}** sea **s**olución **p**articular de la **EDOL- NoH .**

? **¿ porqué y_p <u>no es solución</u> de (*) si en el ej-19 (**muy parecido**) si lo era ?;**
¿ hay "algo" en la EDO o en su resolución que de "pistas" al respecto?.
SI !!! : $e^{x} = e^{1.x}$ y **"1" es raíz de la EC ; luego,**
e^{x} solución de la <u>Homogénea</u> ⇒ A e^{x} también lo es y ∀A !!

Para salvar este problema, y_p (la función de prueba fallida**) se multiplica por "x";**
⇒ ***función de prueba*** : $f_p(x) = y_p(x)\ .\ x \rightarrow f_p(x) = A.e^{x}.x$ (<u>verificar que existe A</u>).

<u>**Conclusión General**</u>: **para** $b(x) = k\ .\ e^{\lambda.x}$ **(k, λ ∈ R)**

☑ **Si λ <u>no es raíz</u> de la EC ⇒** $y_p(x) = A.\ e^{\lambda.x}$;

☑ **Si λ <u>es raíz</u> de multiplicidad "m" de la EC entonces** $f_{p\,(x)} = y_p(x)\ .\ x^m$
⇒ $f_{p\,(x)} = A.e^{\lambda.x}.\ x^m$

☑ **Si** $\lambda = 0$ **entonces** $b(x) = k\ e^{0.x} \rightarrow b(x) = k$ **; luego,**
si ***0*** **<u>es raíz</u> de multiplicidad "m" de la EC entonces** $f_{p\,(x)} = y_p(x)\ .\ x^m$
⇒ $f_{p\,(x)} = A.\ x^m$.

☑ **en general, cualquiera sea "b(x)", si "y_p" la función de prueba elegida no es solución particular de la no homogénea entonces:** $f_{p\,(x)} = y_p(x)\ .\ x^m$

21) Dada $y'' - 4\,y' + 4y = 4\,e^{2x}$ **(*),** $b(x) = 4\ e^{2x}$ → **"exponencial "**.

➥ **EC:** $r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 = 2$ (**multiplicidad de la raíz** = 2)

(1º) $B = \{ e^{2x} \; ; \; x.\, e^{2x} \}$ (verificar)

(2º) $y_h = c_1 e^{2x} + c_2\, x.e^{2x}$

(3º) $¿y_p?$ → ***función de prueba***: $y(x) = A.\, e^{2x} .\, x^2$ (probamos…)

▸ $y(x) = A.\, x^2.e^{2x}$; $y´(x) = [2\,A\,x + 2\,A.\, x^2].e^{2x}$; $y´´(x) = [2\,A + 8Ax + 4Ax^2\,].e^{2x}$

Reemplazamos en **(*)**:

$$y´´ - 4\,y´ + 4\,y = [\,2\,A\,].\, e^{2x} = 4\,e^{2x} \Leftrightarrow A = 2$$

▸ $y_p = 2.\; x^2.\, e^{2x}$ (verificar que es solución de la no homogénea)

22) Dada $y´´´ - y´´ = 10$ **(*)**, $b(x) = 10$ → **"constante"**

➥ EC → $r^3 - r^2 = r^2\,(r-1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1;\; \boxed{r_2 = r_3 = 0}$ (→ **mult. = 2)**

(1º) $B = \{ e^{x} ; 1 ; x \}$ (verificar)

(2º) $y_h = c_1\, e^{x} + c_2 + c_3\, .\, x$

(3º) $¿y_p?$ → ***función de prueba***: $y_p = ¿A?$; **NO** → $y_p = A\, .\, x^2$

▸ $y(x) = A\, .\, x^2$; $y´(x) = 2\,A\,x$; $y´´(x) = 2\,A$; $y´´´\,(x) = 0.$

Reemplazamos en **(*)** : $y´´´ - y´´ = -\,2\,A = 10 \Leftrightarrow A = -\,5$

▸ $y_p = -\,5\, .\, x^2$

(4º) $¿y_g\,?$ → $y_g = y_h + y_p$ → $y_g = c_1\, e^{x} + c_2 + c_3\, .x - 5\,x^2$

23) Dada $y´´´ - y´´ = 12\,x$ **(*)**, $b(x) = 12\,x$ → **"lineal"**

➥ EC → $r^3 - r^2 = r^2\,(r-1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1$; $\boxed{r_2 = r_3 = 0}$ (→ **mult. = 2)**

(1º) $B = \{ e^{x} ; 1 ; x \}$

(2º) $y_h = c_1\, e^{x} + c_2 + c_3\, .\, x$

(3º) $¿y_p?$: ***función de prueba***: $y_p = ¿\,A\,x + B?\; \xrightarrow{\text{NO}}\; y_p = (Ax+B).x^2 = A\,x^3 + Bx^2$

▸ $y(x) = A\,x^3 + Bx^2$; $y´(x) = 3.A\,x^2 + 2.Bx$; $y´´(x) = 6\,A\,x + 2B$; $y´´´\,(x) = 6\,A$

Reemplazamos en **(*)**:

$$y´´´ - y´´ = 6\,A - 6\,A\,x - 2B = -\,6\,A\,x + (6\,A - 2B) = 12\,x$$

$$-\,6\,A\,x + (6\,A - 2B) = 12\,x \Leftrightarrow \begin{cases} -\,6\,A = 12 \\ 6\,A - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\,2 \\ B = -\,6 \end{cases} \rightarrow y_p = -\,2.x^3 - 6\,x^2$$

(4º) $¿y_g\,?$ → $y_g = y_h + y_p$ → $\boxed{y_g = c_1\, e^{x} + c_2 + c_3\, .\, x - 2.x^3 - 6\,x^2}$

$$a_o.\ y^{(n)} + a_1.\ y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1}.y' + a_n\ .\ y = b(x)\ ;\ \forall\ x \in [a; b]$$
$$a_o\ ;\ a_1\ ;\ \ldots\ldots\ldots;\ a_{n-1}\ ;\ a_n \in R\ ;\ a_o \neq 0.$$

Si $\lambda \in R$ y λ no es raíz de la Ecuación Característica, entonces:

Si b(x) es:	**Seleccionar y_p :**
$\alpha\ e^{\lambda.x}$	$A\ e^{\lambda.x}$
α sen (βx)	A sen (βx) + B cos (βx)
α cos (βx)	A sen (βx) + B cos (βx)
$\alpha.x$	$A + B.\ x$
$\alpha.x^2$	$A + B.\ x + C\ .x^2$
$\alpha_0. + \alpha_1.\ x + \ldots\ldots + \alpha_s.\ x^s$	$A_0. + A_1.\ x + \ldots\ldots + A_s.\ x^s$
$\alpha.x^2.\ e^{\lambda.x}$	$(A + B.\ x + C\ .x^2).\ e^{\lambda.x}$
$(\alpha_0. + \alpha_1.\ x + \ldots\ldots + \alpha_s.x^s).e^{\lambda.x}$	$(A_0. + A_1.\ x + \ldots\ldots + A_s.\ x^s)\ .\ e^{\lambda.x}$
$\alpha\ .\ x^2.$ sen (βx)	$(A_1+B_1.x+C_1.x^2)\text{sen}(\beta x)+(A_2+B_2.x+C_2.x^2)\cos(\beta x)$
$\alpha\ .\ x^2.$ cos (βx)	$(A_1+B_1.x+C_1.x^2)\text{sen}(\beta x)+(A_2+B_2.x+C_2.x^2)\cos(\beta x)$
α sen $(\beta x)\ .\ e^{\lambda.x}$	(A sen (βx) + B cos (βx)). $e^{\lambda.x}$
α cos (βx) $e^{\lambda.x}$	(A sen (βx) + B cos (βx)). $e^{\lambda.x}$
P(x) . sen $(\beta x)\ .\ e^{\lambda.x}$	(Q(x) sen (βx) + H(x) cos (βx)). $e^{\lambda.x}$
P(x) . cos $(\beta x)\ .\ e^{\lambda.x}$	(Q(x) sen (βx) + H(x) cos (βx)). $e^{\lambda.x}$
	Q y H polinomios del mismo grado que P

Recordar que:

☑ Si λ es raíz multiplicidad "m" de la EC, entonces las correspondientes soluciones de la homogénea son: $y_1(x) = e^{\lambda.x}$; $y_2(x) = x.e^{\lambda.x}$; …. ; $y_m(x) = x^m.\ e^{\lambda.x}$

☑ Si λ es raíz de multiplicidad "m" de la EC entonces $y^*_p(x) = y_p(x)\ .\ x^m$ (con y_p la correspondiente de la tabla anterior)

Ejemplos:

24) Dada $y''' - 3y'' + 3.\, y' - y = 4 \,.\, e^x$, hallar su solución general

↳**EDOL"NoH"- 3** → $b(x) = 4.e^x$ (exponencial); $B = \{y_1(x)\ ;\ y_2(x)\ ;\ y_3\}$

1º) **Base de Soluciones**

- **(Pasos 2; 3):** EC → $r^3 - 3r^2 + 3.r - 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$

$B = \{ e^x\ ;\ x.\, e^x\ ;\ x^2.\, e^x \}$ (verificar)

2º) **Solución de la Homogénea**: $y_h = c_1 e^x + c_2\, x \,.\, e^x + c_3\, x^2 \,.\, e^x$.

3º) **Solución Particular**: $y_p = A\, x^3\, e^x$ → $A = \dfrac{2}{3}$

4º) **Solución General** : $y_G = c_1 e^x + c_2\, x \,.\, e^x + c_3\, x^2 \,.\, e^x + \dfrac{2}{3}\, x^3\, e^x$

25) $y''' - y'' = \operatorname{sen} x$ **(*)**

↳**EDOL"NoH"- 3** → $b(x) = \operatorname{sen} x$ (trig.) ; $B = \{y_1(x)\ ;\ y_2(x)\ ;\ y_3(x)\}$

1º) **Base de Soluciones**

- **(Pasos 2 ; 3):** EC → $r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 0\ ;\ r_3 = 1$

$B = \{ 1\ ;\ x\ ;\ e^x \}$ (verificar)

2º) **Solución de la Homogénea**: $y_h = c_1 + c_2 \,.\, x + c_3\, e^x$.

3º) **Solución Particular**: $y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$

- $y(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$; $y'(x) = A \cos x - B \operatorname{sen} x$;
  $y''(x) = -A \operatorname{sen} x - B \cos x$; $y'''(x) = -A \cos x + B \operatorname{sen} x$.

Reemplazamos en **(*)** y hallamos (si existe) **A** y **B**:
$y''' - y'' = -A \cos x + B \operatorname{sen} x + A \operatorname{sen} x + B \cos x = (B-A) \cos x + (B+A) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B - A = 0 \\ B + A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow y_p = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2} \cos x$$

4º) **Solución General**: $y_G = y_h = c_1 + c_2 \,.\, x + c_3\, e^x + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{2} \cos x$

11.4 Ejercicios EDO

1) Para las ecuaciones planteadas a continuación:

i) Indicar cuál de ellas es una **ecuación diferencial ordinaria** (**EDO**).

ii) Dar el orden de las **EDO** reconocidas en **(i)**.

(a) $y'' + 2\cdot y' + y = 0$;

(b) $y'' + 2\cdot y' + y = \text{sen } x$

(c) $x'' + x = t^2$;

(d) $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z} = \dfrac{-2mE}{h^2}.\psi$

(e) $y' - x.\,y = 0$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

(g) $3y + 2x = 4x$

(h) $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{-2mE}{h^2}.\psi$

(i) $y'' + \ln x \cdot y' = x^2$

(j) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{dx}$

(k) $y''' + 12\,y' = 0$

(m) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

2) Determinar cuál de las siguientes funciones es **solución** de la **EDO** que se indica en cada caso; cual no lo es. Justificar las respuestas.

a) $y'' = 4y$ → $f(x) = 5.e^{2x}$; $g(x) = 3$; $h(x) = 0$

b) $t.\,y' - t\,y^2 = y$ → $f(t) = \dfrac{-2t}{t^2-2}$; $g(t) = \dfrac{-2t}{t^2-1}$

c) $y'' + y = 0$ → $f(t) = C_1 \text{ sen } t$; $g(t) = C_2 \cos t$

d) $y'' + 2y' + y = 0$ → $f(x) = e^x$; $g(x) = e^{-x}$; $h(x) = x\,e^{-x}$

e) $y' - x\,y = 0$ → $f(x) = x.e^{x}$; $g(x) = e^{x^2}$; $h(x) = e^{x^2/2}$;

f) $y' + 3x^2 y = 6x^2$ → $f(x) = e^{-x^3}$; $g(x) = 2$; $h(x) = 2 + c.e^{-x^3}$

f₁) Identificar una solución de la *"homogénea asociada"*.

f₂) Identificar una solución *"particular"* de la EDO.

3) **(A)** Determinar las constantes C_1 y C_2 para que $y = C_1 \text{ sen } t + C_2 \cos t$, sea solución del Problema de Valores Iniciales **(Pvi)**:

$$y'' + y = 0; \quad y(0) = 1 \;;\quad y'(0) = 0$$

(B) Dada $y' - e^{x^2} = 0$ **(I)** , $y(5) = 0$ **(Pvi)**

a) V ó F, justificar respuesta: **(I)** es una EDO .

b) V ó F, justificar respuesta: $\int e^{x^2}dx$ es solución de **(I)**

c) V ó F, justificar respuesta: $F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$ es solución del **(Pvi)**

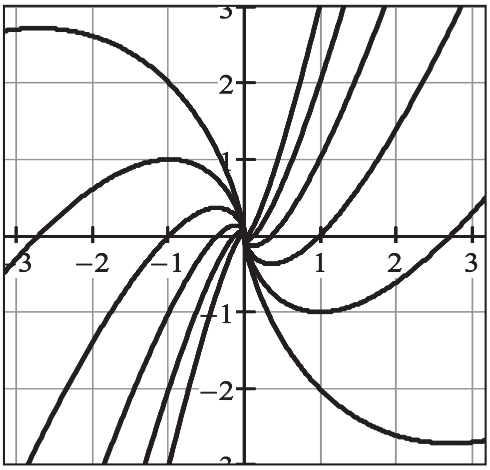
4) Dada $y' - \frac{1}{x} . y = 1;$

el gráfico muestra curvas solución correspondientes a dicha EDO.
Se pide:

a) dadas **f**(x) = **x (x-1)** y **g**(x) = **x. ln x,** analizar si son solución de la EDO. Si lo fueran, analizar si son solución de la EDO, $\forall x \in \mathbf{R}$

b) Identificar, entre todas las gráficas, la que corresponde a la (o las) soluciones halladas en el item **(a).**

c) Verificar que $\forall k \in \mathbf{R}$, **h**(x) **= (k + ln|x|). x** es solución de la EDO.
Luego, hallar **h** si se sabe que **h** es solución de la EDO y **P(-1; 1)**$\in$ **graf h.**



ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

(I) EDO - 1er Orden a "variables separables" (*v.s.*)

5) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales a variables separables:

a) $x' = \dfrac{t^3}{x^2}$

b) $x' \, x\sqrt{1-t^2} = t$

c) $x' = (x-1).(x-2)$

d) $\operatorname{tg} t . \cos x \, dt + \operatorname{tg} x \, dx = 0$

e) $(e^x + 1) \cos t \; dt + e^x \operatorname{sen} t \; dx = 0$

f) $y' + y = 0$

g) $y' - \cos x . y = 0$

h) $y = 2 + \int_1^x y(t).dt$.

6)

a) Establecer cuáles de las siguientes EDO son a ***v.s.*** y cuáles no.

I) $y' = 3x^2 (1+ y^2)$

II) $y' = \dfrac{y}{x+y}$

III) $x.y (y-1) dx - (1+ x^2) dy = 0$

IV) $(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) dx + \cos y. (x+1) dy = 0$

V) $y' - 2y = 5$

VI) $y' - 2y = 5x$

VII) $y' - 2xy = 0$

VIII) $y' - 2xy = 5$

b) Hallar la solución general para las EDO a ***v.s.*** detectadas en **(a)** y, de ser posible, dar la solución en forma explícita (con fórmula **y = f(x)** ó **x = f(y)** según el caso).

7) Resolver los siguientes **PVI** . Dar la función solución en su forma explícita (de ser posible) y graficar la curva solución:

a) $\begin{cases} x.\, x' = -t \\ x(0) = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x.\, x' = -t \\ x(0) = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1+u).dv - (1+v).du = 0 \\ v(3) = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (1+u).dv - (1+v).du = 0 \\ v(3) = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (1+u).dv - (1+v).du = 0 \\ u(-3) = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y^2 . y' - 2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

8) Todo **PVI** con EDO de 1er orden a ***v.s.*** y condición inicial de la forma
$y(x_o) = y_o$; una vez separada las variables, tendrá el siguiente aspecto:

$$S(y)\,dy = R(x)\,dx; \qquad y(x_o) = y_o \quad (I)$$

Si **R** es continua y no nula en un intervalo **I** tal que $x_o \in I$ **;** la solución de **(I)** puede obtenerse a partir de aplicar <u>Integrales Definidas</u> (en lugar de Indefinidas) a ambos miembros de la igualdad, y como sigue:

$$\int_{y_o}^{y} S(y)\,dy = \int_{x_o}^{x} R(x)\,dx$$

Resueltas las integrales tenemos, <u>directamente</u>, la <u>solución particular</u> buscada; o sea, la que verifica la condición inicial: $y(x_o) = y_o$ **.**

a) Comprobar la afirmación anterior resolviendo el ejercicio **7f** por el método de las "integrales definidas":

b) Resolver el siguiente PVI: $y' - e^{x^2} = 0; \quad y(x_o) = y_o$

1) Aplicando el método de las "integrales definidas"
2) Aplicando el método de las "integrales indefinidas".
3) ¿Qué método conviene? ¿Por qué?

9)

a) Hallar **C**; curva que pasa por **A**(1; -e) y tal que la "pendiente de la recta tangente" a **C** en cualquier punto **P**(x;y) $\in$ **C,** sea igual a la "ordenada" de **P**. Graficar **C,** verificar **B**(0; -1)$\in$ **C** y que en ese punto se cumple la condición que caracteriza a **C.**

b) Dos curvas que al cortarse forman un *"ángulo recto"* se dice que son *"ortogonales"* (en el punto de "corte"). Para **C** y **B** del ítem **(a),** se pide hallar **C*** tal que $C^* \cap C = \{B\}$; **C*** y **C** ortogonales en **B**.

* Equivalentemente, que si **t** y t^* son respectivamente las rectas tangentes **(**en **B)** a **C** y C*, entonces $t \perp t^*$.

* <u>Sugerencia</u>: recordar "$m_t \cdot m_{t^*} = -1 \Rightarrow t \perp t^*$" .

Graficar **C*** y **C**; comprobar que son *ortogonales.*

(II) EDO – Lineales de 1er Orden

10) Completar la siguiente oración: "una EDO Lineal de 1er Orden es una ecuación diferencial de la forma: ………………………………………"

a) Lo que distingue a las EDO entre sí y permite su clasificación en "tipos" de EDO (variables separables, lineales,..) es el método que usado para resolverlas. Si no es a variables separables (***v.s.***), existe un método genérico que, con sus variantes, se puede aplicar una vez detectado que la EDO no es a ***"v.s."***
Este método consiste en hacer un "***<u>cambio de variables</u>***" en la ecuación con el objeto de que, en las nuevas variables, esta ***<u>pase a ser a "v.s."</u>***
Para resolver <u>Lineales de 1er Orden</u> y <u>del tipo del ejercicio 6a-II</u>, se acude a este método. (no así para las Lineales de Orden n, con n > 1 o de otro tipo).

▶ **<u>Lineales de 1er Orden (en x;y; y´)</u>** →cambio variables: "$y = u_{(x)} \cdot v_{(x)}$".
▶ **<u>Homogéneas</u>** (6a-II) →cambio variables: "$y = x \cdot v_{(x)}$".

b)

b₁) Establecer cual de las EDO del ejercicio **6** es **Lineal de 1er Orden**.

b₂) Hallar la solución general de las Lineales de 1er Orden detectadas; hacer esto por medio del "cambio de variables" indicado.

b₃) Hallar la solución general de la EDO del ej. 6a-II (homogénea); hacer esto por medio del "cambio de variables" apropiado al caso.

c) Dado el PVI: $y' + P(x)\, y = 0; \quad y(x_o) = y_o$ (**P** continua en $I \,/\, x_o \in I$)

demostrar que $y_{(x)} = y_o\, e^{F(x)}$ con $F_{(x)} = \int_{x_o}^{x} (-P(x))\, dx$ es solución.

11) Resolver las siguientes EDO, con el método apropiado al caso.

a) $(1+x^2)\, dy - x\, y\, dx = 0$

b) $y' + 2 \,.\, y/x = x^3$

c) $(1+u).\, v\, du + (1-v)\, u\, dv = 0$

d) $(y^2 - xy)\, dx + x^2\, dy = 0$

e) $y' = \dfrac{x+y}{x}$

f) $x \,.\, dy = y.\, (1 - 3x\, \mathrm{sen}x).\, dx$

g) $x.\, y' - y = x^2 \,.\, \mathrm{sen}\, x$

h) $\mathrm{tg}\, x.\ \cos y. + y'\, \mathrm{tag}\, y = 0$

i) $(y^2 - 1)\, dx - (2y + x\, y)\, dx = 0$

j) $(1 - y).\, y.\, dx - x^2\, dy = 0$

k) $y' - y = e^{x}$

l) $y - x \,.\, y' = 1 + x^2\, y'$

m) $y' - \dfrac{x.y}{1+x^2} = x$

n) $x\,.y\,.\,y' = 1 - x^2$

o) $2y \cos y\, dy = y\, \mathrm{sen} y\, dx + \mathrm{sen} y\, dy$

PROBLEMAS Y APLICACIONES DE LAS EDO - 1er ORDEN

1) Sabiendo que f y g son soluciones de $y' + P(x)\, y = b(x)$; indicar **V** ó **F**, justificar:

a) "$h = f - g$ es solución de $y' + P(x)\, y = 0$"

b) "$p = k.\, f,\ k \in \mathbf{R}$ es solución de $y' + P(x)\, y = b(x)$".

2) Dada $g(x) = x.\, f(x)$, indicar **V ó F** (*justificar*):

a) si f es solución de $y' + P(x)\, y = 0$ entonces g es solución de $y' + P(x)\, y = f(x)$.

b) si f es solución de $y' + P(x)\, y = 0$ entonces $h(x) = g(x) + 2$ es solución de $y' + P(x)\, y = f(x) + 2$.

3) Dada $y' - x^2 y^2 + k\, x\, y = -\dfrac{2}{x^2}$; se pide:

a) **V ó F**, justificar: la EDO dada es una EDO Lineal de 1er Orden.

b) Hallar k de modo que $z(x) = \dfrac{2}{x}$ sea solución.

4) Sean **"y" y "V",** altura y volumen de agua en un tanque al instante "**t**". Si el agua se escapa por un orificio en el fondo de área "**a**", entonces la **Ley de Torricelli** establece que: **"**la razón de cambio de **V** en el tanque que se vacía, es proporcional a la raíz cuadrada de **y ".** La ecuación que modeliza este proceso es:

$$\frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{k}\sqrt{\mathbf{y}} \quad \text{con} \quad \mathbf{k = -\,a}\sqrt{\mathbf{2g}}\ ; \quad \mathbf{g =} \text{ aceleración gravedad } (\mathbf{g = 32} \text{ pies/seg}^2)$$

Para un tanque cilíndrico de **9** pies de altura, **2** pies de radio y con el orificio de salida circular y radio de **1** pulgada, se pide:

a) demostrar que **"y"** satisface el siguiente **Pvi**:

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \frac{-1}{72}\sqrt{\mathbf{y}} \quad ; \quad \mathbf{y}\,(0) = \mathbf{9} \quad (\text{considerar que } \mathbf{1\ pulgada} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\ \mathbf{pies})$$

b) Suponiendo que el tanque está lleno al instante en que comienza a perder agua, hallar **y = y(t)** , indicar el dominio natural de esta función y calcular el tiempo mínimo requerido para que quede completamente vacío.

5) La ecuación que describe la caída de un cuerpo de masa "m" en un medio resistente es: **m v´ + k v = m g ;** con **v** = velocidad de caída y **g =** aceleración gravedad

a) demostrar que si **x =** *posición* del cuerpo al instante t, **x(0) = 0** ; **v(0) = 0**

entonces $\mathbf{x}\,(t) = \dfrac{m.g}{k}.t - \dfrac{m^2.g}{k^2}\left(1 - e^{\frac{-k\,t}{m}}\right)$

b) La velocidad de caída tiende a uniformarse en un valor, ¿Cuál es?

6) La **Ley de Newton del calentamiento (enfriamiento)** establece que: "*la razón a la que se calienta (enfría) un cuerpo es <u>proporcional</u> a la <u>diferencia</u> entre la temperatura del cuerpo* (***T***) *y la del medio ambiente* (**M = cte**)*"*.

a) Escribir la EDO que modeliza lo expresado por la Ley de Newton. Clasificar la ecuación obtenida. Analizar el signo de la constante de proporcionalidad según el cuerpo se esté calentando o enfriando.

b) Resolver la EDO en forma genérica y hacer un bosquejo de las curvas solución para los casos en que la temperatura inicial, T_o , sea mayor, menor o igual **M.**

c) En un horno que se halla a 100ºC se introduce un cuerpo cuya (T_o) es de 20ºC. Si a la hora de haberlo puesto en el horno, su temperatura es de 60ºC y si hay que sacarlo cuando alcance los 80ºC, ¿Cuánto tiempo más hay que dejarlo en el horno?

7) Experimentalmente los psicólogos cognitivos han hallado la siguiente "ley del aprendizaje":

*" la tasa a la que una persona "promedio" puede memorizar un conjunto de **N** hechos es directamente proporcional al número de hechos que falten por memorizar".*

a) Si con "***y***" indicamos el nro de hechos memorizados en "***t***" minutos por una persona promedio, ¿cuál de las siguientes expresiones es la "traducción matemática" de la ley del aprendizaje?; ¿*por qué*?:

$$\frac{dy}{dt} = k\,y \ \ (y(0)= 0)\ ; \qquad \frac{dy}{dt} = k\,(N - y) \ \ (y(0)= N)\ ; \qquad \frac{dy}{dt} = k\,(N - y) \ \ (y(0)=0).$$

b) Pablo debe rendir el parcial de Física dentro de ***3 hs*** y todavía tiene que memorizar ***60 fórmulas***. Para ver si llega, toma el tiempo que le lleva memorizar ***10 fórmulas***, el cual es de ***30 minutos***. Pablo (*que desconoce la ley del aprendizaje*) hace cuentas y concluye que llega (*justo, pero llega*). ¿Qué cuentas hace?; ¿Qué conocida "regla" usa?

c) Según la *ley del aprendizaje* calcular: ***(i)*** cuantas fórmulas memorizará en **3 hs.;** ***(ii)*** tiempo para que le falte ***sólo una*** por memorizar (¿te parece *razonable* esta ley (*o pensas como Pablo*)? ; ¿porqué?).

8) Cierto rumor comenzó a extenderse un día por un pueblo de 1000 habitantes. Después de una semana 100 personas habían escuchado el rumor. Considerando que la razón de aumento del número de personas que han oído el rumor es *directamente* proporcional al de la que todavía no lo han oído y siendo ***x(t)*** la cantidad de personas que oyó el rumor a la semana ***t***; se pide:

a) Indicar cuál de los siguientes **PVI** modeliza esta situación:

$$\text{(I)} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,x \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,(1000 - x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,(x - 1000) \\ x(0) = 100 \end{cases}$$

b) Resolver el problema seleccionado.

c) hallar el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de la población haya escuchado el rumor.

9) DECAIMIENTO RADIACTIVO

Las sustancias radiactivas decaen por la emisión espontánea de radiación. Si con ***m*** se indica la ***masa restante*** al instante ***t*** a partir de una ***masa inicial*** m_o de la sustancia, a nivel experimental se encuentra que la *rapidez relativa* de decaimiento, $-\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{dm}{dt}$, es constante.

Se tiene así que la ecuación que modeliza el ***"decaimiento radiactivo"*** es:

$$\frac{dm}{dt} = k\,.\,m$$ ***(*** **¿**Qué signo tiene **"*k*" ? ;** ¿ porqué ? ***)***

Dicho de otra forma, se tiene que: "la rapidez con la que se desintegra una sustancia radiactiva es *directamente* proporcional a la masa presente".

a) Resolver el **Pvi** relativo al ***"decaimiento radiactivo"***; graficar la función obtenida, verificar que la misma describe el proceso de decaimiento.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = k\,.\,m \\ m(0) = m_o \end{cases}$$

b) Los físicos expresan la rapidez de decaimiento en términos de **"vida media",** o sea, del "*tiempo requerido para que decaiga la mitad de la cantidad de sustancia presente, <u>cualquiera que esta sea</u>*". Se indica como $\mathbf{t_{1/2}}$. Verifica: $m\,(t_{1/2}) = \frac{1}{2}\,m_o$

Indicar V ó F (justificar): en este caso se tiene que:

(i) el $\mathbf{t_{1/2}}$ es independiente de m_o**;** **(ii)** $k = \dfrac{-\ln 2}{t_{1/2}}$

10) Se sabe que la vida media del **radio 226** es de **1590 años.** Se quiere hallar:

a) una fórmula para calcular la masa de **radio 226** que queda después de **t** años para una muestra de **100 mg** de **radio 226 .**

b) la masa después de **1000 años**.

c) la cantidad de años requerida para que la masa inicial se reduzca a **30 mg.**

11) En **3 días,** una muestra de **radón 222** decayó hasta el **58%** de su masa original.

a) ¿cuál es la vida media de este elemento**?**

b) ¿cuándo tiempo se requiere para que la masa decaiga hasta el **10%** de m_o**?**

c) **V ó F :** la rapidez de decaimiento es mayor el **1er** día que el **3ro.**

12) Sabiendo que ^{10}**Sr** se descompone a una velocidad proporcional a su masa en cada instante "t", que la masa inicial es de m_0 **grs**. y que tarda **25 años** en descomponerse el **50%** de la misma, se pide:

a) Plantear la EDO que modeliza el proceso, resolverla y hallar la función que da la masa remanente en cada instante "t" . Graficar dicha función .

b) Hallar el tiempo "t" requerido para que se descomponga el 75% de la masa inicial. Marcar este dato en el gráfico anterior

c) Indicar V ó F justificando:

i) ***"la función*** $f(t) = m_0\,(2^{-t/25})$ ***es solución de la ecuación diferencial"***

ii) ***"la rapidez de descomposición aumenta al aumentar la masa inicial"***.

13) Se aisló **1 gr.** de un elemento desconocido y se observó que el mismo se desintegraba a una velocidad proporcional al cuadrado de la cantidad presente. Se pide:

a) Analizar si este elemento verifica las generales de la ley para los elementos radiactivos. Luego, tomando **"x =** masa restante al instante **t"** (en años), plantear el **PVI** que modeliza el proceso de desintegración del mismo. Resolverlo y hallar la función que da **x = x(t).**

b) Hallar la cte. de desintegración si se observa que al año, restan **0.5 gr.** Graficar la función. Analizar si el tiempo vida media es independiente de la masa inicial.

14) En una reacción química se define como "***velocidad de reacción***", ***v*** , a la variación (en este caso *disminución*) en la unidad de tiempo del reactivo del caso.

O sea, si **C** = concentración del reactivo al instante **t** → $v = \dfrac{dC}{dt}$.

La EDO que modeliza la reacción depende del ***"orden de la reacción"*** **(n)**.

Para reacciones de un solo componente el **PVI** es: $\dfrac{dC}{dt} = k \cdot C^n ;\quad C(0) = C_o$

a) Discutir el signo de "***k***".

b) Resolver el **PVI** para **n = 0; n = 1; n = 2.**

En cada caso graficar las funciones solución; hallar una expresión para el cálculo del $t_{1/2}$ (tiempo de vida medio) y discutir su dependencia (o no) de C_o.

15) Para una sustancia que sigue una cinética de 1er orden, si C = *concentración* de la sustancia al instante **t** ([**t**]= min.), se pide:

a) obtener C en función del tiempo , si se sabe que la concentración inicial de la sustancia es de 10 mol/l y que a los 30 minutos se descompuso el 50 % de la cantidad inicial.

b) responder (sin calcular): el 90 % de la cantidad inicial, ¿tarda más o menos de 30 min. en descomponerse? Luego, calcular el tiempo requerido para que se descomponga el 90% y contrastar el resultado con la respuesta previa.

c) Graficar $C = C$ (t) según la ley obtenida; marcar los puntos obtenidos en los ítems anteriores; ¿existe "**t**" para el cual la sustancia se descompone toda?

16) Si una molécula del producto **C** se forma a partir de una molécula del reactivo **A** y una del reactivo **B**; si las concentraciones de **A** y **B** son iguales, **[A] =[B]** = **a** moles/ls e indicamos con **x** a la concentración de **C** en función del tiempo (**x = [C]**) la siguiente ecuación modeliza el proceso de formación de **C** a partir de **A** y **B.**

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a - x)^2 \quad ; \quad x(0) = 0 \quad (\text{con } k > 0)$$

a) A partir de esta *ecuación* completar las siguientes afirmaciones:

i) **x** aumenta con el paso del tiempo pues ....

ii) la velocidad de la reacción decrece pues....................................

b) Hallar **x = x(t)** ; verificar que $x(t) = \dfrac{a^2.k.t}{akt + 1}$;

c) Graficar la concentración en función del tiempo, establecer si se alcanza una concentración máxima (según el modelo). Hallar (si existe) el instante donde la velocidad de la reacción es máxima (dominio!!); calcular esta velocidad máxima.

d) ¿Qué sucede con la velocidad de reacción cuando t $\rightarrow \infty$? ¿Qué indica este resultado en términos *prácticos*?

17) Si un compuesto **A** se transforma en **B**, a través de una reacción *reversible*, entonces

$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B$ con k_1 y k_2 ctes. (*positivas*) de ***velocidad de reacción*** de c/ proceso.

Si llamamos $\rightarrow$ a : concentración del compuesto **A** en cada instante **t** ($a = a(t)$)

b : concentración del compuesto **B** en cada instante **t** ($b = b(t)$)

$a_0 = a(0)$; concentración inicial del compuesto **A**.

Experimentalmente se comprueba que $a' = k_2\, b - k_1 a$ y que $a(t) + b(t) = a_0$; $\forall t$

Se pide:

a) Obtener una ecuación diferencial **con una única incógnita, por ejemplo "*a*".** Indicar que tipo de ecuación es.

b) obtener la ley de a si se sabe que $a_0 = 3$ mol/l. y $k_1 = 2\,k_2$; luego, obtener la ley de b. Graficar ambas en un mismo sistema.

c) ¿ En algún instante $a(t) = b(t)$?. Si, ¿Cuál?. No, ¿porqué?.

d) ¿Qué pasa con las concentraciones de **A** y **B** para tiempos muy grandes? ; ¿es razonable que pase esto?; ¿con qué dato del problema tendría que ver el comportamiento observado en esta reacción respecto de las concentraciones de **A** y **B**?

PROBLEMAS DE MEZCLA

Vamos a considerar ahora problemas relacionados con mezclas (o soluciones). En este tipo de problemas se considera una solución (S) que fluye hacia un recipiente con una cierta rapidez y manteniéndose uniforme la solución dentro del mismo mediante agitación. Simultáneamente, la solución uniforme estará saliendo del recipiente para pasar a otro donde se guarda o, según el proceso puede seguir fluyendo hacia un tercer recipiente. El objetivo de este tipo de problemas es determinar la cantidad de soluto (**x**) presente en la solución dentro del tanque al instante t .

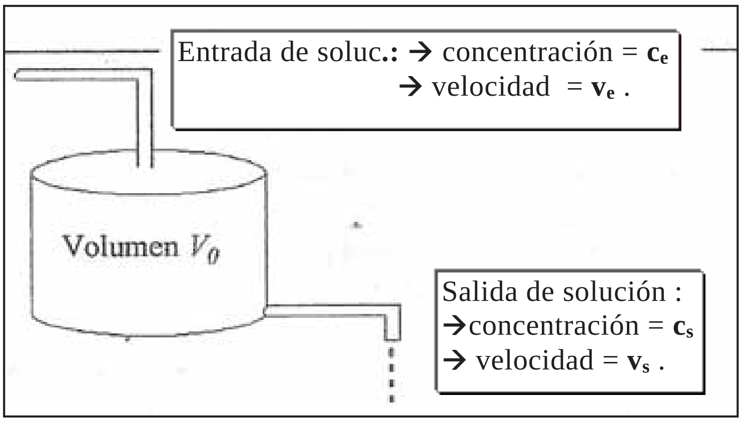
Si **x** = cantidad de soluto disuelta en una solución, al instante **t ;** **x** = **x**(t) ; [**x**]= gs; entonces la **Ecuación Básica** para una solución contenida en un tanque que inicialmente tiene $\mathbf{V_o}$ **ls**. de solución es:

$$\frac{dx}{dt} = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}$$

Equivalentemente:

$$\frac{dx}{dt} = c_e . v_e - c_s . v_s$$

con $$c_s = \frac{x(t)}{V_o + (v_e - v_s).\, t}$$



La *solución* que ***entra*** lo hace con una *rapidez constante* (**v_e** ls./min) y con una *concentración de soluto cte* (**c_e** g./ls). La que *sale*, también lo hace a *rapidez cte* (**v_s** ls./min).

18) En un tanque hay **100 ls**. de solución con **200 grs** de sal disueltos en ella. Como deseo ***diluir*** la solución comienzo a verter **agua** en el tanque a una rapidez de **5** ls./min a la vez que, para apurar el proceso, dejo salir solución a una rapidez de **3** ls./min.

a) Mi migo Pablo cree que si no estoy atenta puedo llegar a quedarme con "solo agua". Decide calcular el tiempo en que no quedaría sal en la solución y razona así: "como la concentración de la solución es de **2** grs/litro y la solución sale a razón de **3** ls/min esto implica que "la sal" sale a razón de **6** grs./min. que, por lo tanto, en poco más de 30 min. no hay más sal en la solución". ¿Qué regla aplica Pablo para calcular el tiempo en que, según él, no queda sal en la solución?, ¿por qué?

b) ***Resolver la ecuación básica*** y dar ***x = x(t) .***
Mostar que ***x*** tiende a cero con el tiempo (o sea, que la intuición de Pablo funcionó bastante bien); pero que a los **50** min. todavía hay sal en la solución (o sea, que la "regla de tres" de la cual es fanático Pablo no es aplicable en este caso.)

19) Si **V =** ***volumen de solución en el tanque*;** entonces **V =V**(t) con **V**(t) **=** $\mathbf{V_o}+(v_e-v_s)$**.t.**
Graficar en un mismo sistema **"V-t"** la función **V = V**(t) para:

a₁) $v_e < v_s$; **a₂)** $v_e = v_s$; **a₃)** $v_e > v_s$

Explicar que pasa en cada caso con la cantidad de solución en el tanque.

20) Si $v_e = v_s = 3$; $V_o = 6$ y $x(0) = x_o = 60$.

a) Hallar, resolviendo la ecuación básica, una expresión general para $x = x(t)$.

b) Verificar que $x(t) = c_e.V_o + [x_o - c_eV_o].e^{-(v/V_o).t}$.

c) Obtener $c_s = \frac{x(t)}{V(t)}$ para $x(t)$ hallada en (**b**); graficar c_s para c_e igual, mayor o menor que $c_o = x_o/V_o$. Explicar que pasa con la concentración de salida en cada caso. ¿Si se desea que la solución que entra no modifique la concentración que existe en el tanque al momento de comenzar el proceso, quien debe ser c_e?

21)

a) Hallar y graficar $x = x(t)$ si $c_e = 2$ g/l ; $v_e = 2$ l/m ; $v_s = 4$ l/m ; $V_o = 12$ ls. y $x(0) = x_o = 60$ gs. Explicar acorde al gráfico, cómo se desarrolla el proceso en este caso.

b) Hallar y graficar $x = x(t)$ si $c_e = 2$ g/l ; $v_e = 2$ l/m ; $v_s = 2$ l/m ; $V_o = 12$ ls. y $x(0) = x_o = 60$ gs. Explicar acorde al gráfico cómo se desarrolla el proceso en este caso.

CRECIMIENTO DE POBLACIONES

22) Un modelo de crecimiento de poblaciones propone que éstas crecen con una velocidad directamente proporcional a su tamaño. Se pide:

a) Plantear una ecuación que describa esta hipótesis para una población **P,** de moscas de la fruta.

b) Si se sabe que partiendo de **100** moscas, al cabo de ***cuatro días*** hay **900**; encontrar la ley de **f,** función que permite calcular la cantidad de moscas en el tiempo. Graficarla

c) Calcular la cantidad de moscas al cabo de: **2, 4, 6, 8 días** ; indicar que caracteriza el crecimiento de esta población: "se (*duplica, triplica, cuadruplica* ……) cada (*uno, dos, tres, cuatro….*) días".

d) Comprobar que **f** se puede escribir como $f(t) = 100\,(3^{t/2})$. Usando esta forma de la función, calcular **f** (t+2), compararla con **f**(t) y cooroborar que la siguiente afirmación es **V** ó **F**: ***"el número de moscas se triplica cada dos días".***

23) Un cultivo de levaduras crece a una velocidad directamente proporcional al número de células presentes en cada instante "t". Sabiendo que el cultivo se inicia con una población de 20 células y que al cabo de 12 horas hay 80 células, se pide:

a) Plantear la ecuación correspondiente y hallar la función que determina el número de levaduras en cada instante "t". Graficarla.

b) Indicar V ó F, justificar:

"$f(t) = 20.2^{t/6}$ permite calcular el número de levaduras en cada instante t".

"el número de levadura se duplica cada 6 días".

24) Sea la ecuación diferencial logística: $\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$ que modela el crecimiento de una población cerrada que tiene P individuos en el tiempo t; k y M constantes positivas. Sin resolverla responda:

a) ¿Para qué valores de P la población crece?

b) ¿Para qué valores de P la población disminuye?

c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? (Soluciones constantes).

25) La población de una ciudad que en el año 2000 tenía 100 mil habitantes responde la ecuación diferencial logística (vea problema anterior), con $k = 0.0001$ y $M = 200$ mil.

a) ¿Qué puede decir acerca del tamaño de la población actual? (¿aumentó o disminuyó?). Justifique.

b) ¿Llegará a triplicarse en algún momento? Justificar.

26) La razón de cambio de una población (**P**) en el tiempo (t) está dada por :

$$\mathbf{P'} = \lambda\, \mathbf{P} - \mathbf{m}, \quad \text{con} \quad \lambda = \alpha - \beta$$

Siendo α la tasa de nacimientos , β la tasa de mortalidad y **m** el número de habitantes que emigran cada año. El tiempo (t) se mide en años.

Si se estudia una población y se determina que cada año emigran 10 habitantes, la tasa de nacimientos es 0.5 anual y la tasa de mortalidad es 0.25 anual .

a) Obtener P = P(t) , si la población inicial es de 100 habitantes. Graficar

b) Indicar V o F y justificar**:** **(i)** "La población estudiada tiende a extinguirse"
(ii) " La población crece durante el primer año"

27) En un lago, una especie de peces poco comunes es atacada por una enfermedad. Para estudiar el fenómeno acuden al mismo un equipo de biólogos los cuales, al momento de su llegada, registran que la población de peces (***P***) es de **900** especímenes. Registros posteriores les permiten concluir que la ecuación $\frac{dP}{dt} = -3\sqrt{P}$ es un buen modelo matemático del fenómeno (***t*** en semanas). Se pide,

a) expresar en el lenguaje coloquial que observan los biólogos que les permite concluir este modelo (hacer esto, *sin resolver la ecuación !!!!*).

b) hallar la ***función*** que permite determinar la cantidad de peces en cada instante ***t***.

c) ¿hay peces sobrevivientes a las 10 semanas? ; ¿y a las 24? ¿Se extinguen en algún momento?

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de ORDEN "n"

1)

a) Dada $\mathbf{a_0}(x)\, \mathbf{y}^{(n)} + \mathbf{a_1}(x)\, \mathbf{y}^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{a_n}(x)\, \mathbf{y} = \mathbf{0}$; con $\mathbf{a_i}(x)$ continuas en [a; b], $\mathbf{a_0}(x) \neq \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in [a;b]$, clasificar esta ecuación y enunciar el Teorema que "fundamenta" el proceso a seguir para hallar la solución de la misma.

b) Determinar si los conjuntos de funciones que se dan a continuación constituyen **Base de Soluciones** de la ecuación homogénea que se indica en cada caso. En caso que lo sea dar la solución general de la ecuación correspondiente.

a) $\mathbf{B = \{ x ;\ e^{x} \}}$; **EDOLH→** $\mathbf{(x-1)\, y'' - x\, y' + y = 0}$
b) $\mathbf{B = \{ e^{-x} ;\ e^{2x} ;\ e^{3x} \}}$; **EDOLH→** $\mathbf{y''' - y'' + y' + y = 0}$
c) $\mathbf{B = \{ e^{2x} ;\ e^{3x} \}}$; **EDOLH→** $\mathbf{x^2\, y'' - 4\, x\, y' + 6y = 0}$
d) $\mathbf{B = \{ 3\, x^3 ;\ 12\, x^3 \}}$; **EDOLH→** $\mathbf{x^2\, y'' - 4\, x\, y' + 6y = 0}$
e) $\mathbf{B = \{ x^2 ;\ x^3 \}}$; **EDOLH→** $\mathbf{x^2\, y'' - 4\, x\, y' + 6y = 0}$
f) $\mathbf{B = \{ e^{x} ;\ sen\, x ;\ cos\, x \}}$; **EDOLH→** $\mathbf{y''' - y'' + y' - y = 0}$
g) $\mathbf{B = \{1 ;\ x ;\ x^2 ;\ e^{2x} ;\ e^{-2x} \}}$; **EDOLH→** $\mathbf{y^{(5)} - 4\, y^{(3)} = 0}$

c) Dada $\mathbf{x^2\, y'' - x\, y' - 3\, y = 0}$; hallar, si existe, $\mathbf{n} \in \mathbf{R}$ tal que x^{n} sea solución. Si obtiene más de una solución, investigar si las mismas constituyen **Base de Soluciones**. Si así fuera dar la solución general de esta EDO.

2) Dada $y'' - \frac{2x+1}{x} y' + \frac{x+1}{x} y = -3x$ se pide:

a) **V ó F** , justificar: " la ecuación es una EDO Lineal- Orden 2- a Coeficientes Ctes".

b) analizar si alguna de las siguientes funciones:

$y_1 = e^x$; $y_2 = e^{2x}$; $y_3 = x^2 e^x$; es solución de la homogénea asociada.

c) dar la solución general de la EDOL *no homogénea*. (Justificar enunciando el o los teoremas que validan su respuesta.)

3) Dada $2x^2 y'' + 3x y' - y = 0$;

a) clasificar esta ecuación diferencial.

b) V ó F, justificar: "las soluciones de esta **EDOL** son de la forma e^{rx} con $r \in R$"

c) Analizar si $y_1 = x^{1/2}$; $y_2 = x^{-1}$ e $y_3 = 0$ son soluciones de la **EDOL.**

d) Dar la solución general y luego *dos* soluciones particulares. (justificar)

4) Dada la ecuación $y'' - \frac{x+1}{x} y' + \frac{1}{x} y = e^{2x}(1 - \frac{1}{x})$; indicar **V ó F**, justificar:

a) e^x es solución de la homogénea asociada.

b) si $\{ e^x ; x \}$ es **l. i.** entonces $y = C_1 e^x + C_2 x$ es la solución general de la homogénea asociada.

c) $y = x + 1$ es una solución particular de la no homogénea.

d) $y = -x^2 + x$ es una solución particular de la no homogénea.

e) $y = C_1 e^x + C_2 (x+1) + x - x^2$ es solución general de la no homogénea.

5) Si f y g son solución de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$;

indicar **V ó F**, justificar (si usa un teorema o propiedad, enunciarlo):

a) $h_1 = 3f$ es <u>solución</u> de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$;

b) $h_2 = f + g$ es <u>solución</u> de $x^2 y'' + 2x y' - 6y = 0$.

6) Indicar **V ó F**, justificar:

a) $h_1(x) = 1$ y $h_2(x) = \sqrt{x}$ son <u>solución</u> de $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$;

b) $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ es <u>solución</u> de $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.

(en caso de ser **F**, analizar si este hecho contradice el teorema del **ej. 5**)

7) Dada $y'' + 3y' + 2y = b(x)$; se pide:

a) dada $y = e^{rx}$ calcular su 1er y 2da derivada, reemplazar en la ecuación y hallar, si existe, $r \in R$ tal que e^{rx} sea solución de la homogénea asociada"

b) **V ó F** , justificar: "si $b(x) = e^{2x}$; existe $A \in R$ tal que Ae^{2x} es solución particular"

c) **V ó F**, justificar: "si $b(x) = e^{-2x}$; existe $A \in R$ tal que Ae^{-2x} es solución particular"

d) **V ó F**, justificar: "si $b(x) = e^{kx}$ cualquiera sea $k \in R$, siempre existe $A \in R$ tal que $A e^{kx}$ es solución particular".

8) Dada $y'' = b(x)$; se pide:

a) **V ó F**, justificar: "existe $r \in R$ tal que e^{rx} es solución de la homogénea asociada".

b) **V ó F**, justificar: "si $b(x) = 12x^2$; existe $A, B, C \in R$ tal que $Ax^2 + Bx + C$ es solución particular".

c) **V ó F**, justificar: "si $b(x) = x^2$; existe $A, B, C \in R$ tal que $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$ es solución particular".

9) Dada $y'' + b\,y' + c\,y = p(x)$ $(b, c \in R)$, se pide:

a) <u>deducir</u> condiciones sobre **b** y **c** para que la solución general de la homogénea asociada sea una combinación lineal de <u>*funciones exponenciales*</u>. (Justificar)

b) con **b** y **c** del item **(a)**, <u>demostrar</u> que el siguiente problema de valores iniciales:
$y'' + b\,y' + c\,y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$, tiene como única solución la función nula.

c) **V ó F** "si r_1 y r_2 (soluciones ecuación característica) son reales distintas y negativas y **f** solución de la homogénea entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$". (Justificar)

d) **V ó F** " si r_1 y r_2 (soluciones ecuación característica) son reales distintas y negativas, $p(x) = e^{r_1 . x}$ e y_g la solución general entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} y_g(x) \neq 0$".

(Justificar.)

10)

a) Escribir una **EDOL-homogénea- orden 2**, cuya solución general sea:
$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ (verificar su respuesta)

b) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:
$y_g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 7e^{x}$

c) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:
$y_g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 3x e^{2x}$ (verificar su respuesta)

d) Escribir una **EDOL - orden 2**, cuya solución general sea:
$y_g(x) = C_1 e^{x} + C_2 x . e^{x} + 5x^2 e^{x}$ (verificar su respuesta)

11)

A) Si f y g son solución de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = \operatorname{sen} x$, y k es una solución de la *homogénea asociada* a esta EDO; indicar **V ó F**, justificar:

a) $h_1 = 3f$ es <u>*solución*</u> de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = \operatorname{sen} x$;
b) $h_2 = f - g$ es <u>*solución*</u> de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = 0$;
c) $h_3 = f + g$ es <u>*solución*</u> de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = \operatorname{sen} x$
d) $h_4 = 3k$ es <u>*solución particular*</u> de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = 0$
e) $h_5 = f + k$ es <u>*solución particular*</u> de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = \operatorname{sen} x$

B) **V ó F**, justificar: "si p es solución de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = \operatorname{sen} x$ y q es solución de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = \cos x$; entonces $p + q$ es solución de $x^2 y'' + 2x\,y' - 6y = \operatorname{sen} x + \cos x$ " .

C) **V ó F**, justificar: "el resultado anterior se puede "*generalizar*"; o sea, extender al caso de una EDOL de la forma: $a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = b_1(x) + b_2(x)$".

D) V ó F, justificar: **“**si $\boldsymbol{u + v}$ es solución de $\mathbf{x^2\, y'' + 2\,x\,y' - 6y = sen\,x + cos\,x}$ entonces, $\boldsymbol{u}$ es solución de $\mathbf{x^2\, y'' + 2\,x\,y' - 6y = sen\,x}$ **;** y $\boldsymbol{v}$ es solución de $\mathbf{x^2\, y'' + 2\,x\,y' - 6y = cos\,x}$**”.**

12) Resolver las EDO – Homogéneas y los PVI que se indican a continuación:

a) $y'' - y' - 2y = 0$ **b)** $y'' - 2y' + 5y = 0$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0$ **d)** $y'' + y = 0$

e) $y'' + y' = 0$ **f)** $x'' - 4\,x = 0$

g) $\begin{cases} y'' - 8y' - 16y = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2}; y'(0) = -1/3 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(\sqrt{2}\,\pi) = 0; y'(\sqrt{2}\,\pi) = 1/2 \end{cases}$

13)

a) Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea $y''+ b\,y' + c\,y = f(x)$ y sea y_h la solución general de su ecuación homogénea asociada. Demuestre que $y = y_h + y_p$ es solución de la ecuación no homogénea.

b) Dada una ecuación diferencial no homogénea y una solución particular de la misma, verifique esta última, halle la solución general de la ecuación homogénea asociada y escriba la solución general de la ecuación no homogénea.

b₁) $y'' - 4\,y = -8\,sen(2x)$, $y_p = sen\,(2x) + 5e^{2x}$
b₂) $y''+ 6\,y' + 9\,y = 4e^{-3x}$, $y_p = 2x^2\,e^{-3x}$
b₃) $y''- 2\,y' + 2\,y = 2x$, $y_p = x + 1 - e^{3x}\cos(x)$
b₄) $y''+ 3\,y' = 6x + 5$, $y_p = x^2 + x$

14) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas de 2º orden:

a) $y'' + 4\,y' + 8y = x^2$ **b)** $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$

c) $y'' + 4y' = 2\,sen(x) + cos(2x)$ **d)** $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 2x$

e) $y'' - 2y' - 2y = e^{3x} + x$ **f)** $y'' - y' - 2y = 5$

13) $y'' + y' = 3 + e^{4x}$ **h)** $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$

i) $y'' + 16y = x^2 + x$ **j)** $y'' + 2y' + y = (x^2+1)\,e^x$

k) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - 10sen(x)$ **l)** $y'' - 2y' = e^t\,sen(t)$

m) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = x + 3 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ **n)** $\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^x + \cos(x) \\ y(0) = 1; y'(0) = 2 \end{cases}$

15) Proponga una solución particular con coeficientes indeterminados, halle dichos coeficientes y encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 4y' = 3x^3$

b) $y'' - y' - 6y = 2sen(3x)$

c) $y'' + y = cos(x)$

d) $y'' - 7y' = -7 + 6x - 21x^2 + 7e^{7x}$

e) $y'' + 2y' - 3y = 1 + x\,e^x$

16)

a) Hallar los valores de α y β para los cuales $\mathbf{b(x) = x \cdot e^{x}}$ es solución de:

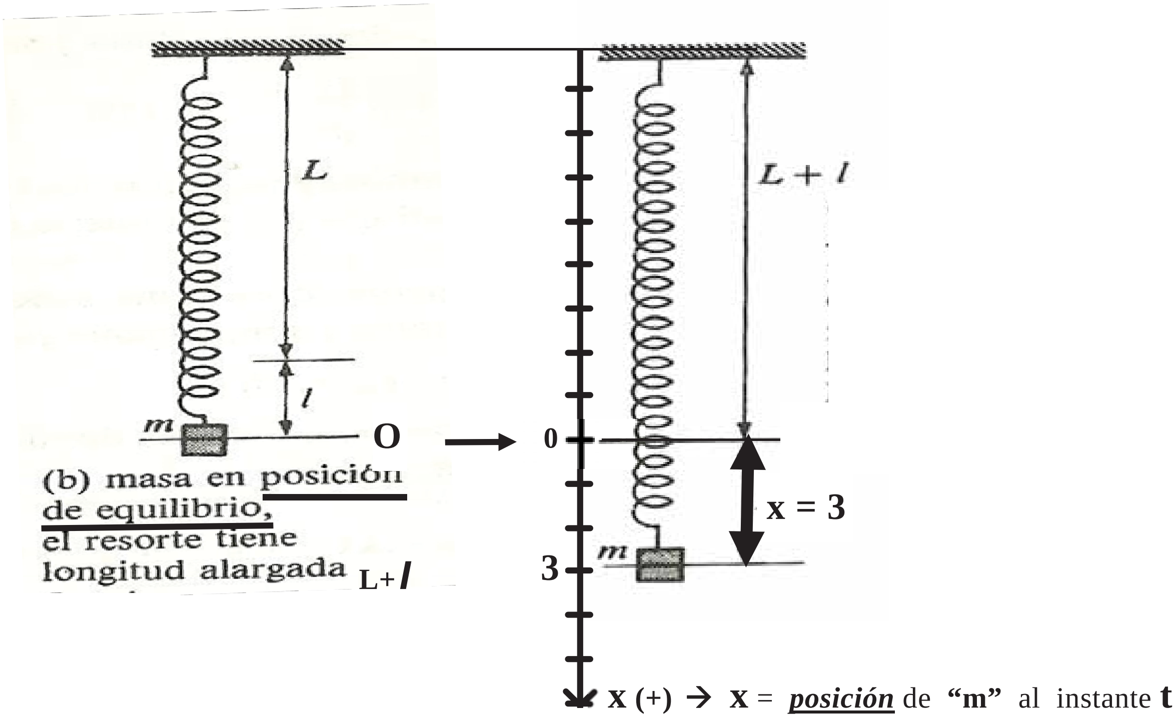
$$\mathbf{y'' + \alpha \cdot y' + 3y = \beta e^{x}}$$

b) Con los valores de α y β hallados, obtener la solución general de la EDOL.

APLICACIONES DE LAS EDO – LINEALES- ORDEN "2" a CC

▸ VIBRACIONES DE UNA MASA EN UN RESORTE.

Problema Básico: Un resorte helicoidal está suspendido verticalmente de un punto fijo en el techo. Una masa (**m**) está unida a su extremo inferior. Se supone que el resorte tiene una longitud **L** (no estirado) y que al colgar la masa se estira una cantidad ***l*** ; o sea, que la longitud del resorte, *en reposo*, es **L+ *l*.** En estas condiciones, con la masa a **L+*l*** (cm) del techo decimos que la misma se encuentra en su *posición de equilibrio*.
El sistema se pone en movimiento forzando la masa a abandonar dicha posición.
El objetivo es determinar el movimiento resultante, es decir las "*vibraciones*" que se introducen en el sistema al "*perturbarlo*" (amplitud, frecuencia, amortiguamiento…)
A tal fin se introduce un *sistema de referencia* a lo largo de la línea del resorte, con el *sentido positivo* (+) hacia abajo y el *origen*, **O**, *en la posición de equilibrio.*
Con **x** se indica *la posición de la masa* a partir de **O** y a lo largo de ese eje. Así construido el sistema de referencia, **x** puede ser ***positiva***, ***cero*** o ***negativa*** según la masa esté por ***debajo***, ***en***, o por ***arriba***, de su ***posición de equilibrio*** **(x = 0)** .



Finalmente, el problema es determinar la **función de posición, x= x(t)**
Considerando las fuerzas que actúan sobre el sistema y acudiendo a leyes de la Física: **2da de Newton** y **Ley de Hooke** se obtiene la **EDO** que permite hallar **"x= x(t)" :**

$$\mathbf{m \cdot x'' + \mathit{a}\, x' + k\, x = F(t)}$$

k = cte del resorte (Ley de Hooke). (**k** > **0**)
a = cte de amortiguamiento debida a la *fuerza resistiva*
del medio (puede ser o no despreciable. (***a*** ≥ **0**)
F = cualquier fuerza externa que actúe sobre el

Según a y **F** sean o no nulas, se tienen los siguientes casos:

(I) <u>Movimiento Libre, no Amortiguado</u>:

$$\mathbf{m \,.\, x'' + k\,x = 0}$$

F(t) = **0** , $\forall$**t** (no actúan fuerzas externas)
a = **0** (resistividad despreciable)

(II) <u>Movimiento Libre, Amortiguado</u>:

$$\mathbf{m \,.\, x'' + \mathit{a}\, x' + k\,x = 0}$$

F(t) = **0** , $\forall$**t** (no actúan fuerzas externas)
$a \neq$ **0** (la resistividad no es despreciable)

(II) <u>Movimiento Forzado</u>:

$$\mathbf{m \,.\, x'' + \mathit{a}\, x' + k\,x = F(t)}$$

Actúan fuerzas externas.
La resistividad puede o no ser despreciable.

1.- <u>Movimiento Libre no Amortiguado</u>: $\mathbf{m \,.\, x'' + k\,x = 0}$

Simplificamos la EDO para obtener la *ecuación característica* de este movimiento:

$$\mathbf{m.x'' + k\,x = 0} \xrightarrow[\text{por "m"}]{\text{dividir}} \mathbf{x'' + \frac{k}{m}\,x = 0} \xrightarrow[k/m\,=\,\lambda^2]{[\,k/m\,]>0} \boxed{\mathbf{x'' + \lambda^2 x = 0}}$$

Luego, el correspondiente **Pvi** : $\begin{cases} \mathbf{x'' + \lambda^2 x = 0} \\ \mathbf{x(0) = x_o} \\ \mathbf{x'(0) = v_o} \end{cases}$

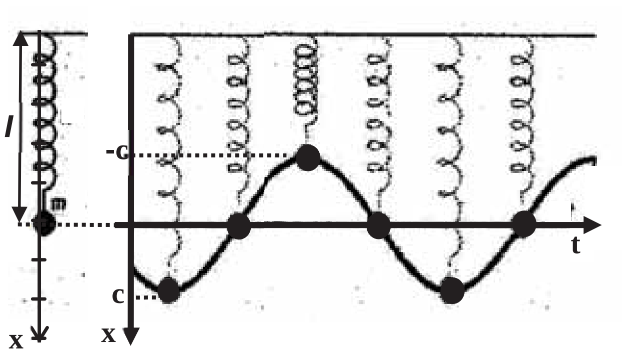
Se pide demostrar que:

a) la solución general es: **x**(t) = **A sen (λ t) + B cos (λ t)**

b) la solución del **Pvi** es: **x**(t) = $\left[\frac{v_0}{\lambda}\right]$ **sen (λ t) + [x_o] cos (λ t)** con $[\lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}\,]$

c) $\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}\ \mathbf{\mathit{cos}}\ (\lambda t + \alpha)}$ con $\mathbf{c} = \sqrt{A^2 + B^2}$; **tg** α = **-** $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ (α áng. de fase)

<u>Conclusión</u>:
El movimiento libre no amortiguado es un ***<u>Movimiento Armónico Simple</u>*** (MAS). Un movimiento periódico donde la masa oscila hacia arriba y abajo entre **- c** y **c**. **|c |** (la <u>amplitud</u> de la sinusoide) da el **<u>desplazamiento máximo</u>** de la masa a partir de su posición de equilibrio.



d) V ó F, justificar: **(i)** El período $\mathbf{p} = \mathbf{2\pi.}\sqrt{\frac{m}{k}}$

(ii) El "desplazamiento máximo" se da para $\mathbf{t^*} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,(\,n\pi - \alpha\,)$ (marcar en el gráfico algunos **t*** y el desplazamiento máximo).

2.- Sea el caso de un cuerpo de 0,2 kg de masa que pende de un resorte de *constante elástica* $k = 20\frac{N}{m}$ y oscila armónicamente. En el instante $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio con velocidad $v = 1$ m/seg.

a) Plantear el Pvi. correspondiente a este movimiento.

b) Hallar la ley de la posición de la masa en función del tiempo.

c) Dar el período y el "desplazamiento máximo" del caso.

d) Graficar el movimiento en un sistema "x-t". (tomar x(+) hacia arriba) Marcar t_1 instante donde pasa por la posición de equilibrio y t_2 instante donde la masa alcanza su desplazamiento máximo.

e) Hallar velocidad y aceleración de la masa en t_1 y t_2 del item anterior.

3.- Sea el caso de un cuerpo que pende de un resorte de constante elástica $\boldsymbol{k} = \mathbf{16}$.

y donde el **Pvi** correspondiente al movimiento es: $\begin{cases} \frac{1}{4}x'' + 16\,x = 0 \\ x(0) = 0.25 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

V ó F, justificar: **(a)** se trata de un movimiento armónico simple (MAS)

(b) el cuerpo se empuja hacia abajo y luego se suelta.

(c) la posición del cuerpo en cada instante **t** viene dada por:

$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{8}\,\mathbf{sen}\,(8\,t) + \frac{1}{4}\cos\,(8\,t)$

(d) la posición del cuerpo en cada instante **t** viene dada por :

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}\,\boldsymbol{cos}\,(8t + \alpha)$ con $\mathbf{c} = \sqrt{5}/8$; $\alpha = \text{arc tag}(-1/2)$.

4.- **<u>Movimiento Libre Amortiguado</u>**: $\mathbf{m.\,x'' + \boldsymbol{a}\,x' + k\,x = 0}$ $(\boldsymbol{a} > 0\ ;\ \mathbf{k} > 0)$

Consideramos el siguiente caso:

$\mathbf{x'' + 2\boldsymbol{b}\,x' + \boldsymbol{b}^2\,x = 0}$; $\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}$; $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{B}$ $(\boldsymbol{b} > 0)$

a) Demostrar que el desplazamiento está dado por: $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{bA}).\mathbf{t}\,].\mathbf{e}^{-\mathbf{bt}}$

b) Para **b = 1** y los valores de **A** y **B** que se dan en cada caso plantear y resolver el correspondiente **Pvi**. Luego de resuelto, graficar la función de posición e indicar:

(i) si la masa pasa por su posición de equilibrio. Si pasa, en que instante(s) lo hace.

(ii) el instante en el cual alcanza su desplazamiento máximo.

(iii) que sucede con el paso del tiempo.

b1) A = B = 5 **b2) A = 10 ; B = -5** **b3) A = 5 ; B = -10**

Rtas:

b1)	**(i) NO**	**(ii) t = ½**	**(iii)** la masa tiende a su posición de equilibrio.
b2)	**(i) NO**	**(ii) t = 0**	**(iii)** la masa tiende a su posición de equilibrio.
b3)	**(i) SI, t =1**	**(ii) t = 2**	**(iii)** la masa tiende a su posición de equilibrio.

5.- <u>Movimiento Libre Amortiguado</u>: $\mathbf{m.\,x'' + \boldsymbol{a}\,x' + k\,x = 0}$ ($a > 0$; $k > 0$)

Simplificamos la EDO para obtener la *ecuación característica* de este movimiento.

Dividimos por **"m"** y hacemos $\dfrac{a}{m} = \mathbf{2b}$ **(b>0) ;** $\dfrac{k}{m} = \lambda^2 \;\rightarrow\; \boxed{\mathbf{x'' + 2b\,x' + \lambda^2\,x = 0}}$

La ecuación característica queda: $\mathbf{r^2 + 2b\,r + \lambda^2 = 0} \;\rightarrow\; \mathbf{r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda^2}}$

Se presentan 3 casos distintos dependiendo de la naturaleza de estas raíces, las que dependen del valor del radicando ($b^2 - \lambda^2$), de si este es negativo, cero o positivo.

(I) <u>Movimiento oscilatorio amortiguado</u>: $b < \lambda$

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e^{-bt}.[C_1\,sen(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.t) + C_2\,cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.t)]}$

ó $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c\,e^{-bt}.\,cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.\,t + \alpha)}$

$\mathbf{c\,e^{-bt}} \rightarrow$ ***factor de amortiguamiento***

$\mathbf{cos(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,.\,t + \alpha)} \rightarrow$ ***factor "osc."***

- En este caso tenemos un movimiento oscilatorio donde las oscilaciones son cada vez más pequeñas (*menor amplitud*) y la masa *tiende a su posición de equilibrio.*

(II) <u>Amortiguamiento crítico</u>: $b = \lambda \;\rightarrow\; \mathbf{x}(t) = \mathbf{[C_1 + C_2\,t].\,e^{-bt}}$

- En este caso el movimiento ya no es oscilatorio, el amortiguamiento es lo suficientemente importante como para evitar las oscilaciones. Pero, en este caso, una pequeña disminución en la cantidad de amortiguamiento cambia la situación, y el sistema pasa al caso **(I)**; o sea, se producen oscilaciones.
- Dependiendo de las condiciones iniciales se tienen 3 situaciones posibles, siendo las respectivas gráficas similares a las obtenidas en el ejercicio **(4.b)**

(III) <u>Amortiguamiento sobrecrítico</u>: $b > \lambda \;\rightarrow\; \mathbf{x}(t) = \mathbf{C_1\,e^{r_1 t} + C_2\,e^{r_2 t}}$

- En este caso el movimiento tampoco es oscilatorio, pero el amortiguamiento es tan grande que ya no cabe la posibilidad de que cualquier pequeña disminución del mismo se traduzca en oscilaciones (o sea, lleve al sistema al caso **(I)**)

- Dependiendo de las condiciones iniciales se tienen 3 situaciones posibles, siendo las respectivas gráficas similares a las obtenidas en el ejercicio **(4.b)** o en caso **(II)** En este caso, y debido al mayor amortiguamiento, la masa regresa a su posición de de equilibrio más lentamente; o sea, con menor rapidez .

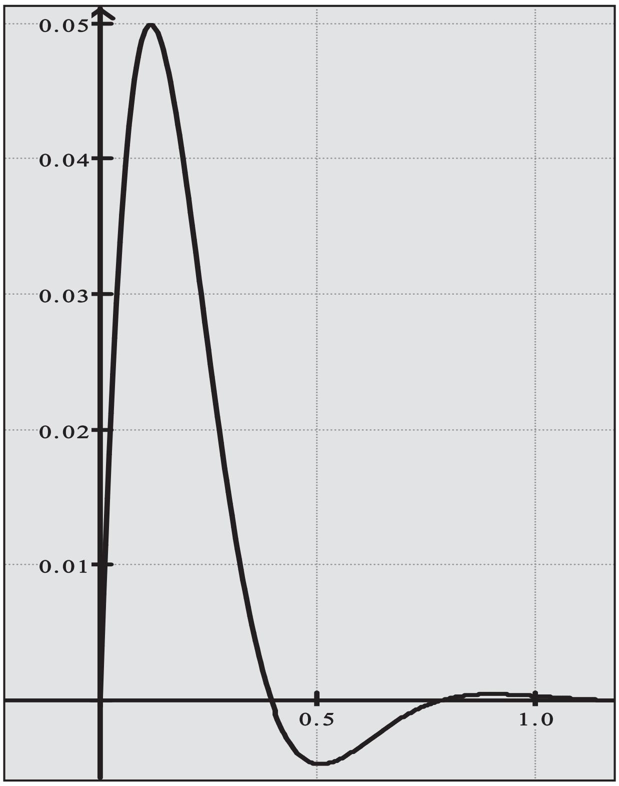
Sea el caso de un cuerpo de 0,2 kg de masa que pende de un resorte de *constante elástica* $k = 20\frac{N}{m}$. En esta instancia el sistema es afectado por la resistencia del aire y otras fuerzas de fricción que amortiguan el movimiento. En el instante $t = 0$ pasa por la posición de equilibrio con velocidad $v = 1$ m/seg.

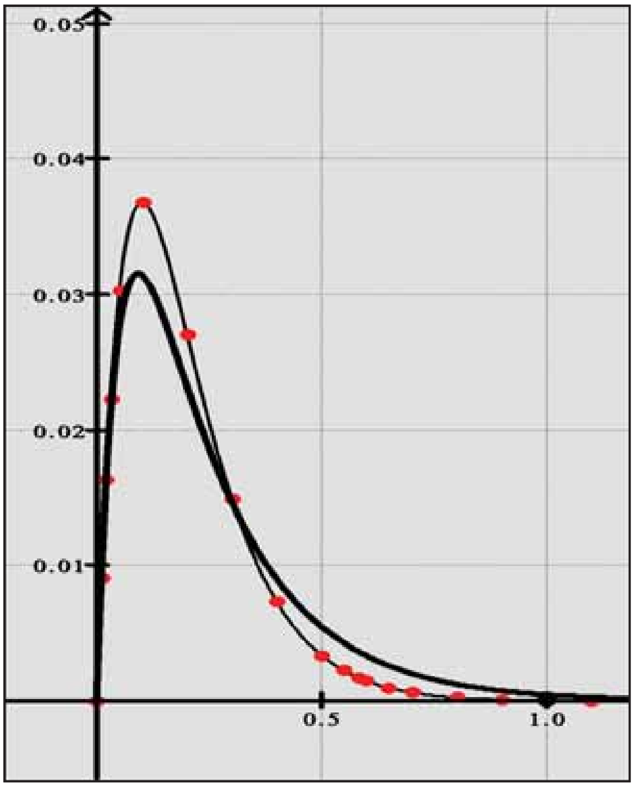
a) Plantear el **Pvi** correspondiente a este movimiento con la ecuación característica.

b) Para los valores de a (cte de amortiguación) que se dan a continuación, establecer (sin resolver el **Pvi**) que tipo de amortiguamiento se tiene en cada caso:

b1) $a = 2{,}4$; **b2)** $a = 4$; **b3)** $a = 5$

c) Resolver el **Pvi .** Los gráficos que se dan a continuación se corresponden (uno a uno) con las soluciones halladas para los distintos **"*a*"** dados en **(b).** Establecer la correspondencia entre solución y gráfico de la misma.



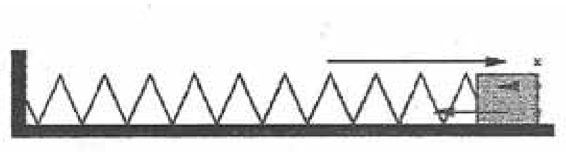


Rtas: **b1)** **x**(t) = $\frac{1}{8}$ e^{-6t}. **sen(8.t)** **b2)** **x**(t) = **t** . $e^{-10\,t}$ **b3)** **x**(t) = $\frac{1}{15}\left(e^{-5t} + e^{-20\,t}\right)$

6.- En los problemas **1-5** se ha trabajado con sistemas masa-resorte con movimiento oscilatorio y amortiguado, respectivamente. Se tiene ahora un sistema similar apoyado sobre una superficie horizontal, como indica la figura, sobre el que actúa una fuerza externa ***F***, la masa *m* tendrá un movimiento oscilatorio forzado y la ecuación diferencial que lo describe es:

m x'' + b x' + k x = F(t), k ≠ 0.

Halle la solución de la ecuación con los valores *m*, *b*, *k* y ***F*** que se indican a continuación.



a) *m = 1, b = 0, k = 9, F(t) = 10 cos (2t);*
x(0) = x'(0) = 0

b) *m = 1, b = 2, k = 2, F(t) = 20 cos (2t);*
x(0) = x'(0) = 0

Rtas:

a) **x**(t) = **2.cos (2.t) - 2.cos (3.t)**

b) **x**(t) = e^{-t} **(2.cos (t) - 6. sen(t)) - 2.cos (2t) + *4*. sen (2t)**

7.- Si **"x = x(t)"** es la *función de posición* de un cuerpo que se desliza por una rampa de **5º** de pendiente ; entonces la **EDO** que modeliza el movimiento es;

$$\mathbf{20\,x'' + x' = 30 \;;\quad x(0) = 0\;;\quad x'(0) = 0}$$

Se pide:

a) en el diagrama adjunto, graficar el cuerpo en el instante en que se coloca en posición para largarlo por la rampa **(t = 0).** Luego graficar donde estará (aprox.) unos segundos después de iniciado el movimiento. Según lo que se "observa" y lo se quiere medir, graficar el **eje de referencia** más apropiado al efecto de modelizar este proceso; o sea, aquel donde se "lea directamente del mismo" la posición del cuerpo en cada instante (⇒ el eje, en dirección y sentido, debe coincidir con la dirección del movimiento).

Recién entonces proceda a:

b) hallar **x**; la función de posición que describe la caída del cuerpo.

c) hallar ***v***; la velocidad del cuerpo en su caída.

d) hallar (aprox.) la longitud de la rampa si se sabe que la velocidad del cuerpo al llegar a TIERRA es: $v(t_T)$ **= 20 (m/seg.)**

8.- La caída de un paracaidista viene descrita por la ecuación diferencial:

$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} - k\frac{dy}{dt} = w$, donde w es el peso del paracaidista, su altura en el instante t es y, g es la aceleración de la gravedad y k mide el efecto de freno del paracaídas. Supuesto $k = 8$, un paracaidista de 160 libras de peso y $g = 32$ *pies/s*^{2}, halle la solución de la ecuación diferencial considerando que el paracaídas se abre en el instante $t = 0$, hallándose el paracaidista a una altura de 2000 *pies* y cayendo a una velocidad de -100 *pies/s*.

PROBLEMAS DE MEZCLAS

Vamos a considerar ahora los problemas relacionados con mezclas. Se permite que una sustancia '***S***' fluya hacia una cierta mezcla de un recipiente, con una cierta rapidez, y la mezcla se mantiene uniforme mediante agitación. Además, la mezcla uniforme deberá salir del recipiente y pasar a otro (en condiciones generalmente diferentes); en todo caso se busca determinar la cantidad de sustancia ***S*** presente en la mezcla al tiempo *t*.

Se representará por *x* la cantidad de ***S*** en el tiempo *t*, la derivada *dx/dt* representa la razón de cambio de *x* con respecto a *t*. Si ENTRADA representa la razón con la que ***S*** entra a la mezcla y SALIDA representa la razón con la que sale, de inmediato se tiene la ecuación básica:

$$\boxed{dx/dt = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}}$$

de la cual se determina la cantidad *x* de ***S*** en el tiempo *t*. Estudiaremos algunos ejemplos.

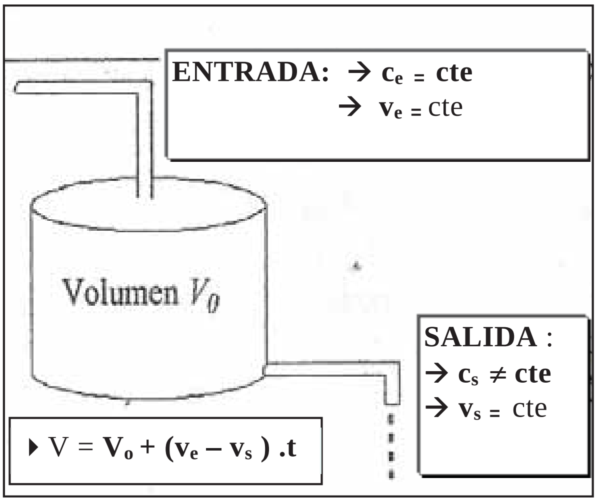
- ***x* = cantidad de *S*** en solución al **instante *t*;**
  ***x* = *x*(*t*)**
- ***V* = volumen** de solución, en el tanque al **instante *t*; *V* = *V*(*t*)**
- **V_o = volumen inicial** (t= 0) en el tanque.

La ecuación **"ecuación básica"** queda**:**

ENTRADA: $c_e \cdot v_e \rightarrow v_e = \text{cte}; \quad c_e = \text{cte}$

SALIDA: $c_s \cdot v_s \rightarrow v_s = \text{cte};$

$$\rightarrow c_s = c_s(t) = \frac{x(t)}{V(t)} \neq \text{cte}$$



Finalmente: $$\boxed{\frac{dx}{dt} = c_e \cdot v_e - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot v_s}$$

Ejemplo I:

Un tanque contiene inicialmente 50 galones de agua pura. En el tiempo $t = 0$, salmuera que contiene 2 libras de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 3 galones/minuto. La mezcla se mantiene uniforme agitándola y, después de estar bien agitada, sale simultáneamente del tanque con la misma rapidez.

a) ¿Qué cantidad de sal se encuentra en el tanque en cualquier tiempo $t > 0$?
b) ¿Qué cantidad de sal hay después de 25 minutos?
c) ¿Qué cantidad de sal está presente después de un largo tiempo?

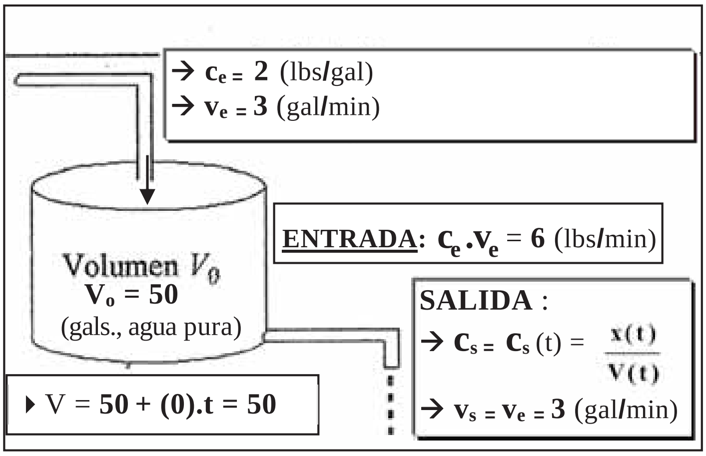
Formulación Matemática:

- **Incógnita principal**: $x = x(t)$
- **DATOS:** en el esquema de situación→

EB → $\dfrac{dx}{dt} = c_e . v_e - \dfrac{x(t)}{V(t)} . v_s$

EB → $\dfrac{dx}{dt} = 2 . 3 - \dfrac{x(t)}{50} .3$

EB → $\dfrac{dx}{dt} = 6 - \dfrac{3}{50} . x$



Concluimos así el siguiente **PVI**: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6 - \dfrac{3}{50} . x \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Rta 1: $x(t) = 100 - 100\, e^{-\frac{3}{50}.t}$

Rta 2: $x(25) = 100 - 100 . e^{-1.5} \cong 78$ (lb)

Rta 3: $x \to 100$ (lb) cuando $t \to +\infty$

El problema "planteado" está terminado; pero, ¿no surgen interrogantes o cuestiones interesantes de investigar? Tendrían que surgir… "*naturalmente*" !!!, el ser humano es curioso e inquisitivo *por naturaleza*

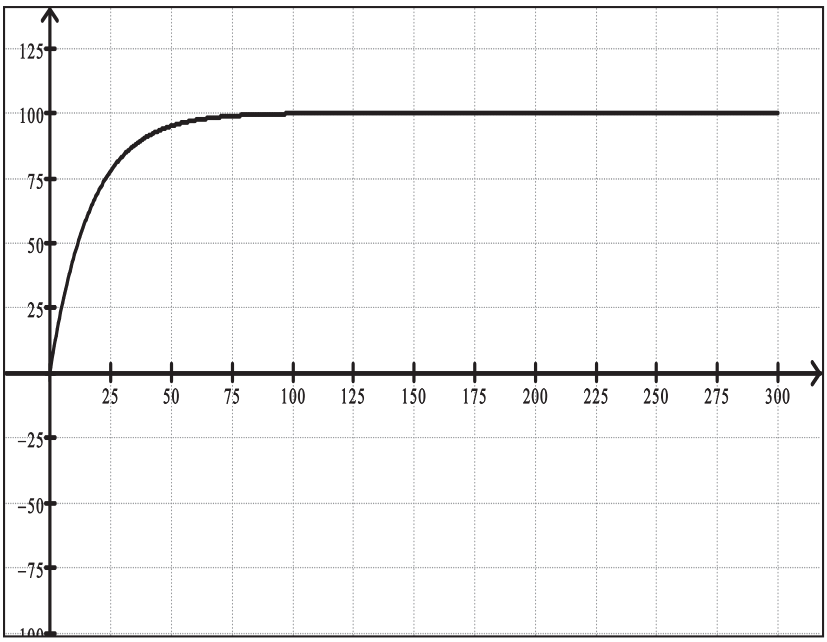
Por ejemplo:

a) ¿Por qué la cantidad de sal tiende a 100 (lbs)?, ¿hay alguna forma "*práctica*" de encontrarle "*sentido*" a este resultado que no sea diciendo que es así, porque "las cuentas dan así"?

b) En algún instante, ¿llega a haber 100 (lbs) de soluto en la solución? ¿SI? ; ¿NO? ; ¿NO SABE? ¿Desde que "lugar" entiende que debe buscar la respuesta a esta pregunta?

c) ¿Y la concentración de salida?; ¿$c_s \to$ 50 (lbs/gal) cuando $t \to +\infty$ **?**

d) El gráfico y la tabla de valores que siguen corresponden a $x = x(t)$. ¿Podría decirse que a los 282 minutos (casi 5 horas) hay exactamente 100 libras de soluto en la solución?



t(min)	x(libras)
192.00000	99.99901
198.00000	99.99931
204.00000	99.99952
210.00000	99.99966
216.00000	99.99976
222.00000	99.99984
228.00000	99.99989
234.00000	99.99992
240.00000	99.99994
246.00000	99.99996
252.00000	99.99997
258.00000	99.99998
264.00000	99.99999
270.00000	99.99999
276.00000	99.99999
282.00000	100.00000
288.00000	100.00000
294.00000	100.00000
300.00000	100.00000

Ejemplo II:

Un tanque contiene inicialmente 50 galones de salmuera en donde se han disuelto 10 libra de sal. En el tiempo $t = 0$, salmuera que contiene 2 libras de sal disuelta por galón entra al tanque a razón de 5 galones/minuto. La mezcla se mantiene uniforme agitándola y, después de estar bien agitada, sale simultáneamente del tanque a razón de 3 galones/minuto. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en cualquier tiempo $t > 0$?

Formulación matemática. Sea x = la cantidad de ale en el tiempo t, nuevamente usaremos la ecuación

$$dx/dt = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}$$

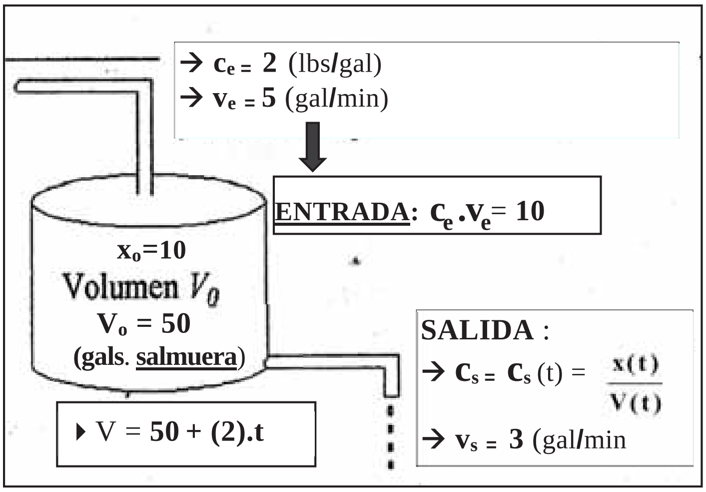
Formulación Matemática:

- **Incógnita principal**: $x = x(t)$
- **DATOS:** en el esquema de situación→

EB → $$\frac{dx}{dt} = c_e . v_e - \frac{x(t)}{V(t)} . v_s$$

EB → $$\frac{dx}{dt} = 2.5 - \frac{x(t)}{50+2t} . 3$$

EB → $$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3}{50+2t} . x$$



Concluimos así el siguiente **PVI**:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10 - \dfrac{3}{50+2t} . x \\ x(0) = 10 \end{cases}$$

Rta: $x = 4.t + 100 - \dfrac{90.\, 50^{3/2}}{(2.t + 50)^{3/2}}$

Preguntas:

a) Para este resultado fácilmente verificamos que si a **V** y **x** las "*pensamos*" como variables abstractas entonces para **t** → +∞ tenemos que **V**→ +∞ y **x** → +∞ **.**
Si le preguntaran el comportamiento de **V** y **x** para **t** → +∞ **,** ¿diría que ambas tienden a +∞ **? ¿Sí?; ¿No? ; ¿Por qué?**
Recordar que las variables del problema son "**concretas**" (magnitudes) → ***x*** = cantidad de Soluto en el tanque**;** ***V*** = volumen de solución, en el tanque.
b) El dominio "*natural*" de "x" es un intervalo de la forma [0 ; t_f] . ¿Quién es t_f? En el problema, ¿tiene el dato necesario para hallarlo?
c) ¿Cual es c_s (0)?
d) Respecto a la c_s "final" (la c_s para **t** → +∞); ¿puede **predecir** cuál sería **sin** "hacer cuentas", sólo con los datos del problema y acudiendo al "sentido común"? Proponga un valor y luego halle la misma haciendo los cálculos del caso.

➢ MODELIZACION MATEMÁTICA - SISTEMAS DINÁMICOS

Con el fin de ayudar a la toma de decisiones se ha desarrollado un interés creciente por el procesamiento de todo tipo de información. En particular una de las ramas que más se ha desarrollado en el tiempo es una cuyo objetivo básico es, *"estudiar cómo evoluciona a lo largo del tiempo, un grupo de datos observados o empíricos"*. En este contexto se ha formalizado el concepto de **Sistema Dinámico**, que ha sido objeto de estudio en una rama de la **Matemática Aplicada** a la que se ha denominado "**Teoría de los Sistemas Dinámicos**".
A este respecto tenemos las siguientes definiciones:

❋ **SISTEMA**: conjunto de partes operativamente interrelacionadas; es decir, en el que las partes interactúan y lo que interesa es su comportamiento global.
Ejemplos: sistema nervioso, sistema ecológico, sistemas fisiológicos.

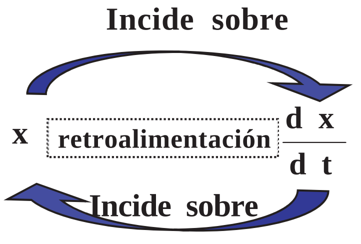
❋ **MODELO**: expresión ***formal*** de las relaciones existentes entre las partes de un sistema, definidas las mismas en ***términos matemáticos y/o físicos***.
❋ **SISTEMA DINÁMICO**: cuando el objeto de estudio es ***"la evolución del sistema en el tiempo"***; hablamos de **SISTEMA DINÁMICO.**
O sea, entendemos por tal todo sistema que desde un ***"estado inicial"*** evoluciona hacia un ***"estado final"***, siendo el ***tiempo*** la variable esencial del proceso.
Un ejemplo clásico es el de la evolución de una especie en un ambiente determinado.

❋ **¿CÓMO SE "MODELIZA" UN SISTEMA DINÁMICO?:**
Las ***ecuaciones diferenciales*** ó los ***sistemas de ecuaciones diferenciales*** son las herramientas matemáticas *naturales* para modelizar **"Sistemas Dinámicos"** ya que las mismos se ocupan de "*procesos en movimiento*"; procesos que (además del tiempo) involucran variables como "*posición*" (**x**) y "*velocidad*" (**x´**).
En estos sistemas se distinguen dos cuestiones: el **ESTADO** y la **DINÁMICA**:
- El **ESTADO** del sistema es la información esencial sobre las componentes del mismo (posición, velocidades,.. etc) en un instante **"t".**
- La **DINAMICA** es la regla que describe como el sistema evoluciona en el tiempo.

➢ SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS PARA LOS SISTEMAS DINÁMICOS

❋ **Un Caso Simple** : ***"modelo lineal en una variable"***

Si **"x"** representa una magnitud variable en el tiempo, la ***velocidad de cambio de x (dx/dt) también lo es*** y este hecho, a su vez, incide sobre la propia **"x".**
Este proceso se llama **"retroalimentación".**



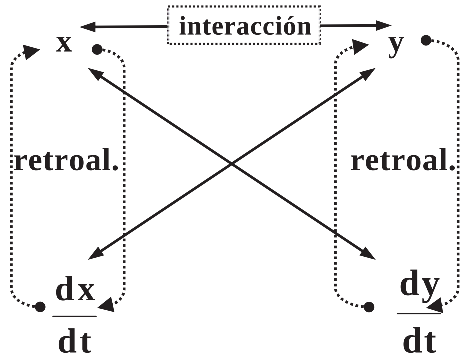
MODELO de PALABRA

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x \qquad (k = cte)$$

MODELO MATEMÁTICO:
Ecuación Diferencial Ordinaria

❋ **<u>Un caso complejo</u>: *"modelo de más de una variable"*.**

Si "**x**" e "**y**" son **<u>dos</u> magnitudes variables** en el tiempo que a su vez **<u>interactúan entre sí</u>**, entonces las respectivas **<u>velocidades de cambio</u>**, $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, además del tiempo, dependen también de "**x**" e "**y**". El proceso puede esquematizarse como sigue:



MODELO de PALABRA

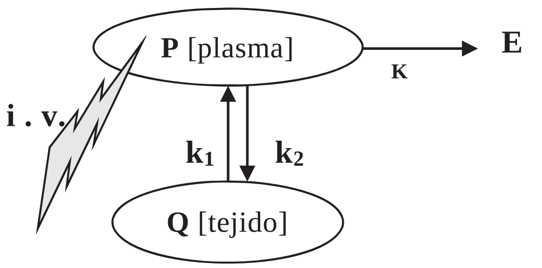
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t\,;x\,;y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = g(t\,;x\,;y) \end{cases}$$

<u>MODELO MATEMÁTICO</u>:
Sistema de Ecuaciones Diferenciales

❋ **Objetivo del Modelo:** hallar **x= x(t)** e **y = y(t)** para predecir futuros valores de **x** e **y**.

➢ APLICACIÓN:

Distribución de fármaco para el caso de una inyección intravenosa rápida.
Uno de los ***modelos*** adaptable a la mayoría de los fármacos, es el de ***<u>dos compartimentos</u>***. Cada <u>tejido</u> se considera como un ***compartimento*** (periférico) el cual tiene una <u>relación de intercambio</u> con un ***compartimento central*** (sangre). El modelo que ilustra la distribución de fármaco en este caso puede ser representado por el siguiente esquema:



$$\mathbf{q} = \left(\text{masa de fármaco}_{\text{ en } \mathbf{Q} \text{ (tejido)}} \right) = \mathbf{q}(t)$$

$$\mathbf{p} = \left(\text{masa de fármaco}_{\text{ en } \mathbf{P} \text{ (plasma)}} \right) = \mathbf{p}(t)$$

k_1, k_2 → constantes de velocidad (+) que caracterizan el paso del fármaco desde <u>el compartimento central</u> al <u>periférico</u> y viceversa.
K → constante de velocidad para el proceso de <u>**E**liminación</u>.
i .v. → inyección intravenosa de un fármaco.

▸ La ***<u>razón de cambio</u> en "<u>cada compartimento</u>"*** (o sea, **dq/dt** y **dp/dt**) queda determinada por el <u>balance</u>, en cada instante "t", entre la masa que <u>entra</u> y la que <u>sale</u>. O sea, para cada compartimiento, estamos ante un "*problema tipo*" ya visto y resuelto: el que llamamos: "***problema de mezcla***".

Según y acorde lo visto para los "problemas de mezcla", buscamos las ecuaciones diferenciales correspondientes a cada compartimento.

→ Sean: **q**(t) = cantidad de fármaco en **Q** (tejido) al instante ***"t"***
p(t) = cantidad de fármaco en **P** (sangre) al instante ***"t"***

→ **q** y **p** son las funciones incógnitas; o sea, las que queremos hallar. Son las funciones que permiten seguir *la evolución en el tiempo* del fármaco en el tejido y en el plasma.

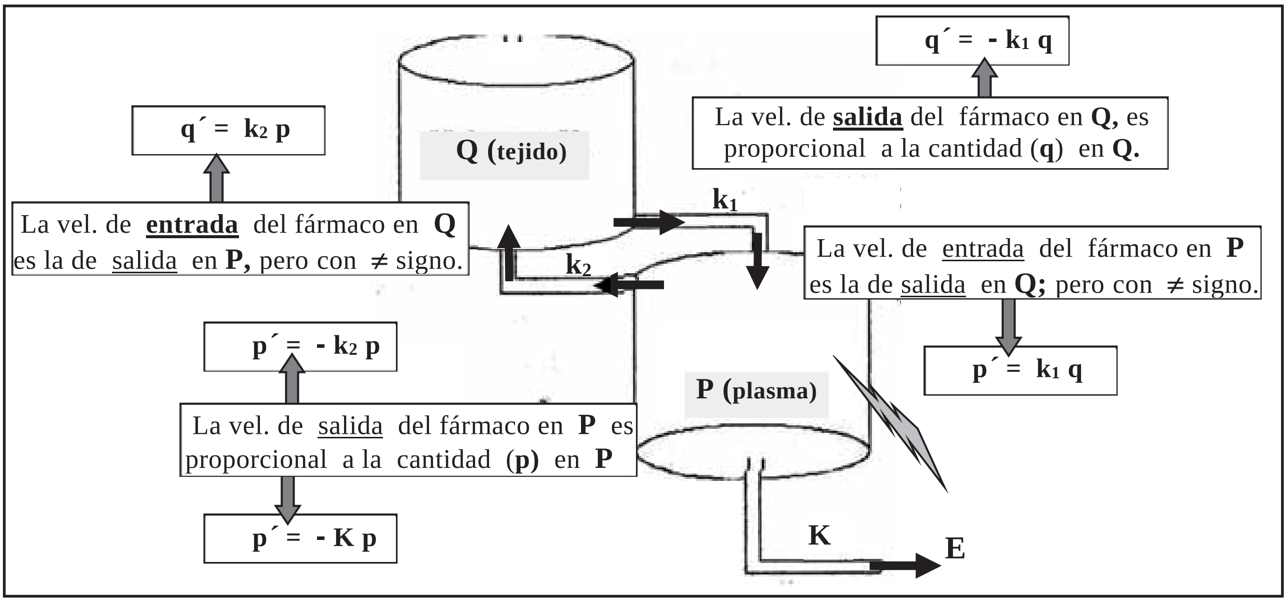
Por la Ecuación Básica (compartimento **Q**): **dq/dt = ENTRADA $_{(Q)}$ - SALIDA$_{(Q)}$**

Por la Ecuación Básica (compartimento **P**): **dp/dt = ENTRADA$_{(P)}$ - SALIDA$_{(P)}$**

Como ambas ecuaciones deben cumplirse simultáneamente, queda formado un **SISTEMA de ECUACIONES LINEALES**

$$\begin{cases} dq/dt = \text{ENTRADA}_{(Q)} - \text{SALIDA}_{(Q)} = k_2\, p - k_1\, q \\ dp/dt = \text{ENTRADA}_{(P)} - \text{SALIDA}_{(P)} = k_1\, q - (k_2 + K)p. \end{cases}$$

El siguiente esquema explica cómo se llega cada una de las ecuaciones del sistema.



➢ **RESOLUCIÓN ?, ¿Estamos en condiciones de resolver este problema con los conocimientos adquiridos hasta ahora? La respuesta es SI.**

$$\begin{cases} dq/dt = -k_1\, q + k_2\, p \\ dp/dt = k_1\, q - (k_2 + K)\, p \end{cases}$$

MODELO MATEMÁTICO
para Dos Compartimentos

(SISTEMA LINEAL de ECUACIONES DIFERENCIALES)

• Los SISTEMAS LINEALES de ECUACS DIFERENCS admiten distintos métodos para su resolución: eliminación, sustitución, transformada de Laplace, ***matriciales***. Cómo siempre el método a usar está condicionado a muchas cuestiones; una de ellas, los ***conocimientos*** del *resolutor*.

• Este tema, su resolución matricial (la más conveniente) no está contemplado en la currícula; así, lo que pretendo mostrar aquí es que a veces, aunque no se conozca el método "óptimo" para el caso, igual se puede resolver el problema; hacer esto con lo que se conoce y … un poco de "ingenio" (como con cualquier "problema") .

◆ ¿Qué sabemos??: EDOL- Orden ´n´ .

◆ ¿Qué no sabemos??: que nos la podemos ***"ingeniar"*** Para usar lo que sabemos y resolver !! El desafío es…. ¡animarse! Para animarlos les damos un poco de ayuda.

MODELO MATEMÁTICO para p y q

(SISTEMA LINEAL de ECUACIONES DIFERENCIALES)

$$\begin{cases} dq/dt = -k_1 q + k_2 p & (1) \\ dp/dt = k_1 q - (k_2 + K)\, p & (2) \end{cases}$$

- SISTEMA de ECUACIONES DIFS. LINEALES
- RESOLUCIÓN: " se desconoce" (Rta. no válida)
- RESOLUCIÓN: un desafío !!! … pero, ¿qué hacer?
- Acudir al **Método de Sustitución** el cual permite, a partir de convenientes y apropiadas sustituciones, "reducir" el sistema a una… **EDOL - ORDEN 2.**

MODELO MATEMÁTICO para "p"

EDOL - ORDEN 2.

(*) Método de sustitución: la técnica de sustitución usada en este método es similar a la usada para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas: se ***despeja*** una de las variables dependientes en una de las ecuaciones (cuál de ellas depende de la configuración del sistema), se ***reemplaza*** en la otra y luego se resuelve la ecuación diferencial que resulta de este proceso:

(*) Instrucciones para obtener **p = p(t)**

a) Derivar **(2) ;**

b) obtener **q´** en función de **p** y **p´**:

c) reemplazar **q´** en **(❖)** obtener una **EDOLH** en **"p"**

d) Resolver la ecuación resultante:

$$\boxed{p(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot e^{r_2 t}}$$

Resolver para **q** ; verificar que:

$$\boxed{q(t) = C \cdot e^{r_1 t} + D \cdot e^{r_2 t}}$$

e) analizar la consistencia del modelo

Se observa que para $t \to \infty$ resulta $p(t) \to 0$, es decir se va eliminado el fármaco del plasma (y del tejido) (el modelo ajusta a la realidad) .

Resolución:

(a) $\to\ p'' = k_1 q' - (k_2 + K)\, p'$ **(❖)**

b) "despejar" **q** en **(2)** y "reemplazar" en **(1)** :

en (2) $\to\ k_1 q = p' + (k_2 + K)\, p$

en (1) $\to\ q' = -[p' + (k_2 + K)\, p] + k_2 p$

$q' = -p' - K p$

c) $\to\ p'' = k_1 [-p' - K p] - (k_2 + K)\, p'$

$$\boxed{p'' + (k_1 + k_2 + K)\, p' + k_1 K\, p = 0}$$

d) $r^2 + (k_1 + k_2 + K) \cdot r + k_1 K = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-(k_1 + k_2 + K) \pm \sqrt{(k_1 + k_2 + K)^2 - 4 k_1 K}}{2}$$

e) $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$; (verificar)

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 0 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = 0$$