Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Vectores

3º Año

Cód. 1302-19

Prof.Mónica Napolitano
Prof. M. Del Luján Martínez
Revisión Prof. Patricia Godino

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

1- INTRODUCCIÓN

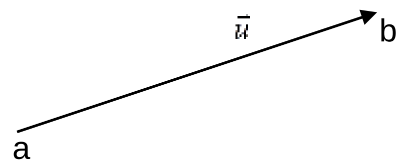
En diversas oportunidades nos hemos encontrado en temas relacionados con la Física, con magnitudes que quedan definidas mediante un número, las denominadas ***magnitudes escalares***. Entre ellas, podemos citar la longitud, la masa, el volumen. Otras, en cambio, ***las magnitudes vectoriales***, requieren además del número, para su definición, de elementos tales como dirección y sentido representados por segmentos orientados o flechas denominados **vectores**. Se cuenta entre estas últimas magnitudes, como ejemplo, las fuerzas, los desplazamientos, las velocidades, etc.

2- VECTOR

Definición. Sus elementos

Se llama vector a todo segmento orientado, es decir, a todo segmento determinado por un par ordenado (a; b) de puntos. El punto ***a*** se llama origen y el punto ***b*** extremo del vector.

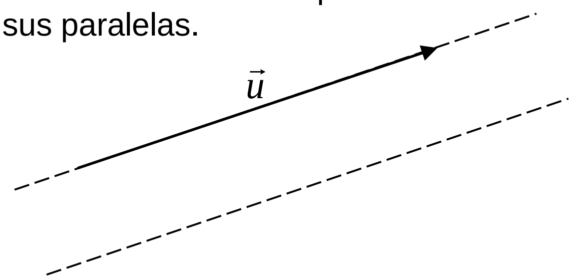
Para simbolizarlo usaremos $\overrightarrow{ab}$ o simplemente $\vec{u}$



Los elementos de un vector son tres, a saber:

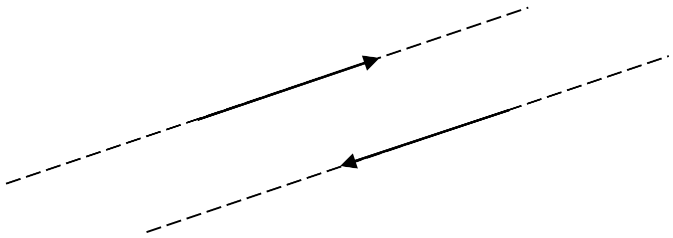
- **Dirección**

  La *dirección* de un vector está dada por la dirección de la recta que lo contiene o cualquiera de sus paralelas.



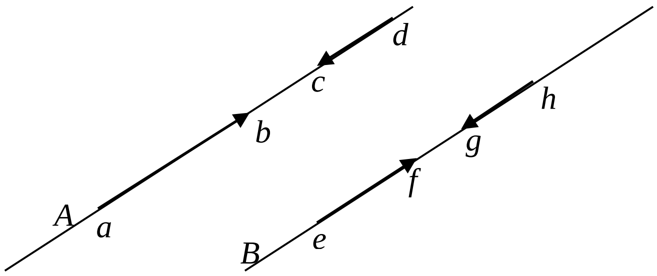
- **Sentido**

  La orientación del vector sobre la recta, definida por su origen y su extremo, determina el *sentido* del mismo.
  En cada dirección hay dos sentidos.
  Gráficamente el sentido de un vector es indicado con una flecha.



A // B

Ejemplo:



En la figura, los vectores $\vec{ab}$ y $\vec{ef}$ tienen igual sentido y los vectores $\vec{ab}$ y $\vec{hg}$ tienen distinto sentido.

Observaciones:

El sentido se compara en forma gráfica, sólo si tienen igual dirección

- **Módulo**

El *módulo* es la medida del segmento orientado.

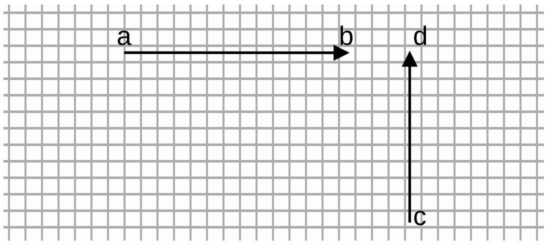
El módulo de un vector $\vec{ab}$ se simboliza $\left|\vec{ab}\right|$

Por todo lo precedente, podemos decir que el *módulo de un vector* es siempre un número *no negativo*, o sea

$$|\vec{u}| \geq 0 \quad \forall \vec{u}$$

Observación: Diremos que dos vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cd}$ poseen **igual módulo** si la medida de los segmentos ab y cd son iguales, respecto a la misma unidad de medida.

$$|\overrightarrow{ab}| = |\overrightarrow{cd}|$$



Vectores particulares

- **Vector libre**

Dado un segmento ab, se llama **vector libre** $\overrightarrow{ab}$ al conjunto de todos los vectores que tienen igual módulo, dirección y sentido que $\overrightarrow{ab}$, incluido el propio $\overrightarrow{ab}$. En lo sucesivo será indistinto trabajar con cualquiera de los elementos de dicho conjunto.

- **Vector nulo**

Llamaremos ***vector nulo*** a todo punto y lo notaremos $\vec{o}$

En el vector nulo el origen y el extremo del mismo coinciden.

$\bullet$

$\vec{u} = \vec{o}$

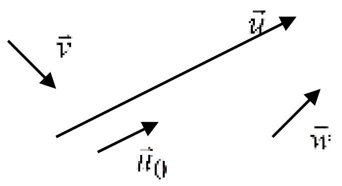
El vector nulo es el único que tiene módulo cero y que no tiene definido ni dirección ni sentido.

En símbolos:

$$\vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \left|\vec{u}\right| = 0$$

- **Versor**

Se llama *versor* o *vector unitario* a cualquier vector de módulo uno.



$$|\vec{v}| = |\vec{w}| = |\vec{u}_0| = 1 \;\Leftrightarrow\; \vec{v};\ \vec{w}\ \text{y}\ \vec{u}_0\ \text{son versores}$$

- **Versor asociado a un vector**

Dado un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, se llama "versor asociado al vector $\vec{u}$", y se simboliza $\vec{u}_0$, al versor que posee igual dirección y sentido que $\vec{u}$

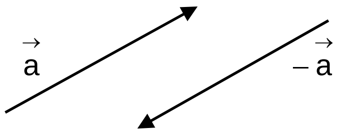
En el ejemplo anterior el versor $\vec{u}_0$ por tener igual dirección y sentido que $\vec{u}$ es un *versor asociado* a $\vec{u}$.

- **Vector opuesto a un vector**

Dado un vector cualquiera $\vec{a}$, se llama vector opuesto de $\vec{a}$ y se simboliza $-\vec{a}$, al vector que tiene igual dirección, igual módulo y distinto sentido que $\vec{a}$, si $\vec{a}$ no es nulo y si el vector $\vec{a} = \vec{o}$, $-\vec{a} = \vec{o}$

$$\text{Si } \vec{a} \neq \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \text{dirección}(\vec{a}) = \text{dirección}(-\vec{a}) \\ \text{sent}\left(-\vec{a}\right) \neq \text{sent}\left(\vec{a}\right) \\ \left|-\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right| \end{cases}$$

$$\text{Si } \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{a} = \vec{0}$$



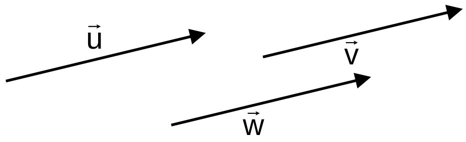
$\bullet\ \vec{a} = -\vec{a} = \vec{o}$

Vectores iguales

Dos vectores son iguales cuando son ambos nulos o tienen ***igual módulo***, ***dirección y sentido.*** En símbolos:

$$\vec{u} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{v} = \vec{o} \ \vee \begin{cases} |\vec{u}| = |\vec{v}| \\ \text{direc. } \vec{u} = \text{direc. } \vec{v} \\ \text{sent. } \vec{u} = \text{sent. } \vec{v} \end{cases}$$

Ejemplo:



$$\vec{u} = \vec{v} = \vec{w}$$

Definición:

Dos vectores no nulos ***son paralelos*** cuando poseen la misma dirección.

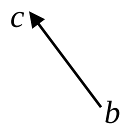
En símbolos:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \text{dirección de } \vec{a} = \text{dirección de } \vec{b}$$

Actividades:

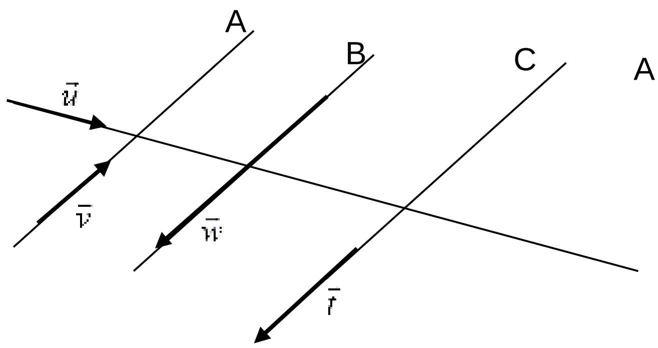
1) Dados los vectores de las figuras completa de modo que las siguientes expresiones resulten verdaderas

a)



.... es el extremo de $\overrightarrow{bc}$

b)



A // B // C

.... y .... tienen distinta dirección

.... y .... tienen igual dirección

.... y .... tienen distinto sentido

2) Dibuja los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$; y $\vec{t}$, sabiendo que

- La dirección de $\vec{a}$ es una recta horizontal y su sentido hacia la derecha, con $\left|\vec{a}\right| = 3$
- La dirección de $\vec{b}$ es una recta vertical y su sentido hacia abajo con $\left|\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|$
- $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen igual dirección, igual módulo pero distinto sentido
- $\vec{t} = \vec{a}_0$

3) Dado $\vec{a}$ dibuja

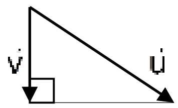
a) $\vec{v}$ / $\vec{v} \,//\, \vec{a}$, sent. $\vec{v} \neq$ sent. $\vec{a}$ y $\left|\vec{v}\right| = \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|$

b) $\vec{m}$ / $\vec{m} \perp \vec{a} \wedge \left|\vec{m}\right| = \left|\vec{a}\right|$

4) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). justifica la respuesta

a) $\left|\vec{u}\right| > \left|\vec{u}_0\right|$

b) En los vectores de la figura es $\left|\vec{u}\right| > \left|\vec{v}\right|$



c) $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Rightarrow \vec{u}_o = \vec{v}_o$

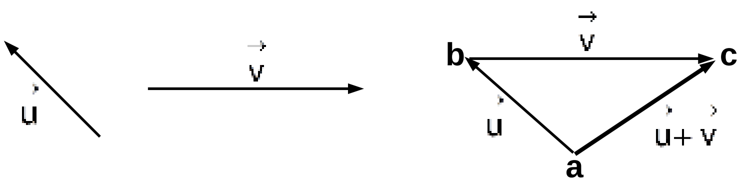
d) $\left|\vec{u}\right| > \left|\vec{v}\right| \Rightarrow \left|\vec{u}_0\right| > \left|\vec{v}_0\right|$

3- OPERACIONES ENTRE VECTORES

SUMA DE VECTORES.
Definición

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se denomina suma de vectores a un vector que se nota $\vec{u} + \vec{v}$ y se obtiene de la siguiente manera

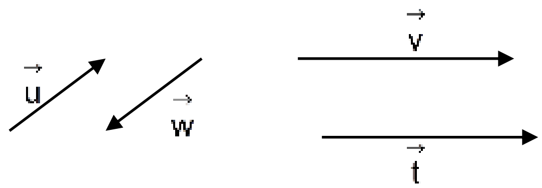
> Fijado arbitrariamente un punto **a**, queda determinado un punto **b** tal que $\vec{u} = \vec{ab}$ y a su vez queda determinado un punto **c** tal que $\vec{bc} = \vec{v}$. Se llama suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector $\vec{ac}$ así obtenido.



NOTA: se puede demostrar que la suma de vectores es independiente del punto *a* elegido y en consecuencia de los representantes $\vec{ab}$ y $\vec{bc}$ correspondientes.

Actividades:

5) Dados los vectores $\vec{t}$; $\vec{u}$; $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de la figura



i) Determina gráficamente

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{t} + \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{w}$

ii) Completa con la relación de orden que corresponda:

$|\vec{u} + \vec{v}|$.......... ..$|\vec{u}| + |\vec{v}|$

$|\vec{v} + \vec{t}|$.......... ..$|\vec{v}| + |\vec{t}|$

$|\vec{u} + \vec{w}|$.......... ..$|\vec{u}| + |\vec{w}|$

6) Prueba geométricamente que:

$$\forall \ \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ es } |\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

7) Dibuja dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{s} \quad \wedge \quad |\vec{s}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{s} \quad \wedge \quad |\vec{s}| = 0$

¿Qué características tienen $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en cada caso?

Propiedades de la suma de vectores

Dados $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se puede probar la validez de las siguientes propiedades.

S1) La suma de vectores es **asociativa**

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

S2) La suma de vectores es **conmutativa**

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

S3) Existencia del **elemento neutro**

$$\forall \vec{a} \text{ se tiene } \vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$$

A $\vec{o}$ se lo denomina *elemento neutro* de la suma de vectores.

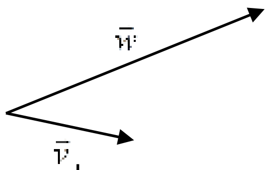
S4) Existencia del **elemento opuesto**

$$\forall\ \vec{a}\quad \exists\ -\vec{a}\ /\ \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{o}$$

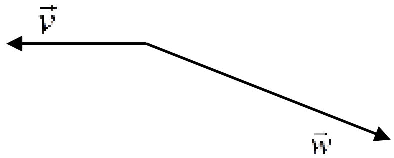
Actividades

8) Suma los vectores indicados en cada uno de los casos siguientes si $\left|\vec{v}\right|=2$ y $\left|\vec{w}\right|=4$

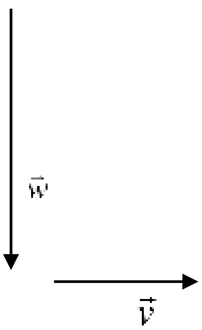
a)



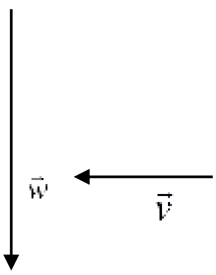
b)



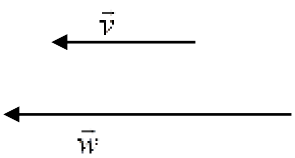
c)



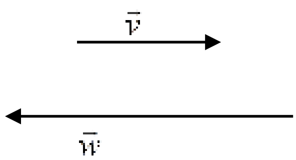
d)



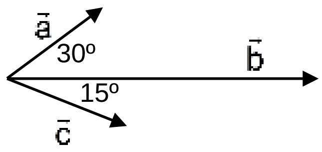
e)



f)



9) Dados los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$



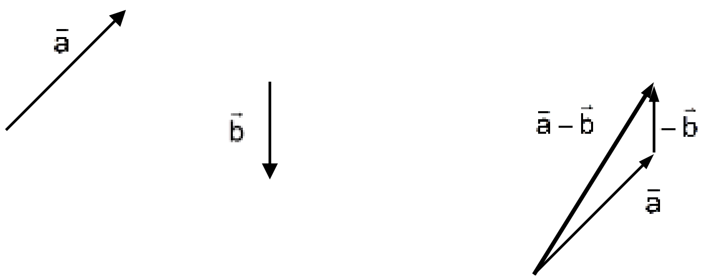
Dibuja:

a) $\vec{d}$ / $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$

b) $\vec{e}$ / $\vec{e} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

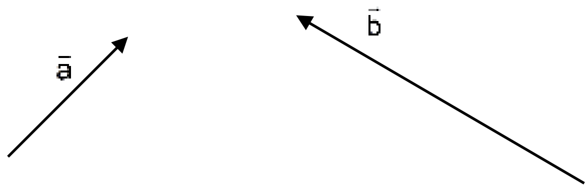
DIFERENCIA ENTRE DOS VECTORES

$$\forall\ \vec{a};\vec{b} \text{ es } \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Actividades

10) Dados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura



Construye:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $-\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} - \vec{b}$ d) $\vec{b} - \vec{a}$ e) $-\vec{a} - \vec{b}$

¿Cómo son los vectores $\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$?

11) Verifica usando propiedades de la suma de vectores que:

$$\forall\ \vec{a};\vec{c}\quad \text{es}\ \vec{a}+\vec{m}=\vec{c}\ \ \text{con}\ \ \vec{m}=\vec{c}-\vec{a}$$

12) Verifica que si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con origen común determinan un paralelogramo, los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-\vec{b}$ están sobre las diagonales del paralelogramo

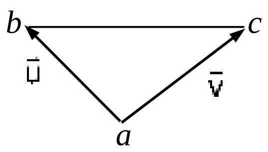
13) Expresa en cada caso los vectores indicados en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a)

$\vec{bc} =$

$\vec{cb} =$

$\vec{ca} =$



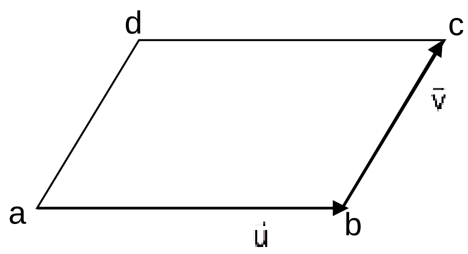
b) abcd es un paralelogramo

$\vec{cd} =$

$\vec{da} =$

$\vec{db} =$

$\vec{ac} =$



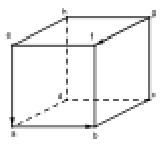
14) En la figura tenemos un cubo. Nombra:

a) tres vectores iguales que $\vec{ab}$. Justifica

b) tres vectores iguales a $\vec{dh}$

c) dos vectores iguales que $-\vec{gf}$

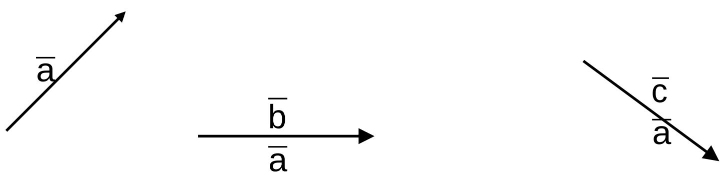
d) dos vectores con igual módulo que $\vec{eh}$ pero distinta dirección



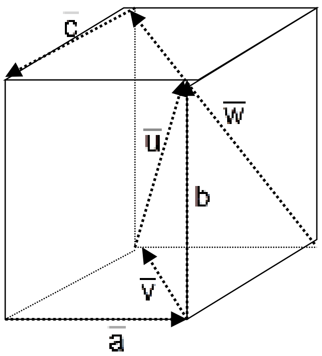
15) Analiza si la siguiente proposición es verdadera. Justifica.

$$\left.\begin{array}{l}|\vec{a}|=2\\ |\vec{b}|=3\end{array}\right\}\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|=5$$

16) Dados $\overline{a}$; $\overline{b}$ y $\overline{c}$ determina $\overline{x}$ gráficamente de modo que $-\overline{a}+\overline{b}-\overline{x}+\overline{c}=\overline{0}$



17) Dados $\overline{a}$; $\overline{b}$ y $\overline{c}$ del gráfico expresa $\overline{u}$; $\overline{v}$ y $\overline{w}$ en función de $\overline{a}$; $\overline{b}$ y $\overline{c}$.



$\overline{u}$ =

$\overline{v}$ =

$\overline{w}$ =

18) Un nadador quiere atravesar un río nadando a una velocidad $\vec{v}_1=6\dfrac{km}{h}$ en dirección perpendicular a la orilla; pero la corriente lo desplaza con una velocidad $\vec{v}_2=4\dfrac{km}{h}$. Dibuja los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ (con una escala conveniente) y encuentra el vector $\vec{v}\,/\,\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$. Este vector representa la velocidad de desplazamiento del nadador. La dirección de $\vec{v}$ es la dirección real en que se mueve el nadador.
Calcula $|\vec{v}|$ observando que quedó determinado un triángulo rectángulo.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO REAL

Definición

Llamamos producto de un $\vec{u}$ por un número real α, o producto de un número α por un vector $\vec{u}$, a un vector $\vec{v}$ tal que:

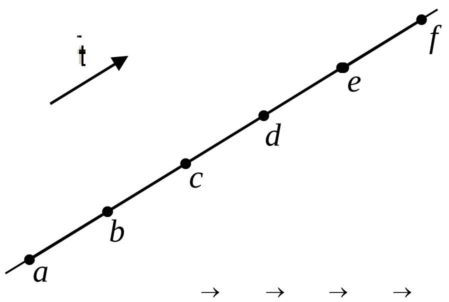
- Si $\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$

$$\vec{v} = \alpha.\vec{u} = \begin{cases} |\vec{v}| = |\alpha|.|\vec{u}| \\ \text{dirección } \vec{v} = \text{dirección } \vec{u} \\ \text{sentido de } \vec{v} = \text{sentido de } \vec{u} \text{ si } \alpha > 0 \\ \text{sentido de } \vec{v} \neq \text{sentido de } \vec{u} \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

- Si $\alpha = 0 \vee \vec{u} = \vec{o} \Rightarrow \vec{v} = \vec{o}$

Ejemplos:

1)

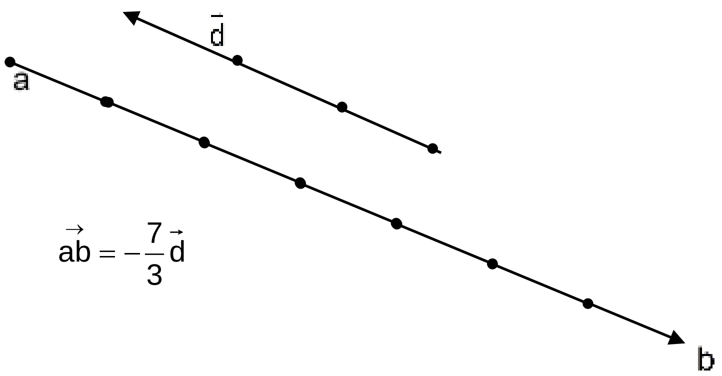


$$\vec{ab} = \vec{bc} = \vec{cd} = \vec{de} = \vec{ef} = \vec{t}$$

$\vec{bd} = 2\vec{t}$ $\quad$ $\vec{ec} = (-2)\vec{t}$ $\quad$ $\vec{cf} = 3\vec{t}$

$\vec{af} = 5\vec{t}$ $\quad$ $\vec{fe} = (-1)\vec{t}$

2)



$$\vec{ab} = -\frac{7}{3}\vec{d}$$

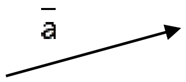
Actividad

19) Dibuja los vectores $\vec{t}$; $\vec{l}$ y $\vec{m}$ tales que

a) $\vec{t} = 0{,}5\ \vec{a}$

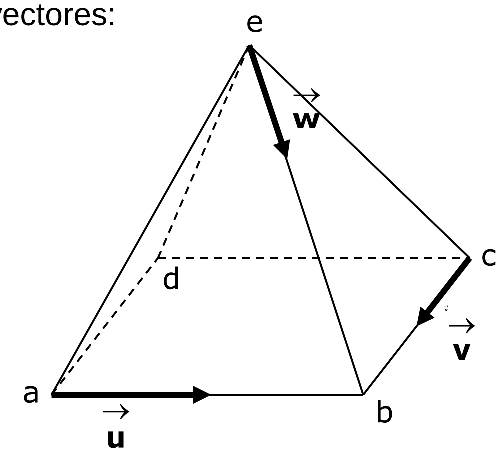
b) $\vec{l} = \dfrac{5}{3}\ \vec{a}$

c) $\vec{m} = -3\vec{a}$



20) Sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tienen las direcciones y sentidos indicados en las aristas de la pirámide e la figura, y además $\vec{v} = \dfrac{1}{2}\vec{cb}$, $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{ab}$ y $\vec{w} = \dfrac{1}{3}\vec{eb}$, expresa en función de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ o sus opuestos los siguientes vectores:

- $\vec{ab} =$
- $\vec{bc} =$
- $\vec{be} =$
- $\vec{db} =$
- $\vec{ea} =$
- $\vec{ac} =$
- $\vec{ed} =$
- $\vec{ce} =$



Propiedades del producto de un vector por un número

Para cualquier par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y los números reales α y β se pueden demostrar las siguientes propiedades:

P_1) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

P_2) $(\alpha+\beta)\,\vec{u} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{u}$

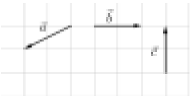
P_3) $\alpha(\beta\ \vec{u}) = (\alpha\,\beta)\,\vec{u}$

P_4) $1\vec{v} = \vec{v}$

Actividades

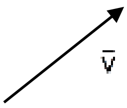
21) ¿Por qué $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$?

22) Dados $\vec{a}; \vec{b}$ y $\vec{c}$



Representa gráficamente $\vec{w}$ siendo: $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}$

23) Siendo



a) dibuja $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ y $-\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$

b) demuestra que $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ es el versor asociado $(\vec{v}_0)$ de $\vec{v}$

VECTORES PARALELOS

Propiedad de los vectores paralelos: Condición de paralelismo entre vectores

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos, son paralelos si y sólo si existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$

En símbolos:

$$\text{Si } \vec{u} \neq \vec{o} \wedge \vec{v} \neq \vec{o}\ ;\ \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in R - \{0\} \,/\, \vec{v} = \lambda\vec{u}$$

Notemos que si: $\vec{v} = \lambda\,\vec{u}$, entonces

$$|\vec{v}| = |\lambda||\vec{u}|$$

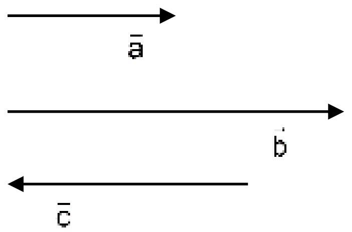
de donde

$$|\lambda| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

como $|\vec{v}|$ y $|\vec{u}|$ son números reales y $|\vec{u}| \neq 0$ siempre existe el cociente $\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ que nos da el valor absoluto del número λ buscado, en cuanto si es positivo o negativo dependerá que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan igual o distinto sentido.

Actividades

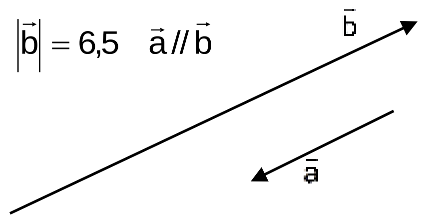
24) $\vec{a}; \vec{b}$ y $\vec{c}$ son los vectores paralelos cuyos sentidos están indicados en la figura con $|\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 4$ y $|\vec{c}| = 3$



a) calcula λ y μ tal que $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ y $\vec{b} = \mu \vec{c}$

b) determina $|\vec{t}|$ si $\vec{t} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

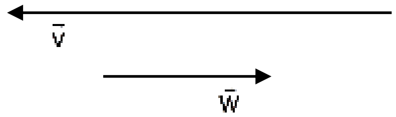
25) En la figura $|\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 6{,}5\ \ \vec{a} // \vec{b}$



Construye el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} = \vec{a} - \dfrac{3}{5}\vec{b}$

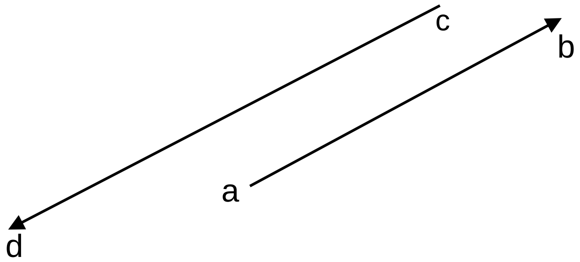
26) Calcula el valor de k si $|k\,\vec{v}| = 5\sqrt{2}$ y $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$

27) Reproduce la siguiente figura y averigua cuánto vale el número *x* tal que $\vec{v} = x\,\vec{w}$

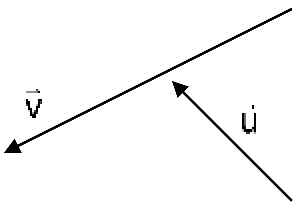


28) Sea la figura siguiente con $\left|\overrightarrow{ab}\right| = 6$ y $\left|\overrightarrow{cd}\right| = 7.2$ con respecto al centímetro,

construye el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{cd} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{ab}$



29) Se dan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, determina el valor de *x* tal que $\vec{v} = x\,\vec{u}$



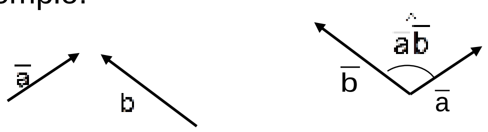
30) Se da un vector $\vec{i}$. Dibuja los vectores : $5\vec{i}$; $-\frac{5}{2}\vec{i}$; $\frac{1}{2}\vec{i}$, construye la suma $\vec{v}$ de dichos vectores y determina *x* tal que $\vec{v} = x\,\vec{i}$

ANGULO ENTRE VECTORES

Definición:

Dados los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ no nulos se denomina **ángulo entre los vectores** $\overline{a}$ **y** $\overline{b}$ y se indica $\widehat{\overline{a}\,\overline{b}}$ al ángulo convexo entre $[0; 360º)$ (es decir $0 \leq \widehat{\overline{a}\overline{b}} \leq 180º$) por ellos determinado al ser aplicados con origen en el mismo punto.

Ejemplo:



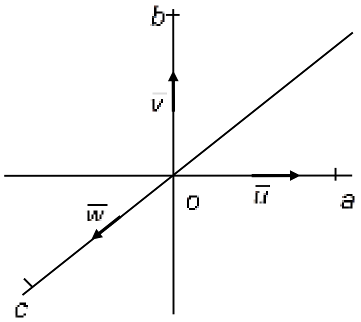
Actividades

31) Si $\overleftrightarrow{oa} \perp \overleftrightarrow{ob}$ y $\overleftrightarrow{oc}$ bisectriz de $\widehat{aob}$ ¿cuál es la medida de cada uno de los siguientes ángulos?

a) $\widehat{\overline{u}\,\overline{v}}$　　d) $\widehat{\overline{u}\,\overline{u}}$

b) $\widehat{\overline{w}\,\overline{v}}$　　e) $\widehat{\overline{u}\,(-\overline{w})}$

c) $\widehat{\overline{u}\,(-\overline{u})}$　　f) $\widehat{(2\overline{u})(-3\,\overline{v})}$



PRODUCTO ESCALAR O INTERNO ENTRE VECTORES

Definición:

Dados dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$, se llama **producto escalar o interno entre los vectores** $\overline{a}$ **y** $\overline{b}$, y se simboliza $\overline{a} \times \overline{b}$, al número:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \overline{a} = \overline{o} \ \vee \ \overline{b} = \overline{o} \\ |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos \widehat{\overline{a}\overline{b}} & \text{si} \quad \overline{a} \neq \overline{o} \ \wedge \ \overline{b} \neq \overline{o} \end{cases}$$

Propiedades

$\forall\ \bar{a};\ \bar{b}$ y $\alpha \in$ R se cumplen las siguientes propiedades:

PE1) $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{a}$

Demostración:

$$\bar{a}\times\bar{b} \underset{(1)}{=} |\bar{a}||\bar{b}|\cos\widehat{\bar{a}\,\bar{b}} \underset{(2)}{=} |\bar{b}||\bar{a}|\cos\widehat{\bar{b}\,\bar{a}} \underset{(1)}{=} \bar{b}\times\bar{a}$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}$$

(1) Definición de Producto Escalar
(2) Propiedad conmutativa de la multiplicación
(3) cos 0 =1
(4) Definición de potenciación

PE2) $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$

PE3) $(\alpha.\bar{a})\times\bar{b}=\alpha.(\bar{b}\times\bar{a})=.\bar{a}\times(\alpha\bar{b})$

PE4) $\bar{a}\times\bar{a}=|\bar{a}|^2\geq 0$

Demostración:

$$\bar{a}\times\bar{a} \underset{(1)}{=} |\bar{a}||\bar{a}|\cos\widehat{\bar{a}\,\bar{a}} \underset{(3)}{=} |\bar{a}|.|\bar{a}| \underset{(4)}{=} |\bar{a}|^2$$

PE5) si $\bar{a}\neq\bar{o}\wedge\bar{b}\neq\bar{o}:\bar{a}\times\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$ (condición de perpendicularidad entre vectores no nulos)

Demostración:

$$\Rightarrow)\ \bar{a}\times\bar{b}=0\Rightarrow|\bar{a}||\bar{b}|\cos\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}=0\Rightarrow\cos\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}=0\Rightarrow\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}=90º\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$$

$$\Leftarrow)\ \bar{a}\perp\bar{b}\Rightarrow\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}=90º\Rightarrow\cos\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}=0\Rightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$$

Actividades

32) Siendo $|\bar{a}|=2$, determina:

a) $\bar{a}\times\bar{a}$
b) $(2\bar{a})\times\bar{a}$
c) $\bar{a}\times(-\bar{a})$

33) Sabiendo que $|\bar{a}|=\sqrt{3}$, $|\bar{b}|=4$ y $\widehat{\bar{a}\bar{b}}=30º$, calcula:

a) $\bar{b}\times\bar{a}_0$
b) $(3\bar{b})\times(-2\bar{a})$
c) $\left(-\frac{1}{2}\right)\bar{a}\times\bar{b}_0$

34) Sabiendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$, determina $\vec{u} \times \vec{v}$ si:

a) $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ y tienen igual sentido
b) $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ y tienen distinto sentido.
c) $\vec{u} \perp \vec{v}$
d) $\widehat{\bar{u}\,\bar{v}} = 150^{o}$

35) Determina:

a) el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$, sabiendo que $\bar{a} \times \bar{b} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$; $|\bar{a}| = \sqrt{5}$ y $|\bar{b}| = 4$.

b) El módulo del vector $\vec{v}$, sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = -20$, $|\vec{u}| = 10$ y $\widehat{\bar{u}\,\bar{v}} = 120^{o}$

SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO ORTONORMAL

- **En el espacio**

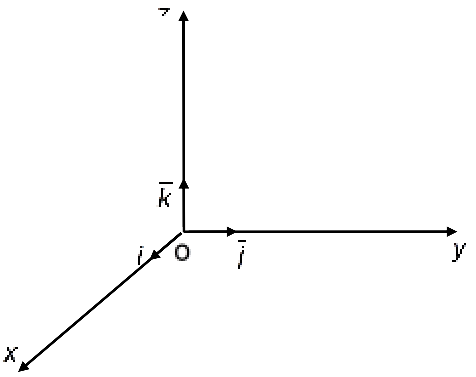
Definición:
Dado un punto cualquiera del espacio o (origen de coordenadas), y en él aplicados tres versores $\bar{i}$; $\bar{j}$ y $\bar{k}$ perpendiculares dos a dos, al conjunto $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$ se lo denomina **sistema de referencia ortonormal en el espacio**.

Denominaremos como:

- **ejes coordenados "x"; "y" y "z"** a cada una de las rectas que contienen a cada uno de los versores $\bar{i}$; $\bar{j}$ y $\bar{k}$, respectivamente.

- **planos coordenados xy; xz e yz**, a los planos que determinan los ejes x e y, los ejes x y z, y los ejes y y z, respectivamente.

Gráficamente resulta:



$$\left.\begin{array}{l} \text{punto fijo o} \\ |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1 \\ \bar{i} \perp \bar{j} \\ \bar{j} \perp \bar{k} \\ \bar{k} \perp \bar{i} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\} \text{ sistema de referencia ortonormal en el espacio}$$

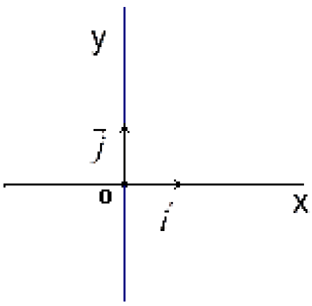
- **En el plano**

Definición:

Dado un punto cualquiera del plano o (origen de coordenadas), y en él aplicados dos versores $\bar{i}$ y $\bar{j}$ perpendiculares, al conjunto $\{o; \bar{i}; \bar{j}\}$ se lo denomina **sistema de referencia ortonormal en el plano**.

- **ejes coordenados "x"e "y"** a cada una de las rectas que contienen a cada uno de los versores $\bar{i}$ y $\bar{j}$ respectivamente.
- Se denominan al eje x, **eje de las abcisas** y al eje y, **eje de las ordenadas**

Gráficamente resulta:



$$\left.\begin{array}{l} \text{punto fijo } o \\ |\bar{i}| = |\bar{j}| = 1 \\ \bar{i} \perp \bar{j} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{o; \bar{i}; \bar{j}\} \text{ sistema de referencia ortonormal en el plano}$$

Actividades

1) En un sistema de referencia $\{o; \bar{i}; \bar{j}\}$ ubica los puntos $a(-1; 3)$; $b(2; -3)$; $c(o; 3)$ y $a(-4; 0)$

2) En un sistema de referencia $\{o; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k}\}$ ubica los puntos: $a(2; 1; 3)$; $b(0; 2; 1)$; $c(-1; 0; 0)$ y $d(4; 0; 3)$.

3) Completa de modo que resulten verdaderas las siguientes proposiciones

   a. $p(x; \ldots) \in$ eje de las abscisas con $x \in R$
   b. $p(0; y) \in$ eje .... con $y \in R$
   c. $p(0; 0; z) \in$ eje ……………… con $z \in R$
   d. $p(4; 3; 0) \in$ plano …………………..

4) Representa en distintos sistemas de referencia los siguientes subconjuntos de puntos

a) $A = \{(x;y) / x = -2 \wedge -1 \le y \le 3\}$

b) $B = \{(x;y) / x \ge -1 \quad \wedge y < 3\}$

c) $C = \{(x;y) / |x| < 2 \wedge |y| = 1\}$

d) $D = \left\{(x;y) / x > -\dfrac{2}{3} \vee y < \sqrt{2}\right\}$

e) $E = \{(x;y) / x \in Z;\ y \in Z; \quad x.y = 12\}$

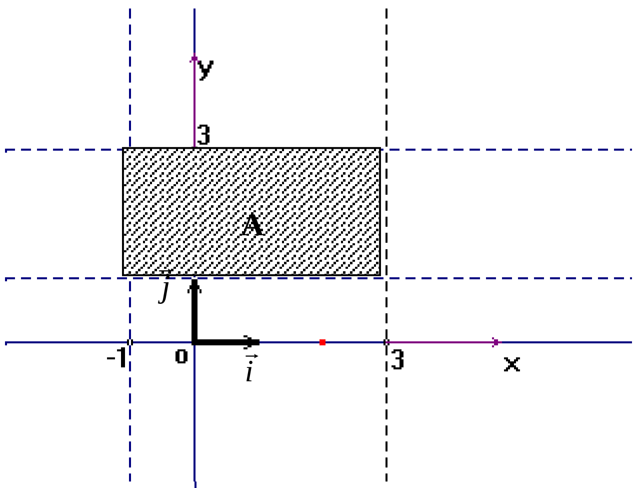
f) $F = \{x / \quad x = 0\}$

g) $G = \{(x;y) / \quad x = 0\}$

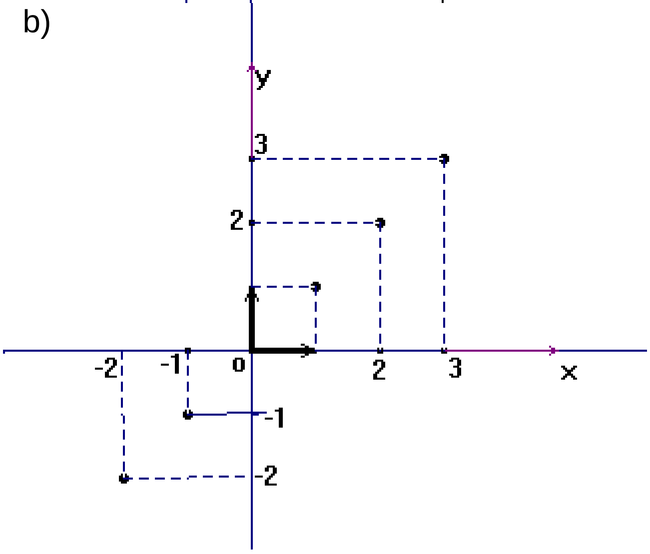
h) $H = \{(x;y;z) / \quad x = 0\}$

5) Escribe el conjunto de puntos que se indica en cada caso

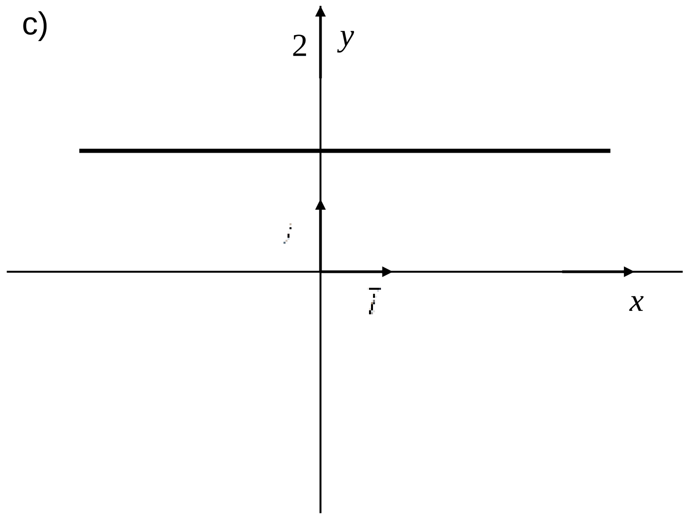
a)



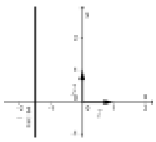
b)



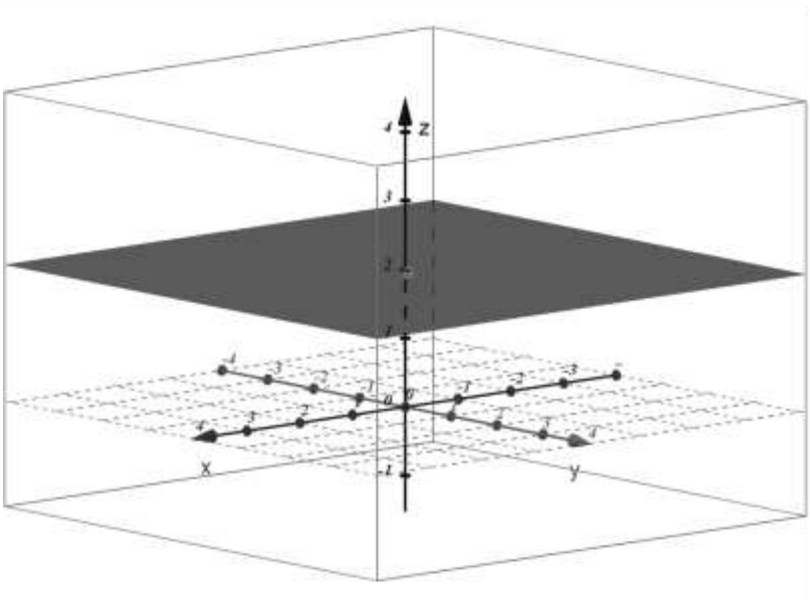
c)



d)



e)



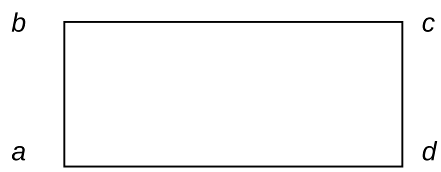
AUTOEVALUACIÓN

1) Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F (falsas). Justifica tus respuestas

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \text{ paralelo a } \vec{v} \\ |\vec{u}| = |\vec{v}| \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$

b) Si $|\alpha\, \vec{u}| = 4\sqrt{2} \quad \wedge \quad |\vec{u}| = 2\sqrt{2}$ entonces $\alpha = 2$

c) En el rectángulo *abcd* la base es el doble de su altura, entonces:



i) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$

ii) $\overrightarrow{bc} = -\overrightarrow{da}$

iii) $\left|\overrightarrow{cd}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{bc}\right|$

iv) $\overrightarrow{bc} = 2\,\overrightarrow{ab}$

v) $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd}$

d) Todo vector tiene módulo distinto de cero.

e) Si dos vectores tienen igual dirección y módulo, son opuestos.

f) Si dos vectores son opuestos tienen igual dirección y módulo.

g) Dos vectores que tienen distinto sentido pueden tener distinta dirección.

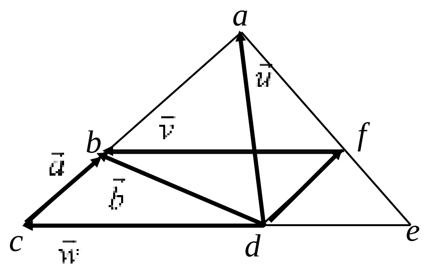
h) Dos vectores iguales son paralelos.

i) El versor asociado a un vector es paralelo a ese vector.

j) Todos los versores son iguales.

k) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen igual módulo, son iguales u opuestos.

3) Expresa $\vec{u}$; $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y/o de sus opuestos.



Bibliografía

- Apunte Cod 1302.15 ALGEBRA VECTORIAL – Autores varios
- Apunte Cod 1403-15 VECTORES – Cattáneo, B.; Lagreca, N.