Proyecto LATIn
INICIATIVA LATINOAMERICANA DE LIBROS DE TEXTO ABIERTOS

Cálculo Diferencial e Integral

Autora: Marta Susana Bonacina
Colaboradores:
Claudia Teti
Alejandra Haidar
Santiago Andrés Bortolato
Valeria Philippe
Franco Lisandrini
Marisa Quiroga

TOMO I

(Quinta Edición)

Autora: Marta S. Bonacina

Colaboradores: Claudia M. Teti, Alejandra P. Haidar, Santiago A. Bortolato

Colaboradores 2º Edición: Claudia M. Teti, Alejandra P. Haidar, Santiago A. Bortolato Valeria Philippe, Franco Lisandrini, Marisa Quiroga.

Cálculo Diferencial e Integral
1a ed. - Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn), 2014. 492 pag.

Primera Edición: Marzo 2014
Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto Abiertos (LATIn)
http://www.proyectolatin.org/

Quinta Edición: 2023

Las figuras e ilustraciones que aparecen en el libro son de autoría de los respectivos autores. De aquellas figuras o ilustraciones que no son realizadas por los autores, se coloca la referencia respectiva.

Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA IIIEuropeAid.

El Proyecto LATIn está conformado por: Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador (ESPOL); Universidad Autónoma de Aguascalientes (UAA), Universidad Católica de San Pablo, Perú (UCSP); Universidade Presbiteriana Mackenzie, Brasil(UPM); Universidad de la República, Uruguay (UdelaR); Universidad Nacional de Rosario, Argentina(UR); Universidad Central de Venezuela, Venezuela (UCV), Universidad Austral de Chile, Chile (UACH), Universidad del Cauca, Colombia (UNICAUCA), Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica (KUL), Universidad de Alcaá, España (UAH), Université Paul Sabatier, Francia (UPS).

Índice general: Tomo I

Prólogo

La docencia en la universidad pública durante más de 40 años, el estudio a lo largo de todos estos años de la problemática del alumno que ingresa, me ha permitido conocer las necesidades tanto de aquellos que llegan temerosos y con pocos conocimientos de matemática como de aquellos otros que lo hacen con una sólida educación y sumamente motivados. Este libro ha sido escrito tratando de contemplar las dificultades con que tradicionalmente tropiezan ambos grupos, aunque estas sean de distinta índole y naturaleza.

El criterio adoptado para la selección, organización y desarrollo de los contenidos es original y está sustentado tanto en los distintos proyectos de investigación en Educación Matemática que hace años venimos desarrollando con el grupo de investigadores que hoy me acompaña como, y particularmente, en un comprometido ejercicio de la docencia. Esto último permitió la “bajada al aula” de los materiales didácticos producto o resultado de la investigación, la corroboración de su efectividad o, en su defecto, su corrección hasta lograrlo. Así, este libro es la recopilación, revisada y corregida una y otra vez, de los apuntes de cátedra y guía de trabajos prácticos oportunamente elaborados para el dictado de las asignaturas a cargo.

El libro es esencialmente un libro de Cálculo para funciones de una variable; en particular Cálculo Diferencial (Capítulos 3 y 4) y Cálculo Integral (Capítulos 9 y 10). En los primeros capítulos (1 y 2) se desarrollan los dos conceptos fundamentales del Cálculo: función y límite.

El problema de hallar la función (f) que describe un proceso conociendo la velocidad (f') ó la aceleración (f'') a la que se desarrolla el mismo, es un problema frecuente tanto en investigación como en el ejercicio de la profesión. Más general aún, lo que se conoce o puede llegar a conocer es la relación entre f y una o más de sus ***derivadas.***

Es decir, lo que se conoce o puede conocer es la Ecuación Diferencial que modeliza el proceso en estudio. Dada entonces la importancia de estas ecuaciones en la modelización de procesos o fenómenos de distintas naturaleza, estimamos conveniente incluir un último capítulo, el de Ecuaciones Diferenciales (Capítulo 11). Este permite trabajar ampliamente todos los conceptos desarrollados previamente, mostrar la utilidad de los mismos en la resolución de problemas y, particularmente, mostrar que la herramienta a usar (derivada o integral) depende de la naturaleza del problema (de allí entonces la importancia de poder detectar el “tipo” de problema a resolver, cuestión en la que se pone especial énfasis a lo largo de los distintos capítulos).

Se ha tratado de exponer las ideas y técnicas matemáticas de la manera más clara posible, de relacionarlas con otras áreas del conocimiento. Se han obviado muchas demostraciones a los fines de brindar mayor espacio y atención a la génesis, explicación y empleo de los diversos conceptos que se presentan, de ilustrar el papel que juegan en la matemática el escribir, verbalizar, investigar, conjeturar, en definitiva, el pensar críticamente. Se abunda en ejemplos, los cuales tienen por intención preparar para la comprensión de un concepto, brindar modelos para la resolución de problemas y, casi primordialmente, animar a los estudiantes a participar activamente de su propio aprendizaje.

Convencida de la importancia de la ejercitación en el aprendizaje de cualquier parte de la matemática he incluido también una variada y abundante propuesta de ejercicios al final de cada capítulo. Estos ejercicios cubren diferentes aspectos y grados de dificultad. Entre los distintos aspectos: ejecución directa de operaciones, teórico-prácticos, teóricos y de aplicación.

Este libro surge ante la necesidad de brindar un material que cubra los requerimientos básicos del Cálculo para nuestros estudiantes, aquí y ahora. Para su elaboración he adoptado un enfoque que podríamos señalar como a *medio camino* entre el tradicional y el reformista. Tradicional, en cuanto reconoce la importancia de la teoría, los enunciados precisos, las demostraciones rigurosas y el desarrollo de destrezas en el manejo de herramientas básicas de la Matemática. Reformista en cuanto a que el énfasis está puesto en los conceptos y las aplicaciones más que en las técnicas formales. Finalmente el objetivo último es el de presentar un texto de matemática *genuina*, el cual permita comprender la diferencia que hay entre familiaridad y entendimiento, entre demostración lógica y manipulación rutinaria, entre actitud mental crítica y la crédula habitual, entre el conocimiento científico y la simple opinión o conjetura; en el que se perciba el peso, importancia e incidencia del conocimiento vulgar en la génesis y desarrollo del conocimiento. Contemplar este objetivo no ha sido simple, sin dudas es más fácil (y posible) omitir cualquier referencia a estas cuestiones que hacer un tratamiento explícito de las mismas, pero de todas manera he aceptado el desafío en el convencimiento de que este es el camino por el que debemos transitar en la búsqueda de una mejor calidad de la enseñanza.

Marta Bonacina

1— Funciones

El Cálculo es una rama de la Matemática cuyas ideas datan de la época de Arquímedes (287-212 a.C.), cuyo origen puede establecerse en culturas tan diversas como la de Grecia, Egipto, Babilonia, India, China y Japón y cuya consolidación como disciplina se produce a partir de los estudios realizados en el siglo XVII por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716). Muchos de los descubrimientos científicos que han permitido el avance de nuestra civilización durante los tres últimos siglos hubieran sido imposibles si no se hubiera conocido el Cálculo.

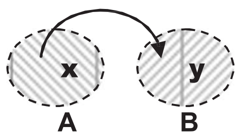
Gran parte del Cálculo implica el empleo de números reales o de variables para describir cantidades cambiantes; pero, fundamentalmente, implica el uso de *funciones* a los efectos de describir la relación entre tales variables, proceder al análisis de problemas que las involucran. El estudio y resolución de estos problemas resulta fundamental en un mundo de cambios constantes, pleno de cuerpos en movimiento y con fenómenos de flujo y reflujo; de allí que el Cálculo, como cuerpo de técnicas de cómputos y conceptos esenciales, siga teniendo vigencia, siga sirviendo como el principal lenguaje cuantitativo de la ciencia y la tecnología.

En esta sección nos dedicamos entonces a analizar en profundidad el concepto de *función*, a establecer la notación y terminología con la que vamos a trabajar a lo largo del curso.

1.1 Definiciones y Notaciones

Definición de función:

Dados dos conjuntos, **A** y **B**; una ***función de A en B*****,** es una *regla* o *ley* que a *cada* elemento de **A** asigna un *único* elemento de **B**.

SIMBOLO	Elementos que la *caracterizan*	Condiciones a cumplir por la ley	REPRESENTACION
Para nombrar una función usamos una letra. (f , g, h …) Por costumbre (y si se se puede) , usamos: f	♦ dos conjuntos: **A** ; **B** ♦ una regla o ley de *asignación*	asignar a *cada* elemento de A un *único* elemento de B	f : **A** → **B** **x** → **y** 

Convención de Nombres y Símbolos:

- f **: A → B**; se lee : f **aplica A en B** .
- al conjunto de *partida* (**A**), lo llamamos: **DOMINIO**

- al conjunto de *llegada* (**B**), lo llamamos: **CODOMINIO**
- a los elementos del dominio o del codominio los llamamos: **VARIABLES.**
  A las variables las representamos con letras minúsculas: x, y, z, t, u, ….
- si ***y*** representa el valor obtenido de aplicar ***f*** a un ***x*** de **A** entonces, a

$y \xrightarrow{\textit{lo llamamos}}$ **imagen de *x* por *f***

$y \xrightarrow{\textit{lo indicamos}}$ $y = f(x)$

Símbolo que usamos para enfatizar la función aplicada (***f***) y, la variable elegida (***x***).

ⓘ ***f*** **(*x*)** se usa también para dar la ley de la función:

(a) la ley de ***f*** se puede dar a través de indicar como se procede para obtener la imagen de *x* por ***f***, para un *x* genérico del dominio

- ***f*** **(x)= 2 x**
  indica que ***f*** actúa "duplicando" el valor de ***x*** .

(b) si el dominio es finito, la ley de *f* se puede dar indicando la imagen de x por *f* para cada uno de los elementos del dominio.

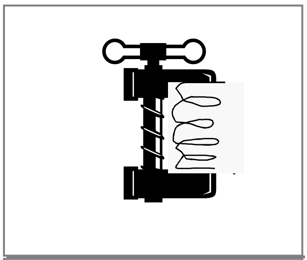
- **A**={a, b}; **B**={1, 2}
- *f*: **A → B**
  f (a) = 2
  f (b) =1

Observaciones y Ejemplos

Las funciones aparecen cada vez que tenemos una cantidad que depende de otra. Así, al abrir una canilla para llenar un tanque, todos sabemos que el *volumen* de agua acumulado depende del *tiempo,* lo que probablemente no todos sabemos es que allí existe, cuanto menos, una función.
En general, cualquier relación *causa-efecto* presupone la existencia de función. Más aún, el origen del concepto se encuentra en la necesidad de reproducir fenómenos de *dependencia entre magnitudes físicas y/o conexiones entre hechos del mundo de lo concreto y real.*

EJEMPLO 1

Experimentalmente se observa que la *variación de longitud* que presenta un resorte cuando se le aplica una *fuerza* es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza: a mayor fuerza, mayor compresión del resorte. (dentro de los límites elásticos del resorte).
En la descripción de este fenómeno detectamos:



F **→ d**

- la existencia de dos magnitudes (*fuerza y longitud*)
- que existe una relación de dependencia entre ellas;
  "*la variación de longitud* ***d,*** depende *de la fuerza* ***F***"
- que la relación de dependencia define ***función;*** pues :
  "*a cada fuerza corresponde una única variación de longitud* "
- que, aunque no se explicite, hay dos conjuntos en juego:
  - ∗ el de todos *los valores numéricos* posibles para ***F***.
  - ∗ el de todos *los valores numéricos* posibles para ***d***
- que las mediciones hechas muestran un patrón de comportamiento el cual permite reconocer el tipo de relación existente entre ambas magnitudes:

" d y F son directamente proporcionales "

Notas:

1) Observar que hasta aquí y en relación con la dependencia estudiada sólo se determina una *cualidad* de la misma (que es una proporcionalidad *directa*) ; o sea, que **F =** ***k d***. *Cuantificar* esta relación está supeditado a la posibilidad de hallar el valor numérico de ***k***, constante de proporcionalidad del proceso**.** Si podemos hallar este valor tendremos una fórmula para el fenómeno investigado (i.e, **F =** ***0.1 d***), hecho este que permitirá predecir resultados, estudiar otras propiedades del resorte, etc; sin necesidad de hacer la experiencia cada vez. Son estas últimas cuestiones, la *determinación de expresiones* que representen matemáticamente fenómenos de la naturaleza; la *cuantificación* de los parámetros, de las constantes involucradas, la *resolución y/o cálculo* de las expresiones halladas, las que competen a la **matemática** y, por ende, las que vamos a tratar.

2) Cabe aclarar que el ejemplo tratado es una ley de la física conocida como ´ley de Hooke´.

EJEMPLO 2

En una experiencia realizada en un laboratorio se registra, cada 5 minutos, la temperatura de una solución en la que se ha desencadenado cierta reacción química. Los respectivos registros se disponen en una tabla.

t (min.)	*0*	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
τ (º K)	*314.94*	*319.54*	*325.85*	*332.20*	*338.45*	*344.55*	*350.90*

En este caso detectamos:

- ✓ la existencia de dos magnitudes variables (*tiempo y temperatura*) ;
- ✓ la existencia de una conexión o relación entre ellas:
  ´a c*ada tiempo se asocia, a través de la tabla, un valor de temperatura´.*
- ✓ que la relación reúne todos los requisitos para ser ***función*** pues:
  -existe un conjunto de valores posibles para *t ;* o sea, un conjunto de partida o
  dominio = { 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30 } **;**
  -existe un conjunto de valores posibles para τ *;* o sea, un conjunto de llegada o
  codominio = { 314.94, 319,54, 325.85, 332.20, 338.45, 344.55, 350.90 }
  -existe una regla de correspondencia, ***la tabla de valores***, a través de la cual
  ´a cada tiempo (t) corresponde una ***única*** *temperatura (τ)'*

ⓘ Con el tiempo el concepto de función evoluciona y se usa tanto para representar relaciones de dependencia, del tipo *causa-efecto,* pertenecientes al mundo de lo *concreto y real* como para expresar relaciones de dependencia pertenecientes al mundo de lo *abstracto o ideal.*

EJEMPLO 3

Las *ecuaciones algebraicas* en las que intervienen dos variables abstractas proporcionan ejemplos típicos de relaciones de dependencia en el mundo de lo abstracto o ideal.

a) $\mathbf{y = x^2 + 1}$

Ecuación en forma explícita

▶▶ esta ecuación establece una relación entre dos variables abstractas. En ella, a *cada valor* de x corresponde un *único valor* de y. Luego, considerando como dominio y codominio el conjunto ***R***, la relación descripta por esta ecuación, ***es función.***

b) $z - 2t^2 = 0$

Ecuación en forma implícita

▶▶ esta ecuación propone también una relación entre dos variables abstractas; pero aquí no resulta tan claro si la misma cumple con la condición necesaria para ser función. Para decidir esto, procedemos a despejar una de las variables.
Si despejamos **z**, tenemos: $\mathbf{z = 2\,t^2}$,
y vemos que a *cada valor* de ***t*** corresponde un *único valor* de **z**.
Luego, considerando como dominio y codominio el conjunto ***R***, podemos concluir que esta ecuación *´esconde´* una función.
En tal caso decimos que:
$\mathbf{z\text{-}2\,t^2 = 0}$ define implícitamente a ***z como función de t .***

▶▶ Cabe preguntarnos: $\mathbf{z - 2\,t^2 = 0}$ **, ¿ define a t como función de z ?**
Al respecto observamos que de esta ecuación no podemos despejar **t** de modo que a *cada valor* de **z** corresponda un *único valor* de **t** ; luego, $z - 2\,t^2 = 0$ no define a *t* como función de *z*.

Conclusión: *que una ecuación defina función depende del sentido que establezcamos para la dependencia entre las variables; o sea, para poder decidir el carácter de la relación debemos establecer primero, y claramente, que variable deseamos ´despejar´ en ´función´ de la otra.*

En este texto, tal cuestión la resolvemos a través de enunciar el problema como sigue:
↔ analizar si $z - 2\,t^2 = 0$ define función con fórmula $\mathbf{z = f(t)}$
(ó, ↔ analizar si $z - 2\,t^2 = 0$ define función con fórmula $\mathbf{t = f(z)}$)

EJEMPLO 4

En la tabla siguiente se presenta el resultado de asignar, al azar, un número a cada dígito: ¿estamos ante una función?. Un simple análisis indica que sí, ya que *a cada dígito corresponde un único número y se reconocen un dominio y un codominio.* (*)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**	→ DOMINIO
4	2	2	6	3	5	1	1	2	6	→ CODOMINIO

(*) En este caso observamos que aun cuando la relación de dependencia no es del tipo causa-efecto, ni se puede traducir o dar la misma a través de una fórmula, estamos ante una *función*. La concepción moderna de este concepto presupone la inclusión de casos como estos en la categoría de *función*.

ⓘ Vemos entonces que:

» en la actualidad el concepto de función es muy amplio y abarca más casos de los que probablemente nos imaginamos hasta ahora; que tal hecho hace de las funciones una herramienta fundamental a los efectos de cuantificar relaciones de dependencia entre magnitudes y convierte su conocimiento en imprescindible a la hora de confeccionar **´modelos matemáticos´** de fenómenos del mundo real.

» Los procesos o fenómenos que ocurren en el mundo real no son estáticos, si algo los caracteriza es el movimiento, *el cambio*. El Cálculo (rama de la matemática que se ocupa entre otras cosas del estudio de funciones) es esencialmente *dinámico*, siendo su problema central la búsqueda de *aproximaciones*. De aquí su utilidad para describir procesos cambiantes y la explicación de porqué, a muchos de los que comienzan su estudio, les resulta bastante diferente de la matemática con la que han trabajado hasta ahora (*estática y exacta*).

» Dado el carácter de este curso, el cual tiene como objetivo final el desarrollo y potenciación de las capacidades requeridas para construir y/o resolver modelos matemáticos, el concepto de FUNCIÓN se abordará desde esta perspectiva. No obstante ello cabe aclarar que el desarrollo de las capacidades mencionadas, el logro del *conocimiento operativo*, requiere del dominio de una amplia gama de técnicas y rutinas algebraicas y analíticas de allí que una parte muy importante del curso estará también destinada a tal efecto.

RESUMIENDO: estamos ante una función cada vez que:

> **(I)** podamos identificar *dos conjuntos*, uno de partida y otro de llegada.
> [DOMINIO y CODOMINIO]
> **(II)** podamos reconocer la existencia de una *regla ó ley* que asigne
> a todo elemento del dominio *un* (*y solo un*), elemento del codomino.

Si revisamos los ejemplos vistos hasta ahora distinguimos distintas formas de dar la ley de la función . En lo que sigue profundizamos y completamos esta cuestión.

- ***Las distintas formas de dar la ley de la función.***

EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} f: \mathbf{N_0} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ n &\longrightarrow 4.n \end{aligned}$$

⟹

f es función ⟸

- LEY (de asignación): $f(n) = 4n$ (*)
- "conjunto de partida" (DOMINIO) = $\mathbf{N_0}$
- "conjunto de llegada" (CODOMINIO) = $\mathbf{R}$

(*) la ley está dada a través de la **imagen de f** para cada elemento del dominio.

EJEMPLO 6

En un libro leemos: ↔ el perímetro ***p*** de un cuadrado de lado ***l*** es; $\boldsymbol{p = 4.\, l}$

🛈 *Esta conocida fórmula puede ser abordada desde dos perspectivas distintas:*

✓ desde la Geometría*:* *donde se reconoce como una ecuación , o sea como expresión que indica cómo se calcula el perímetro conocido el lado y en la que las letras tienen el carácter de datos ó incógnitas*

✓ desde el Cálculo *:* *donde se reconoce como una relación de dependencia , o sea como una expresión que muestra cómo el perímetro depende del lado y en la que las letras tienen el carácter de variables.*

Concluimos entonces que la forma de interpretar y trabajar una fórmula depende del contexto en el que se esté operando: así, y desde la óptica del cálculo matemático, la expresión leída en el libro la registramos como ´relación entre dos variables´. Luego, y dado que a cada valor de ***l*** *positivo corresponde uno y solo un valor de* ***p****, reconocemos que esta relación puede incluso definir función.*

Problema: $p = 4.\,l$, ¿define función ? .

$p=4.\,l \Rightarrow \quad p = f(l)$ con $f(l)=4.l \Rightarrow$

- LEY : $f(l) = 4.l$ (*)
- DOMINIO = **?**
- CODOMINIO = **?**

(**?**) El conjunto de partida y el de llegada no están indicados; luego, ¿tenemos función?:
Sí, estos conjuntos existen aún cuando no estén explícitamente Indicados.
La ley se ´aplica´ y ´produce´ números positivos.

Luego, $p = 4.\,l$ define función:

$$\begin{array}{l} f: \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+ \\ \quad l \longrightarrow p = 4.l \end{array}$$

***f* es función**

- LEY: p = 4. l (*)
- DOMINIO = $\mathbf{R}^+$
- CODOMINIO = $\mathbf{R}^+$

(*) la ley está dada por una **fórmula** (*de la geometría*). Este caso es similar al anterior ya que en definitiva lo que se da es la **imagen de *f*** para cada elemento del dominio. (aunque escrita de otra forma).

OBSERVACIONES:

ⓘ En los ejemplos 5 y 6 hemos elegido la letra *f* para representar la función, pero como ya dijimos podríamos haber elegido cualquier otra letra, particularmente si la función no tiene ningún significado en especial como es el caso del ejemplo 5.
En el caso que la función tenga una *interpretación concreta* resulta útil elegir una letra que represente aquello de lo que trata la función. Así, en el caso del ejemplo 6 la función ´produce´ perímetros; luego conviene y es costumbre identificarla con la letra ´p´. Así, para esta función , resulta más gráfico escribir : $p = \mathrm{p}(l)$ **con** $\mathrm{p}(l) = 4.\,l$

ⓘ en el ejemplo 6 vemos que existe función aún cuando dominio y codominio no estén explícitados. En tal caso asumimos que estos conjuntos quedan *´naturalmente determinados´* por la ley de correspondencia y les damos el nombre de dominio y codominio natural.

DOMINIO NATURAL (**Dn**): mayor conjunto donde la ley de asignación tiene sentido; puede ser aplicada.
CODOMINIO NATURAL (**Cn**): cualquier conjunto que contiene *todas* las imágenes .

La determinación de estos conjuntos resulta de suma importancia para el estudio de funciones. El codominio no ofrece dificultades ya que tomando el mayor conjunto posible nos asegurarnos que el mismo contiene a todas las imágenes. No sucede lo mismo con el dominio, en relación a la determinación del mismo existen distintas cuestiones a evaluar. Estas son:

- ✓ las restricciones de orden algebraico propias de la *fórmula o expresión* matemática que expresa la ley de correspondencia.
- ✓ las limitaciones debidas a las *variables que intervienen* , particularmente en el caso

que las mismas representen medidas, magnitudes físicas, económicas u otras.

- ✓ las limitaciones propias de la cuestión que la función *modeliza*.

ⓘ Concluimos entonces que cada vez que detectemos una *relación de dependencia* en que la correspondencia sea *unívoca*, estamos ante una función; aún cuando dominio y codominio no estén explícitamente indicados. En tal caso, y a los efectos de *representar la función*, procederemos a elegir una letra para simbolizarla y otras dos para indicar los elementos del dominio y del codominio respectivamente. Si la función no tiene una interpretación concreta, por costumbre la indicamos con f (podemos usar otras letras como g, h, ó p); mientras que a un elemento genérico del dominio lo indicamos con ´*x*´ y del codominio con ´*y*´

ⓘ Cuando hablamos de ´*relación de dependencia*´ resulta natural pensar en una relación del tipo *causa-efecto* y en la mayoría de las funciones de uso cotidiano esto es realmente así. Pero, como ya se observó, la concepción moderna de la palabra función es mucho más amplia. Como se desprende de la definición, solo se pide que cada elemento del dominio tenga ´*asociado*´ un único del codominio, pudiendo esta asociación estar establecida en forma arbitraria. Así, por ejemplo, si a cada alumno le asigno un número al azar, se tiene una función cuya ley no obedece a ninguna relación *causa-efecto*. En cambio si le asigno su nota en el parcial, ¡¡si que se tiene relación *causa-efecto* !!.

ⓘ Los ejemplos analizados ponen en evidencia el hecho de que las variables no desempeñan el mismo rol, que este difiere en forma muy importante de una a otra. Así:

"los valores de las variables del dominio se pueden tomar en forma arbitraria (dentro del dominio), los correspondientes del codominio son el *resultado* de esa elección"

Luego, y teniendo en cuenta esta particularidad las distinguimos del siguiente modo :

variable independiente (v.i) ⟶ la del dominio
variable dependiente (v.d) ⟶ la del codominio.

EJEMPLO 7: procedemos a analizar las siguientes expresiones coloquiales a los efectos de decidir si las mismas ´*definen función*´ :

(I) "el volumen de una esfera de metal varia con el radio de la misma"	(II) "el volumen de una esfera de metal varia con la temperatura de la misma"
(*) detectamos una relación de dependencia en que la correspondencia es unívoca	(*) detectamos una relación de dependencia en que la correspondencia es unívoca
⇓ FUNCIÓN	⇓ FUNCIÓN

¿Cómo expresamos estas funciones en "*lenguaje matemático*"?

(I) "el volumen de una esfera de metal varia con el radio de la misma"	(II) "el volumen de una esfera de metal varia con la temperatura de la misma"

1ro) reconocemos variables y elegimos letras apropiadas para identificarlas:

(I) (radio)= ***r*** ; (volumen)= **V**	(II) (temperatura)= ***t*** ; (volumen)= **V**

2do) establecemos el ´orden´ de dependencia:

(I) el volumen depende del radio el volumen es *función* del radio. $\mathbf{V} = f(r)$	(II) el volumen depende de la temperatura el volumen es *función* de la temperatura $\mathbf{V} = f(t)$

3ro) explicitamos (de ser posible) la regla de correspondencia e indicamos Dn y Cn

(I) $\mathbf{V} = f(r)$ **con** $f(r) = 4/3\ \pi\ r^3$ $D_n = R^+$ $C_n = R^+$ (*) *en este caso, acudiendo al auxilio de la geometría, podemos explicitar la dependencia detectada a través de una fórmula.*	(II) $\mathbf{V} = f(t)$ **con** $f(t) = ?$ (*) *en este caso desconocemos una fórmula que relacione las variables; luego, no podemos ´formalizar´ la dependencia Volumen- temperatura. Ello no quita que exista función; más aún, plantea un problema: hallar la fórmula.*

NOTA: el objetivo último de la matemática es expresar la relación detectada entre dos variables a través de una o más fórmulas. Hasta tanto esto no se logre se admiten otras formas de expresar la *ley de la función;* o sea, la correspondencia entre las variables.

Así, en el caso (II) se puede acudir a una TABLA DE VALORES.

Para construir la misma se determinan en forma *experimental* los volúmenes correspondientes a distintas temperaturas y los valores obtenidos se disponen en forma de TABLA .

t (°C)	10	15	20	25	30	35	40	45
V (cm^3)	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8

Luego en **(II)**:

- ■ LEY : TABLA de VALORES
- ■ DOMINIO = {10, 15, 20, 25, 30 , 35, 40 , 45}
- ■ CODOMINIO = R^+ (volúmenes)

EJEMPLO 8: procedemos a analizar el siguiente comentario a los efectos de detectar si el mismo encierra alguna *´función´*.

Juan, que es dueño de un negocio, comenta a su vecino que dado el aumento del costo de vida va a tener que aumentar en un 20% los precios de la mercadería que vende. Agrega que la tarea va a ser fácil ya que en la actualidad los precios son todos valores enteros entre 5 y 15, excepto 10, ya que los artículos de $ 10 los vendió a todos.

1ro) reconocemos variables y elegimos letras apropiadas para identificarlas

¿aumento de precios?: de un *precio viejo,* **pv,** hay que pasar a un *precio nuevo,* **pn.**

2do) establecemos el ´orden´ de dependencia:

sin dudas, "el precio nuevo *depende* del precio viejo".
"el precio nuevo es *función* del precio viejo".

$$pn = f(pv)$$

3ro) explicitamos la ley de correspondencia e indicamos Dn y Cn

⫸ al precio viejo (**pv**) *sumarle el 20%* del mismo ⫷

Dn = { 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 15} ; **C**n = R^+

Luego, en este caso tenemos:

- LEY : “ al precio viejo sumar el 20% del mismo “
- DOMINIO = {5, 6, 7, 8 , 9, 11 , 12, 13, 14, 15}
- CODOMINIO = R^+ (precios)

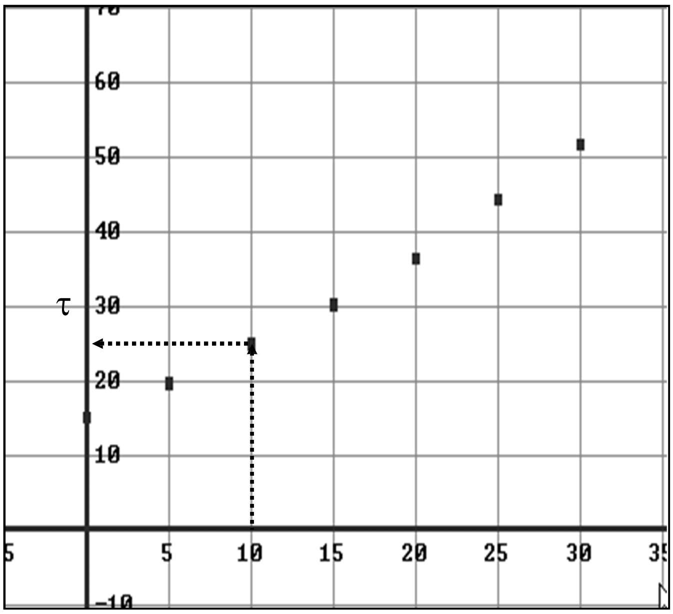
Como ya dijéramos, el objetivo último del trabajo es el de encontrar (de ser posible) una fórmula para la ley de la función. O sea que el proceso anterior admite otro paso:

4to) de ser posible, buscamos una fórmula para la ley de la función

$$\underbrace{pn = f(pv) \quad con \quad f(pv) = pv + 20\%\ pv}_{pn = pv + 0.2\ pv} \quad \boxed{pn = 1.2\ pv\ .}$$

EJEMPLO 9

En una experiencia realizada en un laboratorio, se registra en la pantalla de un monitor, cada 5 minutos, la temperatura (τ) de una solución en la que se ha desencadenado cierta reacción química. Se obtiene así el gráfico adjunto.



- En este gráfico: ¿detectamos función?

- **Sí,** pues para cada valor de “t” del dominio el gráfico proporciona uno y sólo un valor de “τ ”

- Luego, $\tau = f(t)$ **.**

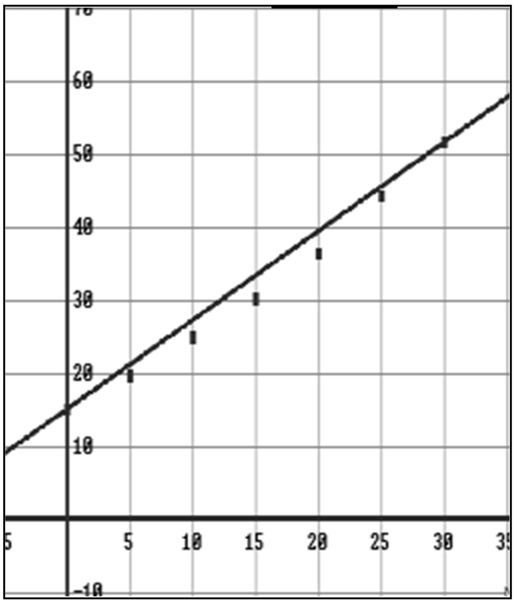
$\tau = f(t)$

- LEY : EL GRÁFICO
- DOMINIO = $\mathbf{D}_n = \{0,\ 5,\ 10,\ 15, 20, 25, 30\}$
- CODOMINIO = $\mathbf{C}_n = R^+$

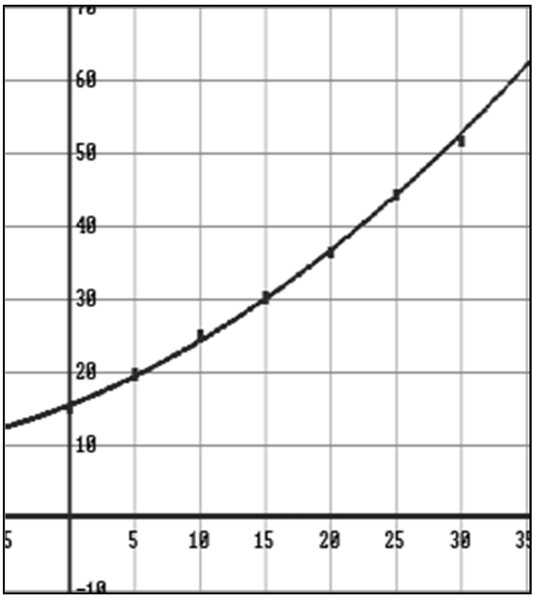
(*) El registro de datos en forma gráfica resulta de suma utilidad a la hora de intentar hallar *una fórmula para la ley de f*. Efectivamente, a partir del registro obtenido y con la ayuda del cálculo matemático podemos obtener una fórmula que exprese la relación temperatura-tiempo; más aún, según la curva con la que nos propongamos aproximar los puntos (recta, parábola, etc.), podemos obtener distintas fórmulas y luego, entre ellas, seleccionar la que mejor aproxima. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones resultan de aproximar los puntos obtenidos, (I) con una recta; (II) con una parábola

(I) Modelo lineal → $\tau = 13,6 + 1.24\ t$
(II) Modelo cuadrático → $\tau = 15,3 + 0.7\ t + 0.018\ t^2$

(I)



(II)



(*) ¿ Qué modelo *'ajusta mejor'* los datos ?

(*) Se utilizó una de las curvas de ajuste para predecir la temperatura de la solución a los 40´. El resultado obtenido fue, 72,1 º C. ¿Qué modelo se usó?

EJEMPLO 10

La Física es la ciencia que se ocupa de mostrar que establecido un sistema de referencia, la altura ***y*** en cada instante **t** de un cuerpo arrojado hacia arriba, se puede calcular según la siguiente **ecuación**:

$$y = y_o + v_o\ t + 0,5\ a\ t^2$$

y_0 = altura inicial
v_0 = velocidad inicial
a = "g" aceleración de la gravedad

ⓘ *Desde la óptica del cálculo matemático esta ecuación define **función** ya que a cada valor de **t** asocia un número y sólo uno, **y** (altura del cuerpo respecto al punto de referencia en ese instante). O sea:*

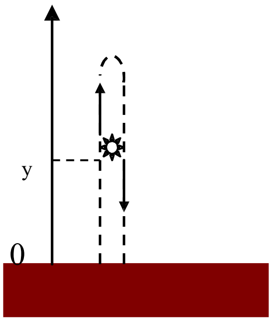
$$y = f(t) \quad \text{con} \quad f(t) = y_o + v_o\ t + 0,5\ a\ t^2$$

Analizamos un caso particular:

Si $y_0 = 0$; $v_0 = 5$ y $a = -2$
la ecuación que describe el desplazamiento de un cuerpo arrojado desde el piso, resulta:

$$y = 5t - t^2$$

Si sabemos que cuando el cuerpo toca el piso nuevamente, cesa todo movimiento: ¿podemos decir $f(t) = 5t - t^2$ es la función que describe el desplazamiento ?



ⓘ *Como vemos, nuevamente dominio y codominio no están dados en forma explícita; hecho este que no impide que la ecuación defina función, pero si complica su análisis. Efectivamente, para tener rigurosamente definida la función debemos indicar cual es el dominio y codominio de la misma, particularmente su dominio natural; o sea, el conjunto donde ´naturalmente´ tiene sentido la ley que la define.*
*Ante este problema, real y concreto, además de analizar la existencia de restricciones de orden algebraico (que en este caso no las hay), debemos analizar especialmente las limitaciones debidas al carácter concreto de las variables. O sea, decidir donde la **ecuación** representa a la **función,** equivale, en este caso, a decidir donde es válido el uso de la misma a los efectos de calcular el desplazamiento del cuerpo respecto del piso; si esto es así, para todo **t** .*

\- Un primer y rápido análisis indica que la respuesta a tal cuestión es ***NO***.
En primera instancia porque t, por representar tiempo, debe ser positivo (t ≥ 0); además, porque existen valores de t que aún siendo positivos tienen imágenes negativas (t =6 → y = - 6); y esto, físicamente, y en este caso, *no tiene sentido* .
Estos resultados nos dicen que la ecuación no representa a la función, *para todo **t**.*

\- *¿Donde la representa ?.* En este punto del análisis resulta conveniente volver a leer el problema, ver si no existe algún dato que pasó desapercibido y puede servir en este momento. Así leemos que: *´el cuerpo, cuando toca el suelo nuevamente, cesa todo movimiento´.*

Esto, traducido a nuestras variables, significa que a partir de ese momento, **y = 0**;
lo cual, aplicado a nuestro problema, significa que es a partir de allí que la ecuación *física* no representa más la relación altura-tiempo para el cuerpo y movimiento estudiado.

- *¿ Cuál es finalmente el dominio natural de **f** ?:* $D_n\ f = [\ 0, 5\ ]$.
- *¿Porqué?* : porque el cuerpo toca el suelo nuevamente cuando $t = 5$.

- ¿ Existirá alguna ***función*** que describa el desplazamiento de este cuerpo, para todo t ?.
- Si, tal función existe; lo que no existe es la posibilidad de describir dicho desplazamiento a través de una única ecuación.

Efectivamente, cuando la función describe más de una situación o fenómeno (en este caso, cuerpo en movimiento y cuerpo en reposo), no podemos dar la ley de la misma a través de *una sola ecuación o fórmula*. Así, cuando el cuerpo está en movimiento, la altura del mismo respecto del piso se expresa a través de la correspondiente fórmula física, mientras que para expresar que el cuerpo está en reposo debemos acudir a otra fórmula: **y = 0**. Este hecho, que la ley de la función esté constituida por más de una fórmula, lo indicamos de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} 5t - t^2 & ; \quad 0 \leq t \leq 5 \\ 0 & ; \quad t > 5 \end{cases}$$

ⓘ Las funciones definidas por varias leyes, como la del ejemplo, reciben el nombre de funciones seccionalmente definidas .

RESUMEN

■ **DISTINTAS FORMAS DE ´INFORMAR´ UNA FUNCIÓN.**

I - ALGEBRAICAMENTE → con una (ej. 5), dos (ej. 10) ó más *fórmulas*.

II- NUMÉRICAMENTE → con una TABLA de VALORES (ej.2: $\tau = f(t)$)

III- GRÁFICAMENTE → con una gráfica (ej. 9: $\tau = f(t)$)

IV- VERBALMENTE → con una descripción en palabras (ej.8)

ⓘ Obviamente existen funciones que pueden ser representadas de las cuatro maneras. En tal caso resulta útil pasar de una forma a la otra ya que cada forma de representar una función destaca aspectos que las otras no hacen. Así, combinando las distintas formas vamos a tener mucho más información sobre la función que con solo una de sus representaciones.

ⓘ En general, ciertas funciones se describen en forma más conveniente con un método que con otro. Así, la forma más natural de dar el volumen de una esfera en función del radio es a través de la fórmula , aunque también se lo pueda dar con una tabla de valores o un gráfico.

ⓘ La función $\tau = f(t)$, función que describe la temperatura de una solución en función del tiempo, la hemos presentado de distintas maneras: como tabla de valores (ej. 2; pag 13), como gráfica (ej. 9; pag.20) y hasta como expresión algebraica (modelo lineal y modelo cuadrático, pag. 20). En este problema, típicamente experimental, es importante señalar varias cosas:

- que *"sin la tabla de valores"* ninguna de las otras expresiones hubiera sido posible. O sea, que es la forma esencial de dar estas funciones (*experimentales*).
- que es imposible dar una *fórmula algebraica* con la cual obtener *exactamente* los valores de la tabla o gráfico. Qué lo que podemos obtener son *fórmulas* que aproximan (mejor o peor) dichos valores. Así en el ejemplo se obtienen dos fórmulas, una lineal y otra cuadrática. Estas funciones, obtenidas con métodos que veremos más adelante, son *modelos matemáticos* que permiten calcular la

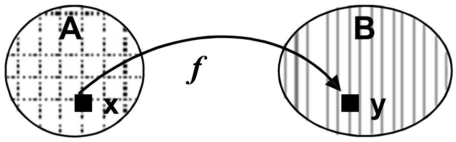
temperatura de la solución en cualquier instante ´t´ , más allá de los efectivamente registrados. Estos modelos son funciones que dan una *aproximación* del hecho real. De allí que pueda existir más de un modelo para un mismo hecho. Uno de los problemas fundamentales del Cálculo es no sólo hallar modelos matemáticos sino, hallar *el modelo que mejor ajuste.*

- Muchas veces tales modelos no se pueden hallar. Esta cuestión también se resuelve, ya que si bien los conceptos básicos del cálculo generalmente se deducen a partir de funciones dadas por una fórmula (*funciones continuas)*, luego se los reformula de modo tal que se los puede aplicar directamente a tablas de valores (*funciones discretas).*

▪ DISTINTAS FORMAS DE "VISUALIZAR" UNA FUNCIÓN :

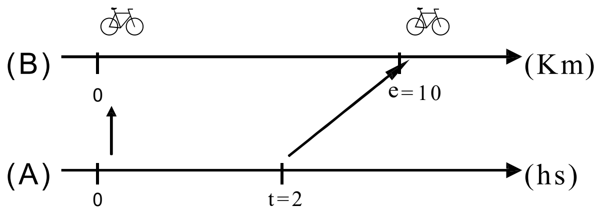
1- Como APLICACIÓN: $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$

2- Con "DIAGRAMAS DE VENN":



3- Con DIAGRAMAS DE CORRESPONDENCIA:

Si los conjuntos A y B son conjuntos numéricos, pueden ser representados sobre *rectas graduadas y paralelas entre sí.* Esta forma de representar una función resulta conveniente cuando la misma se refiere a "desplazamientos"; por ejemplo, espacio recorrido por un móvil (e), en función del tiempo, (t).



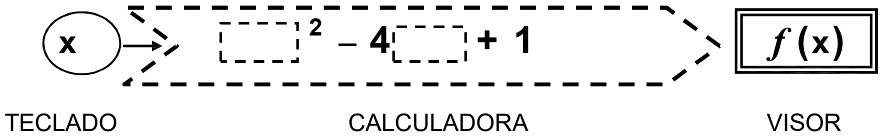
$e = f(t)$
Del diagrama leemos que,
a las dos horas el móvil recorrió 10 km;
o sea, $f(2) = 10$

4- Con "GRÁFICOS CARTESIANOS" , como en el ejemplo 9, pag.20 .

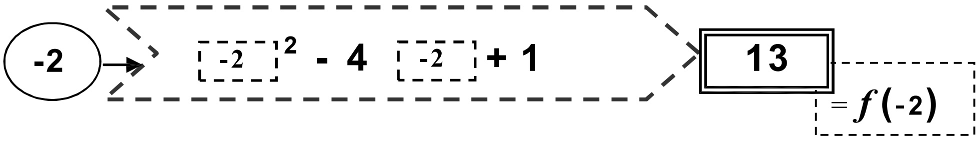
5- Con "DIAGRAMAS DE MÁQUINA"

Estos últimos han adquirido auge últimamente en función de que se los puede asimilar a una calculadora ó computadora.
Si una función está definida ***por una ecuación***, el uso de tales diagramas suele ser muy gráfico y ayudar a la comprensión de más de un concepto relacionado con funciones.
En este tipo de diagramas, la función se piensa como una *máquina procesadora,* es decir, como una máquina que acepta *x´s* como insumos, los procesa según su mecanismo interno (regla de la función), y produce *f (x´s)* como salida. Así, el dominio se puede imaginar como el conjunto de todas las entradas posibles, el codominio como el conjunto de todas las salidas posibles, la variable independiente ***x*** como un *hueco a llenar al interior de la máquina* y, la regla o ley de la función, como *el proceso* al que va a ser sometida esta variable cuando se rellenen con ella los huecos disponibles.

EJEMPLO: $f(x) = x^2 - 4x + 1$



Así, para evaluar $f(-2)$, basta rellenar cada hueco con [- 2]



ACTIVIDADES

Las cuestiones o expresiones que se proponen a continuación pueden o no *comprender ó esconder* una función. En el caso que así fuera identificar Dn, Cn y ley de asignación.

1- El otro día muchos alumnos saltaban de alegría frente al transparente de la cátedra donde estaban publicadas las notas del parcial. Sucede que las mismas, que en un principio eran valores enteros entre **0 y 100,** se habían reconvertido de modo que el rango de variación ahora estaba entre **0 y 10**, ¡pero conservando el hecho de que fueran valores enteros! La parte decimal, de haberla, se había redondeado al entero más próximo *por defecto,* si era menor a 0.50 y al más próximo *por exceso* en caso contrario. ¡¡ Qué alivio para algunos!!

2- En un manual leemos el siguiente ejercicio: asociar a cada número de los conjuntos indicados a continuación, la suma de los dígitos que lo forman (si tal suma diera un número de dos dígitos, volver a sumar).
(2a) $A = \{ x \in N \;/\; 10 \leq x \leq 18 \}$ (2b) $B = \{ x \in N \;/\; 10 \leq x \leq 27 \}$

3- Sea $\mathbf{f : Z \rightarrow N_0}$
$x \rightarrow y = f(x)$ con: 3a) $f(x) = \sqrt{x}$; 3b) $f(x) = x + 5$; 3c) $f(x) = x^2$.

4- La familia Benvenutti tiene una pileta de 3 m. de largo por 5 de ancho y 1.50 m de altura, la cual llenan a distintas alturas según los invitados del fin de semana.
Cansados de estimar ´*a ojo*´ la cantidad de cloro a echar en cada caso, deciden pintar una regla sobre la pared interior de la pileta y buscar una expresión que les permita *calcular* el volumen de agua según el caso. Como discuten acerca de cómo hacer esto, y no se ponen de acuerdo, deciden hacerlo cada uno a su manera. Así, el Sr. Benvenutti pinta su regla en la pared norte y escribe ´su fórmula´ al lado de la misma: $V= 15. (1.50 – x)$, orgulloso se da vuelta para cargar a su Sra (que está haciendo lo propio en la pared sur) pero,…, cuando ve la regla y la fórmula que ella pintó, $V =15. x$, se le congela la sonrisa y,

para zafar, dice: bueno, pero las dos están bien. La Sra. da media vuelta y se retira sonriendo.

5- En un manual de matemática leemos:

- Asignar a cada dígito no nulo los múltiplos del mismo que estén comprendidos entre 5 y 25 incluidos estos.
- Asignar a cada número entero entre 5 y 25 el menor divisor del mismo distinto de 1.

6- Un móvil se desplaza a una velocidad constante de 100 Km/h durante 5 hs. Sabiendo que, "si un móvil se mueve a velocidad uniforme entonces la distancia recorrida (d) es *directamente proporcional al tiempo* transcurrido (t)", se desea hallar una *expresión* para calcular la distancia recorrida por este móvil en cada instante t.

7- Se está inflando un globo esférico con cierto gas. Se sabe que la presión del gas en el globo fue de 20 l/cm^2 cuando el mismo alcanzó los 9 cm de radio. Se desea hallar un expresión para calcular la presión para distintos radios sabiendo que, a temperatura constante, presión y volumen son *´inversamente proporcionales´*

8- Juan, a través de un aparato que detecta posición de partículas, durante 5 minutos y cada 1/2 minuto, registra el desplazamiento de la partícula que está estudiando. Obtiene el siguiente registro, se convence de que la partícula se está desacelerando y se va a dormir tranquilo.

t	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
x	3	4	5	6	6.5	7	7.2	7.4	7.6	7.65	7.68

9.- La suma de números reales: ¿es función ?

1.2 Conjuntos Asociados a una Función: *Dominio, Conjunto Imagen y Gráfico de una Función.*

1.2.1 Consideraciones acerca del dominio natural para f: A → B

En el párrafo 1, definimos función, los elementos que comprende este concepto, entre ellos: Dominio (A) y Codominio (B). Definimos luego Dominio y Codominio Natural (Dn y Cn) e indicamos que la determinación del Dn requería de varias consideraciones. (observación pág. 16). En este párrafo ampliamos este último punto.

■ Determinación del dominio natural en funciones que tienen la misma *fórmula* :

Función	**(I)** $y = \frac{100}{x - 0.2}$	**(II)** $w = \frac{100}{u - 0.2}$	**(III)** $P = \frac{100}{V - 0.2}$
Variables	v.i. → x v.d → y	v.i. → u v.d → w	v.i. → V (volumen) v.d → P (presión)
- restricciones propias de la fórmula:	$x \neq 0.2$	$u \neq 0.2$	$V \neq 0.2$
- restricciones debidas a la variables:	ninguna	ninguna	$V>0$; $P>0$
- restricciones propias del modelo:	ninguna	ninguna	$V>0.2$
Dominio Natural	**Dn=R-{0.2}**	**Dn=R-{0.2}**	**Dn = (0.2; +∞)**

Observaciones y Conclusiones:

✓ a funciones con fórmulas iguales pueden corresponder dominios iguales o distintos.
✓ si las variables son abstractas, a fórmulas iguales corresponden dominios iguales, no importa las letras con que se identifique a las variables. En la determinación del dominio sólo se deben tener en cuenta las restricciones de orden algebraico de la fórmula.
✓ si las variables son concretas, a fórmulas iguales pueden corresponder dominios distintos. En estos casos, en la determinación del dominio a más de las restricciones de orden algebraico también se debe considerar el sentido de las variables .
✓ en (I) y (II) los dominios son iguales (más allá de que se hayan usado distintas letras para la fórmula, ya que en ambos casos estas representan variables abstractas).
✓ en (I) y (III) los dominios son distintos, y en este caso sí tiene importancia que las letras sean distintas porque el cambio tiene ahora una intención, la de indicar que se modifica el carácter de las variables, que de abstractas pasan a ser concretas. (x,y son abstractas mientras que V, P son concretas).
✓ *en la determinación del dominio no influye el tipo de letra usado para representar las variables sino, y esencialmente, el carácter de las variables que tales letras representan.*

ⓘ En los párrafos siguientes vamos a estudiar propiedades de las funciones tales como *monotonía, simetrías, inyectividad, etc,* propiedades estas que luego usamos para *clasificarlas.* Vamos a ver también como muchas de estas propiedades dependen en forma muy importante del *dominio de la función*; como pueden incluso *cambiar* si para una misma ley consideramos distintos dominios. A este respecto es intuitivamente aceptable pensar que dos funciones con *propiedades distintas* son *distintas* y concluir por lo tanto que para que dos funciones sean iguales no basta con que tengan leyes iguales, que el domino de las mismas también debe ser considerado en la comparación. Precisamos *entonces* el concepto de **Igualdad de Funciones.**

DEFINICIÓN:

Igualdad de Funciones	"dos funciones son iguales si y solo si tienen la misma ley, el mismo dominio y el mismo codominio"

Así en los ejemplo vistos, (I) y (II) representan funciones iguales mientras que (I) y (III) representan *funciones distintas* (aún cuando todas tengan la misma ley).

Ejemplo 1:

Analizar si las funciones costo (c) y perímetro (p) indicadas a continuación son *iguales*:

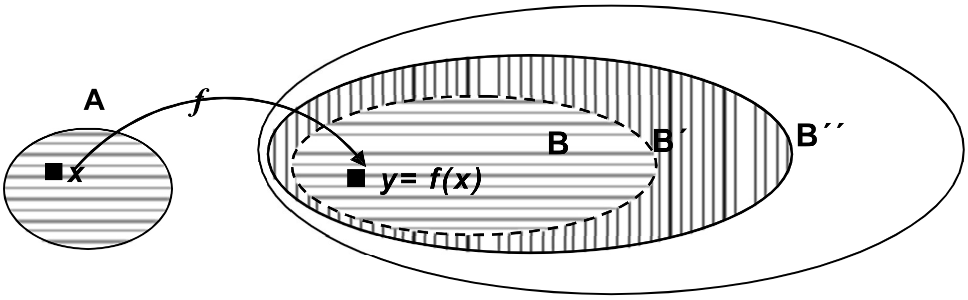
(I) c = c(n) con c(n)= *costo de ´n´ lápices de costo unitario $4.*
(II) p = p(***l***) con p(***l***)= *perímetro de un cuadrado de lado **l**.*

Solución:
A los efectos de realizar el análisis pedido procedemos a determinar ley y dominio natural de cada una de las funciones dadas. Como la ley está dada en forma verbal primero tratamos de expresarla a través de una fórmula (esto facilita la comparación) y luego, para establecer el dominio natural, tenemos en cuanta que en ambos casos se trata de variables concretas. Como codominio tomamos siempre los reales (R)

(I) c = c(n) con c(n) = 4.n y Dnc = $\mathbf{N_0}$ [n: *cantidad de lápices*]
(II) p = p(***l***) con p(***l***)= 4. ***l*** y Dnp = $\mathbf{R}^+$ [***l***: *longitud del lado del cuadrado*]

La ley es la misma pero los dominios son distintos.
Rta: las funciones costo y perímetro dadas no son iguales, ellas difieren en su dominio.

1.2.2 Consideraciones acerca del Codominio y Conjunto Imagen para *f:* A → B



Definimos el codominio de *f*, como el conjunto que contiene a todos los *y* tal que *y = f (x)* para algún *x* del dominio de *f.* De la definición resulta evidente que hallado un codominio, cualquier otro conjunto que lo contenga también puede ser tomado como codominio, ya que este también contendrá a todas los *y* tal que *y = f (x).* O sea,

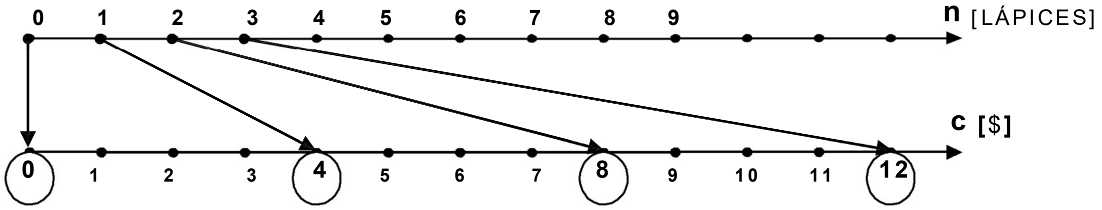
$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{B}\text{ codominio de } f,\\ \mathbf{B}\subset\mathbf{B}'\end{array}\right\}\ \mathbf{B}'\text{ también puede tomarse como codominio.}$$

Así, y en general, a la hora de decidir acerca del codominio de una función tenemos muchos conjuntos entre los cuales optar; luego, para garantizar y simplificar la elección (y de ser posible) tomamos el *mayor* de todos ellos.

Por ejemplo para las funciones ´costo´ y ´perímetro´ del ejemplo 1, un codominio posible es $\mathbf{R_0}^+$ (tanto costo como perímetro se informan con números no negativos).
$\mathbf{R_0}^+ \subset \mathbf{R}$; por lo tanto **R** *contiene* todas las imágenes y puede también tomarse como codominio. Como **R** es el ´mayor´, tomamos *Codominio c* = *Codominio p* = **R.**

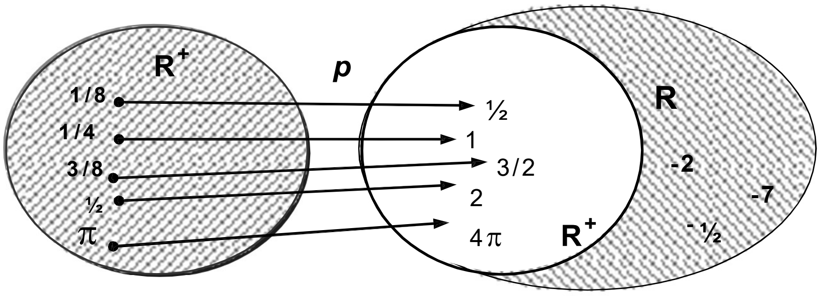
Recordemos que aún cuando las funciones tienen la misma ley (multiplicar por 4 la v.i.) y el mismo codominio (**R**), como Dnc = N_0 y Dnp = $\mathbf{R}^+$, entonces $\mathbf{c} \neq \mathbf{p}$. Luego, y según vimos, deben tener alguna propiedad *distinta*. Investigamos esto.

(*) c : $N_0 \rightarrow$ **R / c = 4n:** un diagrama de correspondencia puede ayudarnos en este caso:



Del gráfico vemos que hay números reales que no son ¨costo´ (*imagen*) de ninguna cantidad de lápices de $4. Por ejemplo, no existe ninguna cantidad que cueste $10.
Vemos que: *´c´ es un costo posible si y sólo ´c´ es múltiplo de 4.*
Esto indica que como codominio de esta función podemos tomar conjuntos ´más chicos´ que **R**, como por ejemplo, $\mathbf{R_0}^+$; $\mathbf{N_0}$ ó **C = {c∈R / c es múltiplo de 4}**

(*) ***p*** **:**$R^+ \rightarrow$ **R /** ***p*****= 4** ***l*** **:** en este caso para visualizar consideramos un diagrama de Venn.



Sabemos que no cualquier número real es ´perímetro´ (*imagen*) de un cuadrado de lado ***l***. Por ejemplo: no existe ***l*** tal que el perímetro del cuadrado sea, ***-2.***
Vemos que: *´p´ es un perímetro posible si y sólo ´p´ es un número real positivo*; equivalentemente, que la función perímetro *llega* y *cubre totalmente* al conjunto $\mathbf{R}^+$.
Esto nos dice que existe sólo un codominio ´más chico´ que **R** y que este es $\mathbf{R}^+$; que cualquier otro conjunto ´menor´ (por ej: **N**) no contendría todas las imágenes.

Conclusiones:

✓ dado que para el codominio solo pedimos que *contenga todas las imágenes*, a la hora de decidir el mismo, generalmente hay varios conjuntos entre los cuales optar. En tal caso, y si no existen restricciones, conviene tomar el ´más grande´ .

✓ si bien a partir del más grande podemos ´achicar´ el codominio, *hay un límite para ello*; es decir, hay un conjunto que es el ´menor codominio´ posible. Este codominio ´mínimo´ es aquél que contiene a todas las imágenes de la función, ***y solo a ellas***.

✓ para las funciones costo y perímetro, los ´codominios mínimos´ son:

- Codominio 'minimo' para ´costo´ = **{ c / c múltiplo de 4}**
- Codominio 'minimo' para ´perímetro´ = R^+.

o sea, *son distintos* . (encontramos una *propiedad* en la que difieren) .

✓vemos así que el ´codominio mínimo´ de una función, *depende de la función* (*ley y dominio*). Es por lo tanto un valor que la caracteriza, una propiedad a estudiar.

✓ existen muchos problemas cuya resolución requiere tomar el ´codominio mínimo´, de allí la importancia de este conjunto en la teoría de funciones. Luego, presentamos una definición equivalente del mismo (la más usual) e indicamos otros nombres con los que ordinariamente se lo llama, estos son: ***conjunto imagen, rango ó recorrido.***

DEFINICIÓN:

Conjunto imagen

Dada f: A → B llamamos conjunto imagen al conjunto de todas las imágenes de x por f. Lo indicamos: $Im\,f$.

$$Im\,f = \{ y \in B \,/\, y = f(x) \text{ para algún } x \in A \}$$

Según lo visto para las funciones ´costo´ y ´perímetro´ del ejemplo 1; tenemos:

$Im\,c = \{ c \,/\, c$ es múltiplo de $4 \} = \{0; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; \ldots\ldots\ldots.. \}$

$Im\,p = \mathbf{R}^+ = (0 ; +\infty)$

NOTA: en general a leyes distintas corresponden conjuntos imagen distintos; lo que remarcamos aquí es que las imágenes pueden ser distintas (***Im c ≠ Im p)*** aún cuando las funciones tengan *la misma ley;* que cuando decimos que dos conjuntos son distintos estamos señalando no sólo que estos difieren en la cantidad de elementos, sino también en cuanto a la calidad de los mismos; así, *Im c* es un conjunto *discreto* mientras que *Im p* es un conjunto *continuo.*

(c)
- ■ Ley : n $\longrightarrow$ c = 4 n
- ■ **Dominio = N₀**
- ■ Codominio = **R**
- ■ ***Imc*** = {0;4; 8; 12; 16,…}

(p)
- ■ Ley : $l \longrightarrow p = 4\,l$
- ■ **Dominio = $\mathbf{R}^+$**
- ■ Codominio = **R**
- ■ ***Im p*** = (0 ; +∞)

$$\boxed{\mathbf{c} \neq \mathbf{p}}$$

Actividad:

Dada $f(x) = 2x- 2$ hallar $Im\,f$ para cada uno de los dominios que se indica:

a) $D_f = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

b) $D_f = [0 ; 5]$

Solución:

a) en este caso el dominio es *discreto*; luego la imagen también lo es. Podemos dar el conjunto imagen por enumeración:

$$\boldsymbol{Im\ f} = \{ f(0); f(1); f(2); f(3); f(4); f(5) \} = \{ -2 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 \}$$

b) en este caso el dominio es *continuo*; luego la imagen también lo es. No podemos dar el conjunto imagen por enumeración; luego, lo damos indicando la *condición* que debe cumplir un número para pertenecer a él:

$$\boldsymbol{Im\ f} = \{y \in R/ \ y=2x-2 \text{ para algún } x \in [0,5]\} = \{ y \in R/ \ -2 \le y \le 8 \} = [-2 ; \ 8]$$

1.2.3 Gráfico de una función.

Vimos que una forma de dar una función era a través de su gráfica. En este párrafo puntualizamos y ampliamos este concepto para una f definida de A en B.

DEFINICIÓN:

gráfica de *f*	Llamamos *gráfica de f* al conjunto de todos los pares ordenados cuya primer componente es un elemento ***x*** del dominio y, su segunda componente, **la imagen de *x* por** *f*; la indicamos: $\textbf{\textit{graf f}} = \{(x,y) \,/\, x \in A,\ y = f(x)\} = \{(x; f(x)) \,/\, x \in A\}$

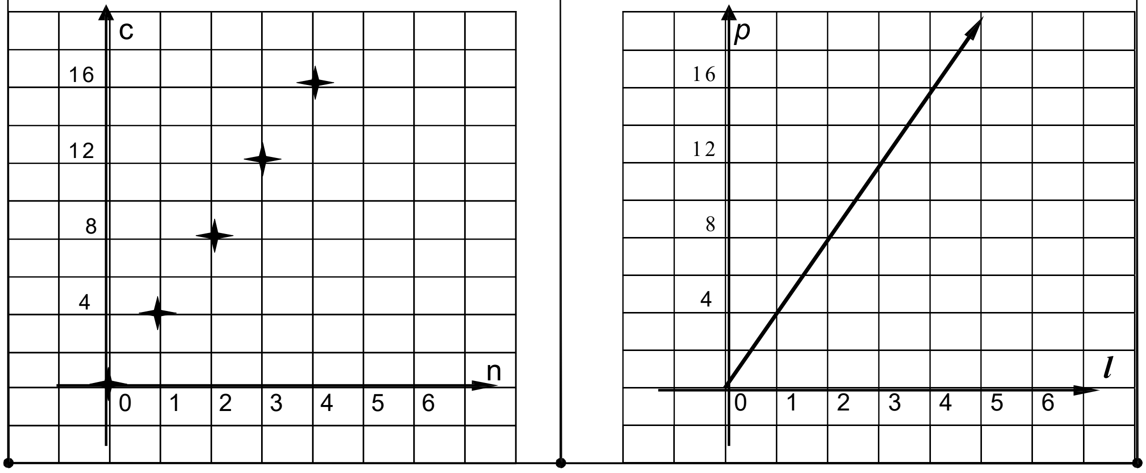
Observación:
Si A y B son conjuntos de números reales podemos introducir un sistema de coordenadas en el plano y, dada la identificación entre pares ordenados de números reales y puntos del plano, representar gráficamente al conjunto ***graf f.***
A esta representación la seguimos llamando **gráfica de** *f*. Por uso y costumbre convenimos en representar al primer elemento del par sobre el eje horizontal y al segundo sobre el eje vertical; así :

eje horizontal ↔ variable independiente ↔ dominio
eje vertical ↔ variable dependiente ↔ imagen

Ejemplo 2: **a)** obtener *graf c* para la función costo, c =4n , del ejemplo 1.
b) obtener *graf p* para la función perímetro, p = 4 ***l***, del ejemplo 1.

a) *graf* $c = \{(n;\, 4n) \,/\, n \in N_0\} =$
$= \{(0;0), (1;4), (2;8), (3;12), (4;16), ...\}$

b) *graf* $p = \{(l;\, 4l) \,/\, l \in (0; +\infty)\}$

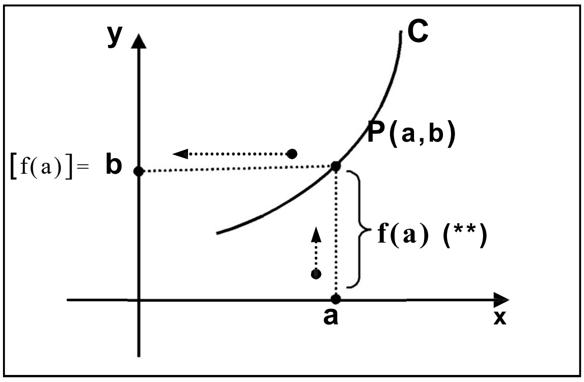


Observaciones:
✓ dominio e imagen de la *función costo* son conjuntos discretos y, consecuentemente, su gráfico es también un conjunto discreto.
✓ dominio e imagen de la *función perímetro* son conjuntos continuos; luego, su gráfico resulta un "continuo" de puntos.
✓ la gráfica de una función da idea del *comportamiento global de la función* ya que permite visualizar la misma en forma íntegra, conocer su *historia de vida*. Luego, resulta un elemento muy útil a los fines de estudiar propiedades y rasgos característicos de cada función.

1.3 Criterios Gráficos en el Análisis de Funciones

En este párrafo discutimos bajo que condiciones una curva en el plano resulta el gráfico de una función y, en tal caso, como se determinan Dn y Cn.

1.3.1 De cómo "leer" el gráfico de una función.



- Si **P** pertenece a la gráfica de la función f entonces si su *abscisa* es **a**,
  su *ordenada* es **f (a).**

P(a;b) ∈ graf. f ⇔ **a** ∈ **Dnf** y **b = f(a)**

- dominio ↔ eje horizontal ⇒ **a** ∈ **eje x**
- imagen ↔ eje vertical ⇒ **b** ∈ **eje y**

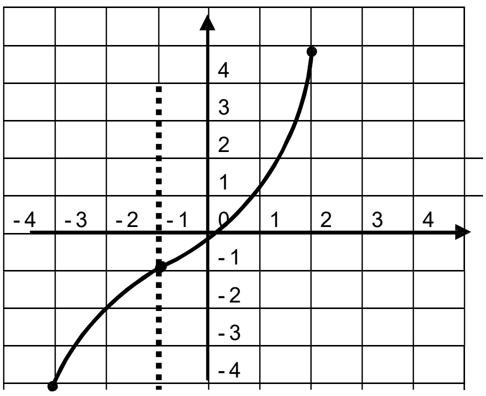
Conclusión:
Para *leer* la imagen de ´a´ desde el gráfico, podemos:

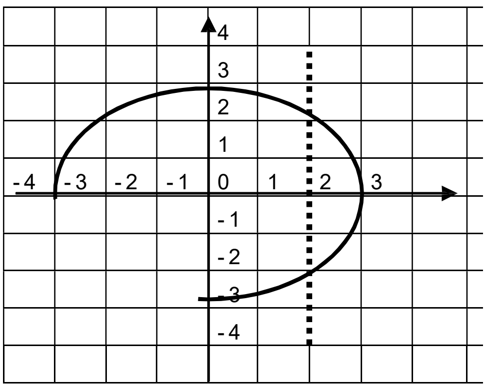
» partir de ´a´ y ´subir ´ (ó bajar) hasta la gráfica (si no la encontramos ⇒ ∄f(a)).
» al llegar a **P**, punto de la gráfica, doblar en ángulo recto y avanzar hacia el ´eje y´,
» llegado al eje y, leer allí el valor alcanzado. Este valor es **f(a).**

Observación:
Si sólo queremos el **´valor de f (a)´** podemos obtener el mismo directamente del gráfico con solo determinar la altura de ´a´ hasta la gráfica. **(**)**
Pero, *cuidado,* que si lo que queremos es **graficar f (a)**, ***debemos ir hasta el eje y.***

1.3.2 De cómo detectar si una curva plana es el gráfico de una función

El gráfico de una función real a variable real siempre es una curva plana.
Pero: *¿será toda curva plana el gráfico de una función?* .
Investigamos esta cuestión a través de analizar las curvas que se dan a continuación.
En ellas indicamos la ó las ordenadas (*y*) de los puntos sobre la curva que corresponden a las abscisas indicadas en cada caso:





x	-2	-1	0	1	2	
y	**-2**	***-1***	**0**	**1**	**5**	

x	-3	-2	0	2	3
y_1	**0**	**2**	**3**	**2**	**0**
y_2			**-3**	**-2**	

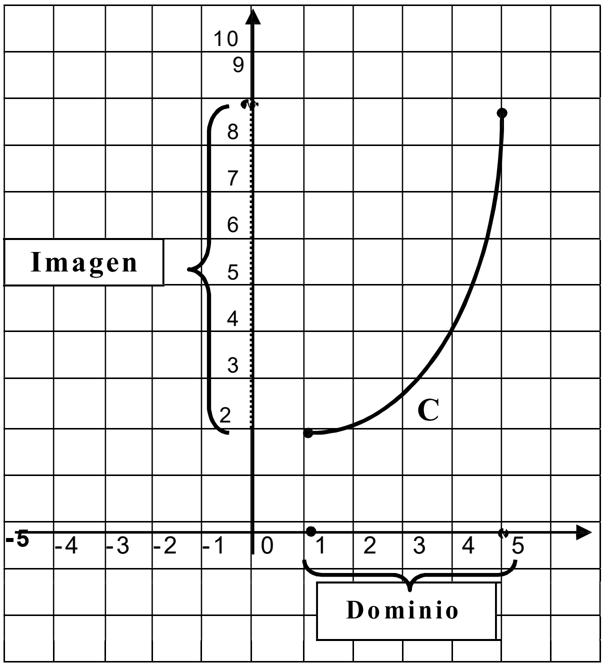
Al definir el concepto de función dijimos que los distintos elementos constituyentes de la misma debían cumplir ´condiciones´; entre ellas, que la ley debía asignar a cada elemento del dominio un único del codomino.

En las curvas propuestas: ¿sucede esto? ; ¿a cada *x* corresponde un único *y* ? Fácilmente observamos que en la primera curva esto es así mientras que en la segunda no. Concluimos entonces que la primer curva es el gráfico de una función mientras que la segunda no lo es.
¿Qué diferencia sustancial observamos entre ambas curvas?: que si consideramos rectas perpendiculares al eje x, en el primer caso estas cortan a la curva en un único punto, mientras que en el segundo caso esto no es siempre así; existen tramos de la curva donde la recta corta la curva en más de un punto (en el ejemplo, en dos)

- ***Prueba de la recta vertical*** , el análisis hecho permite concluir que:

Una **curva plana C** es el gráfico de una función de x si y sólo si
ninguna recta vertical corta a la curva en más de un punto.

1.3.3 Determinación de $Dn\,f$ e $Im\,f$ en una curva C tal que $C = graf\ f$



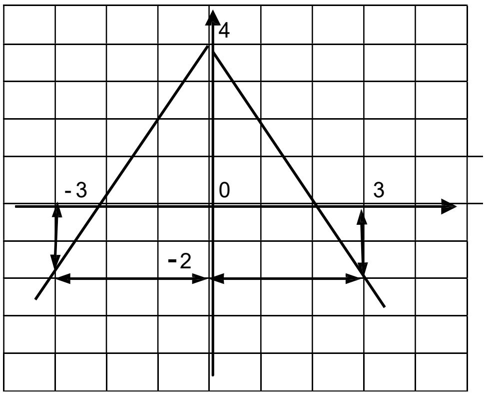
- Sea **C** ≅ **graf f** ; luego:
- **Dn** = ´proyección´ de C sobre eje x.
  Dn = [1 , 5]
- **Im f** = ´proyección´ de C sobre eje y.
  Im f = [2 , 9]

1.3.4 Propiedades de simetría y monotonía en el gráfico de una función

Uno de los objetivos esenciales del Cálculo ó Análisis Matemático es el de detectar propiedades o comportamientos de las funciones que permitan luego distinguirlas una de otras, reconocer la oportunidad de uso de cada una de ellas o descubrirlas entre la maraña de datos de un problema Así por ejemplo, interesará saber si una función presenta simetrías, si es asintótica a algún valor, si crece o decrece, si tiene ´cumbres´ o ´valles´. En lo que sigue vemos como la gráfica de la función puede ser de gran ayuda en la determinación de cuestiones tales como las mencionadas.

▪ SIMETRÍAS:

(I) Sea la función f la función cuya gráfica se indica a continuación:



» ¿Qué vemos?:

» que la parte del gráfico que corresponde a los *x < 0* se *refleja*, a través del *eje y ,* sobre la parte que corresponde a los *x >0*
Por ej: f (-3) = f (3) = -2

» Decimos que f es ***simétrica*** respecto del eje y. (*eje de simetría*)

» A la función que es simétrica respecto del *eje y*, la llamamos ***función par*** .

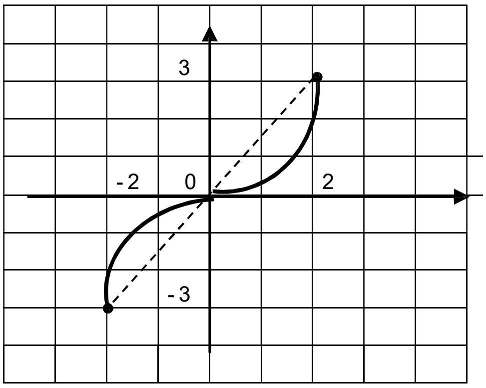
DEFINICIÓN

función par

Una función f se dice que es una función par si y sólo si

$$\mathbf{f(-x) = f(x)\ ;\quad \forall\ x \in D_f}$$

(I I) Sea la función f la función cuya gráfica se indica a continuación:



» ¿Qué vemos?:

» que la parte del gráfico correspondiente a los *x < 0* se puede obtener *girando* 180° alrededor del origen, la parte que corresponde a los *x >0.*
Por ej: f (-2) = -3 = - f (2)

» Decimos que f es ***simétrica*** respecto del origen.

» A la función que es simétrica respecto del *origen* la llamamos ***función impar***.

DEFINICIÓN

función impar

Una función f se dice que es una función impar si y sólo si

$$\mathbf{f(-x) = -\ f(x)\ ;\quad \forall\ x \in D_f}$$

Observaciones:

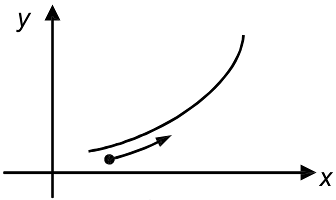
✓ Una función podrá ser par (o impar) si y sólo sí su dominio es simétrico respecto del origen, ya que en ambos casos se debe comparar **f(-x)** versus **f(x).**

✓ Una función **f** con **0 ϵ Dom**$_{\mathbf{f}}$ podrá ser impar si y sólo si **f(0) = 0.**

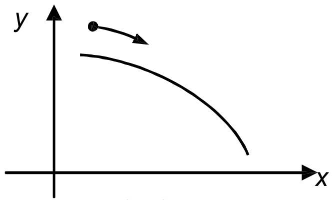
✓ La propiedad de ser *par* o *impar* está ligada a la *simetría de la gráfica*, si la gráfica de una función no presenta simetría alguna, *dicha función no es par ni impar.*

▪ MONOTONÍA:

Al observar el gráfico de una función puede ser que el mismo se eleve desde *abajo e izquierda* (↗) ó bien, caiga desde *arriba e izquierda* (↘).
En el primer caso decimos que la función *´crece´*, en el segundo que *´decrece´*



f crece



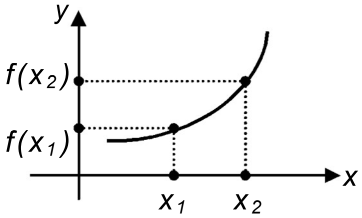
f decrece

DEFINICIÓN

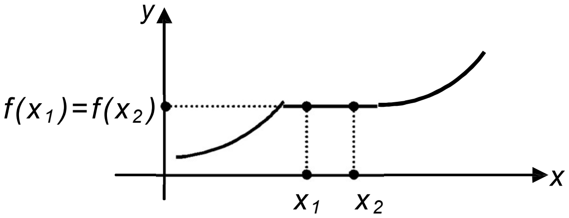
función creciente

Decimos que f es una *función creciente* en D, si y sólo si :

$$\forall\, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{D}\,;\quad \textbf{si}\ \ \mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}\ \ \textbf{entonces}\ \ \mathbf{f(x_1)} \leq \mathbf{f(x_2)}$$



función creciente *(estricta)*



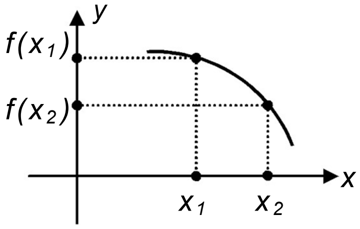
función creciente

DEFINICIÓN

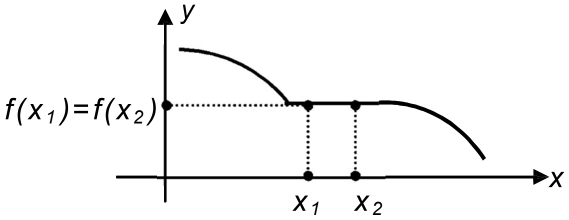
función decreciente

Decimos que f es una *función decreciente* en D, si y sólo si :

$$\forall\, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{D}\,;\quad \textbf{si}\ \ \mathbf{x_1} < \mathbf{x_2}\ \ \textbf{entonces}\ \ \mathbf{f(x_1)} \geq \mathbf{f(x_2)}$$



función decreciente *(estricta)*



función decreciente

Observaciones:

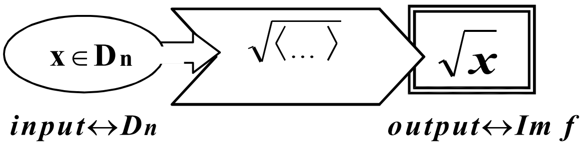
- ✓ si $\forall\ x_1 < x_2$ resulta $f(x_1) < f(x_2)$ entonces decimos que la función es *estrictamente creciente* en D.
- ✓ si $\forall\ x_1 < x_2$ resulta $f(x_1) > f(x_2)$ entonces decimos que la función es *estrictamente decreciente* en D.
- ✓ Cuando sólo queremos indicar que la función tiene un *comportamiento definido en D*; o sea que en todo su dominio *no cambia* el sentido en que se desarrolla (*siempre crece* ó *siempre decrece),* decimos que la función es ***monótona en D***.
- ✓ La monotonía es una propiedad que depende del dominio.
- ✓ Existen funciones que no son monótonas en su dominio.

▪ ***Una reflexión sobre dominio y codominio en los diagramas de máquina***

☞ Dn ; indica los valores que la *máquina* acepta procesar (insumos ó *input)*

☞ Im f ; indica los valores que la *máquina* produce (productos ó *output)*

Ejemplo 1: Sea $\mathbf{f}(x) = \sqrt{x}$



💣: x es admitido como *input* ⇔ $x \in \mathbf{Dn} = \mathbf{R}^+_0$

Nota: si consideramos la tecla $\sqrt{....}$ de la calculadora, observamos que la misma procede como el diagrama anterior. Efectivamente, introducido un $x \in \mathbf{R}$, si $x \geq 0$ entonces la calculadora lo acepta y procesa (en el visor leemos: $\sqrt{x}$); ***pero, si x < 0, en el visor leemos - E- (error) ; o sea, tal x no es aceptado como insumo, la calculadora no lo procesa.***

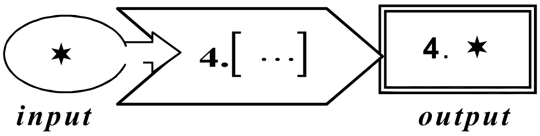
De aquí la asimilación que hacemos entre este tipo de diagrama y la calculadora.

Ejemplo 2:

(I) Sea c = c(n) con c(n) = costo de n lápices de \$4 c/u. ; $D_{nc} = N_0$.

(II) Sea p = p(***l***) con p(***l***)= perímetro de un cuadrado de lado ***l***.; $D_{np} = R^+$

En ambos casos, el diagrama de máquina es esencialmente el siguiente:



✶, indica un número.

💣 Entonces, ¿ambas funciones tienen *el mismo diagrama?.*

Como ya vimos, *costo* y *perímetro* son *funciones distintas*; luego, sus diagramas también deben serlo. Pero, ¿qué los distingue?: *los valores que aceptan como insumo.*

Así; *c* procesa *sólo números naturales o* 0 y *p* sólo *reales positivos*. Esto indica que para evaluar un diagrama de máquina (ó *función)* debemos ir más allá de lo simplemente *observable*; que también en matemática sucede que *´lo esencial es invisible a los ojos´.*

💣 Así como estos diagramas de ´costo´ y ´perímetro´ no son asimilables entre sí, en este caso, tampoco se los puede asimilar a una calculadora.

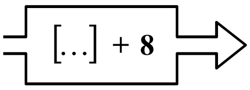
¿Por qué?: porque la multiplicación es una operación que no tiene ninguna restricción de orden algebraico luego, y en consecuencia, la calculadora (*como máquina de multiplicar)* acepta cualquier número real como entrada. Es decir, la única razón por la cual una calculadora discrimina un valor a los efectos de operar con él, es si *existen restricciones de tipo algebraico*, ya que así está programada. Por lo tanto, cada vez que las restricciones de una fórmula *no sean de tipo algebraico,* tendremos que el correspondiente diagrama de máquina y la calculadora no serán objetos *asimilables entre sí* ya que aceptan distinto tipo de insumo.
Cuidado, esto no quiere decir que no podamos usar la calculadora con este tipo de función sino que para trabajar con ella debemos extremar las precauciones, pues si no estamos alerta, *no nos avisa del error*.
Esta digresión tiene por objeto señalar la necesidad de hacer un uso *`inteligente´* de los auxiliares de cálculo , ya sean calculadoras, calculadoras graficadoras o computadoras. Estos instrumentos no pueden tomar decisiones de ´sentido común´. La `decisión final´, el `control´ sigue a cargo del hombre.

1.4 Operaciones con Funciones

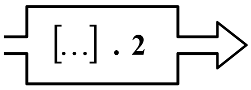
Dadas dos funciones, se puede *operar* con ellas y obtener una *nueva función*. En este párrafo analizamos cuales son las operaciones que se pueden hacer entre funciones, cómo se definen y cuales son las restricciones para que se puedan efectuar.

Ejemplo:

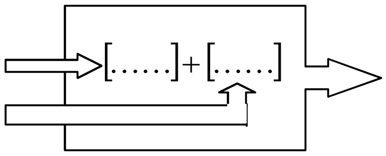
Sean **S_8** (sumar 8); **M_2** (multiplicar por 2) y **S** (sumar); tres *funciones* cuyos diagramas indicamos a continuación:



S_8 / **S_8** (x)=x+ 8

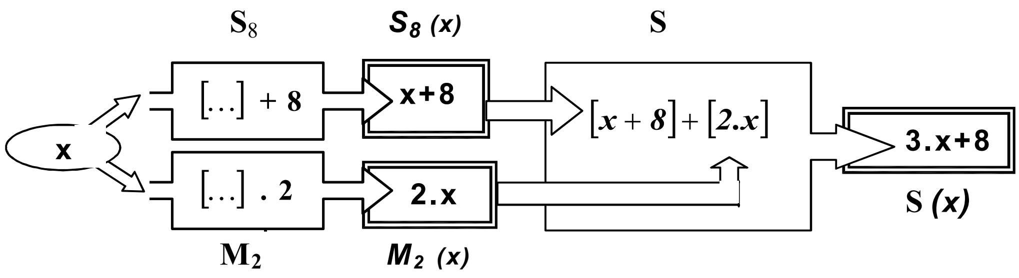


M_2 / **M_2** (x) = 2.x



S (*sumadora*)

Disponemos estas tres *´máquinas´* según el arreglo que mostramos a continuación y analizamos que pasa cuando procesamos un cierto valor, ***x***, en este dispositivo.



Vemos que al pasar **S_8 (x)** y **M_2 (x)** por **S** obtenemos **S*(x)* =3.x + 8** .
Vemos también que esta ley no es la de **S_8** ni la de **M_2** y concluimos en consecuencia que, *de la suma de dos funciones* resulta una *nueva función* (**S**).

- A **S** la llamamos ***función suma*** y la indicamos: **S = S_8 + M_2**
- Es fácil ver que si en vez de sumar **S_8** y **M_2** las restamos (multiplicamos ó dividimos) también obtenemos nuevas funciones, todas distintas entre sí.

En lo que sigue procedemos a investigar esta cuestión a través de realizar operaciones de distinta naturaleza sobre un conjunto básico de funciones a las que llamamos *´funciones elementales o tipo´*. Esto permitirá ir generando nuevas funciones cuyas propiedades y comportamiento iremos estudiando a medida que aparezcan.

1.4.1 Operaciones algebraicas

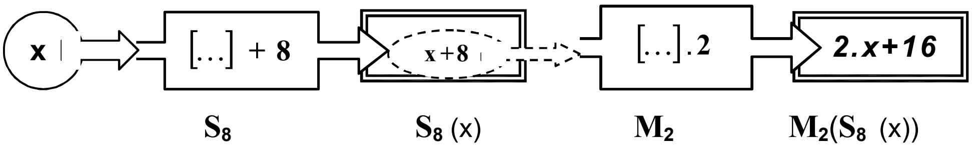
DEFINICIÓN:

Al operar algebraicamente con dos funciones f y g obtenemos las siguientes funciones:

- *FUNCION SUMA* **S** : **S = f+g** ; ley → $S(x) = f(x) + g(x)$
- *FUNCION RESTA* **R** : **R = f-g** ; ley → $R(x) = f(x) - g(x)$
- *FUNCION PRODUCTO* **P** : **P = f.g** ; ley → $P(x) = f(x) . g(x)$
- *FUNCION COCIENTE* **C** : **C = f/g** ; ley → $C(x) = f(x) / g(x)$

(*) Para las tres primeras: $D_n = D_f \cap D_g$ y, para el cociente, $D_n = D_f \cap [D_g - \{x / g(x)=0\}]$

ⓘ Las "operaciones algebraicas" no son las únicas operaciones posibles entre funciones. Para ver esto consideramos nuevamente las funciones **S_8** y **M_2** y analizamos cual es el resultado de ´***acoplar***´ una a continuación de la otra; o sea, qué obtenemos si *al resultado de pasar **x** por **S_8** lo pasamos luego por **M_2*** .

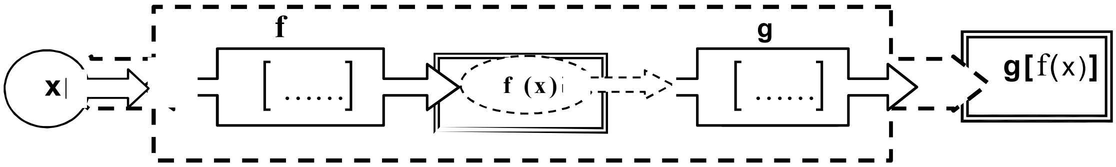


Podemos probar fácilmente que *´**2 x+16**´* no es suma (ni resta, producto ó cociente) de **S_8** y **M_2**; o sea, que *no es el resultado de una operación algebraica entre estas funciones*.

Conclusión: el resultado de ´***acoplar***´ funciones, o sea, de disponerlas de tal forma que una de ellas tenga como *´entrada´* las *´salidas´* de la otra, es una ´***nueva función***´. Luego, ´***acoplar***´ funciones es otra forma de operar con funciones. Como esta forma de operar en muy usual se conviene en darle un nombre y un símbolo para reconocerla.

1.4.2 Composición de Funciones.

Sean f y g dos funciones ***acopladas*** como sigue:



DEFINICIÓN:

g∘f
composición de funciones

Dadas f y g, llamamos ***función compuesta*** ó ***composición de g y f*** a la función que indicamos **g∘f** y definimos como sigue:

- » Ley (g∘f): **g∘f (x) = g(f(x))**
- » D (g∘f) = **D_n**
- » C (g∘f) = **C_g**

Ejemplo 1: para $\mathbf{S_8}$ y $\mathbf{M_2}$ vimos que acopladas de modo que $\mathbf{M_2}$ *siga* a $\mathbf{S_8}$ resulta:

$\mathbf{M_2}(\mathbf{S_8}(x)) = \mathbf{2.x+16}$. Luego:

» ley (M_2 o S_8): $\mathbf{M_2}$ o $\mathbf{S_8}(x) = \mathbf{2.x+16.}$

» Dn (M_2 o S_8) = **R**

» Cn (M_2 o S_8) = **R**

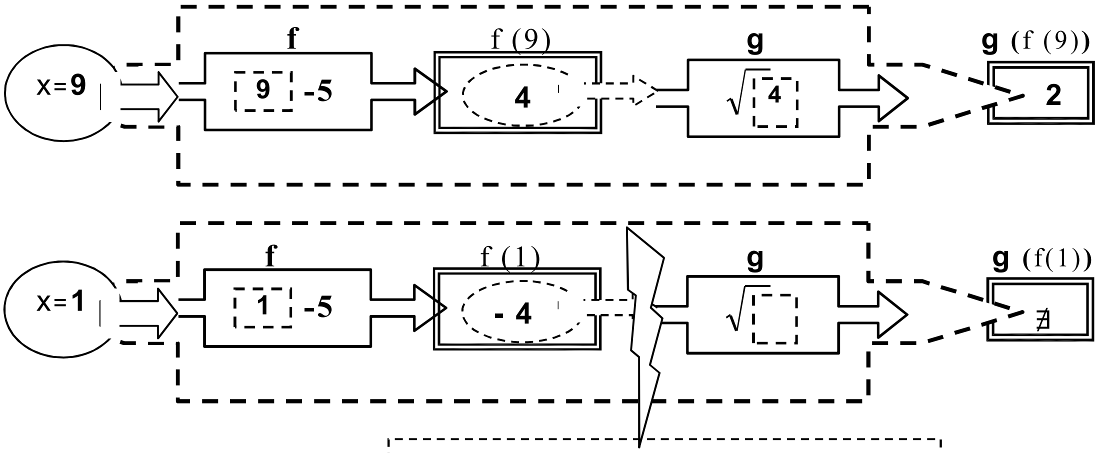
***Problema*:** (dominio natural y codominio), fácilmente apreciamos que las salidas de esta *máquina de componer* son elementos del codominio de g (la última que se aplica). Luego, no existe problema en que adoptemos este conjunto como codominio natural para la composición. Lo que no resulta tan claro es cuales son las entradas aceptables; es decir, cuál es, en general, el *dominio natural* de la composición. Sí, como en el caso del ejemplo, es el de la primera función que se aplica.

Investigamos esta cuestión a través de considerar otros ejemplos.

Ejemplo 2: Sean f y g las funciones que se indican a continuación:

- **f**: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ / $f(x) = x-5$
- **g**: $\mathbf{R_0^+} \rightarrow \mathbf{R}$ / $g(x) = \sqrt{x}$

¿El dominio de la función compuesta gof será igual al dominio de f (**R**)? Probamos con algunos valores.



-4 no puede entrar en g, la raíz cuadrada no procesa números negativos

***Conclusión*:** existen números que si bien son entradas válidas para f, no lo son para gof; o sea, *el dominio natural de gof no siempre es igual al de f.* Resulta claro entonces que estar en el dominio de f no es condición suficiente para estar en el de gof; pero cuidado, pues *sí es una condición necesaria*.

Luego para determinar el dominio natural de la función compuesta gof , debemos :

Dominio de gof

» hallar la ley de gof .

» hallar el dominio natural *de esta ley* (x´s para los cuales dicha ley puede ser calculada), al cual llamamos D_{ley}

» hallar el dominio natural de la primer función que se aplica: $D_{primera}$.

» finalmente: $D_{gof} = D_{ley} \cap D_{primera}$

Ejemplo 3: hallar gof y fog para las funciones f y g del ejemplo 2 .
Solución:

» $g_of\ (x) = g(f(x)) = g(x\text{-}5) = \sqrt{x-5}$
» $D_{ley} = [\,5, +\infty\,)$
» $D_f = \mathbf{R}$
» $D_{gof} = [\,5, +\infty\,) \cap \mathbf{R} = [\,5, +\infty\,)$

» $f_og(x) = f(g(x)) = f\,(\sqrt{x}\,) = \sqrt{x} - 5$
» $D_{ley} = [\,0\,, +\infty\,)$
» $D_g = [\,0\,, +\infty\,)$
» $D_{fo\,g} = [\,0, +\infty\,) \cap [\,0\,, +\infty\,) = [\,0, +\infty\,)$

Observación: gof $\neq$ fog ; o sea, la composición *no es conmutativa.*

Ejemplo 4:

Si $M_3(x)=3.x$; $D_3(x)= x/3$; $S_2(x)=x+2$; $S_8(x)=x+8$; $R_8(x)=x\text{-}8$; hallar la ley de las siguientes composiciones:

a) $M_3 \circ S_8$
b) $S_8 \circ M_3$
c) $S_8 \circ S_2$
d) $M_3 \circ [S_8 \circ S_2]$
e) $R_8 \circ S_8$
f) $D_3 \circ M_3$

Solución:

a) $M_3oS_8\ (x) = M_3\,(S_8\ (x)) = M_3\ (x+ 8)= 3(x+8) = \boldsymbol{3\ x\ +24}$
b) $S_8oM_3\ (x) = S_8\ (M_3(x)) = S_8\ (3.x) = \boldsymbol{3\ x + 8}$
c) $S_8oS_2\ \ (x) = S_8\ (S_2(x)) = S_8\ (x+2) = (x+2)+ 8 = \boldsymbol{x\ +10}$
d) $M_3o[S_8\ oS_2]\ (x) = M_3\ (S_8\ oS_2\ (x))= M_3(S_8(S_2\ (x))= M_3(S_8\ (x+2)) =$
$= M_3\ ((x+2) + 8) = M_3\ (x\ +10) = 3\ (x+10) = \boldsymbol{3x+30}$
e) $R_8oS_8\ (x)= R_8(S_8(x)) = R_8\ (x+ 8)= (x+8)\text{-}8 = \boldsymbol{x}$
f) $D_3oM_3\ (x)= D_3(M_3(x))= D_3\ (3.x) = (3.x)/3 = \boldsymbol{x}$

Observaciones:

1) se pueden componer más de dos funciones ((d)) ya que no existe límite para el número de funciones a componer. Por ejemplo, si son tres funciones (f, g y h), la ley de
"h compuesta con g, compuesta con f " resulta: **h** o **g** o **f (x) = h (g(f(**x**))** .
2) la composición no es conmutativa; en general el resultado depende *del orden* en que se componen las funciones. (M_3 o $S_8 \neq S_8$ o M_3)
3) en (e) y (f) observamos un fenómeno particular, que tanto R_8 o S_8 como D_3 o M_3, aplicadas a ***x*** dan como resultado ***x***. Que para que ello pase, la segunda función aplicada debe '*deshacer*' lo hecho por la primera; la segunda, ser *´la inversa´* de la primera

función identidad	A la función que lleva cada elemento en sí mismo se le da el nombre de función identidad y se la indica con el símbolo ***id*** ; o sea: ***id* (x) = x**

4) luego, $R_8\ oS_8 = id$ y $D_3\ oM_3 = id$

Ejemplo 5: Hallar una función *g* que haga cierta las siguientes igualdades:

a) g o $D_4 = id$; b) g o $R_7 = id$; c) g o $[S_7$ o $M_4] = id$

Solución: observamos que *g,* la función que debemos hallar, debe ser tal que *deshaga* lo hecho por la o las funciones aplicadas antes que ella. Este problema, en este caso, se puede resolver mentalmente. En (a) por ejemplo es fácil ver que lo *inverso* de dividir por 4 es, *multiplicar por 4;* luego: $g = M_4$. Lo resolvemos analíticamente para justificar esto.

a) $g\text{o}D_4\,(\mathbf{x}) = g\,(D_4\,(x)) = g\,(x/4) = \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad g\,(x) = 4.x \quad [\rightarrow\ g = M_4\,]$

b) $g\text{o}R_7\,(\mathbf{x}) = g\,(R_7\,(x)) = g\,(x-7) = \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad g\,(x) = x+7 \quad [\rightarrow\ g = S_7\,]$

c) $g\ \text{o}\ [S_7\ \text{o}\ M_4]\,(\mathbf{x}) = g\,(\,S_7\,(\,M_4\,(x)) = g\,(\,(4\,x) + 7\,) = \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = (x-7)/4$

$[\rightarrow\ g = D_4\text{o}R_7\,]$

✋ Corroboramos que en cada caso, la función *g*, la que permite *volver al punto de partida*, es efectivamente la que *invierte* la operación original. Así; si dividimos, *para volver*, debemos multiplicar; si restamos, sumar; o, si hacemos operaciones combinadas como en (c), realizar las operaciones inversas, *en orden inverso*. (si multiplicamos por 4 y luego sumamos 7, para *deshacer* esto debemos restar 7 y luego dividir por 4)

¿Será esto siempre posible?; o sea, para cualquier función que se tenga, ¿será siempre posible encontrar otra que deshaga lo que esta hace ó, equivalentemente, *que invierta la correspondencia que ella determina?*. En lo que sigue tratamos esto.

1.4.3 Función Inversa

En este párrafo analizamos otra *operación* a la que podemos someter a las funciones: aquella que a partir de una función permite obtener otra con una propiedad muy especial: *la de invertir la correspondencia determinada por la original*; o sea, una función que: *conocida la imagen de un punto a través de una función dada, permita hallar el punto .*

Ejemplo 1:
Supongamos que un químico, a partir de introducir un soluto en un solvente se dedica a registrar la concentración de la solución resultante, a intervalos de 30 minutos y durante tres horas. Tal registro se presenta en la tabla 1. Esta claro que en tal caso el químico está considerando la concentración (C) en función del tiempo (t); o sea, C = f (t) y que la función f está dada por la tabla 1.

tabla 1 **C= f(t)**	t (min.)	0	30	60	90	120	150	180
	C(mg/l)	0	68	159	258	345	409	450

Supongamos que luego de realizado el registro, otro día, el químico se interesa por saber cuanto tiempo fue necesario para alcanzar cierta concentración. O sea que, dada una concentración, quiere determinar el tiempo requerido para alcanzarla.
Evidentemente para conocer esto (y para ciertos valores de concentración) le basta con ´invertir´ la lectura en la tabla 1. En tal caso, está obteniendo t como *función de C*; o sea, t = g(C) con g dada por la tabla 2. Así, la función que invierte la correspondencia original existe y está dada por la tabla 2.

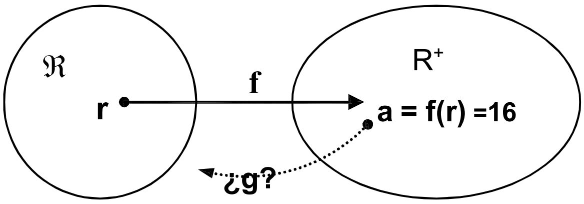
tabla 2 **t =g (C)**	C(mg/l)	0	68	159	258	345	409	450
	t (min.)	0	30	60	90	120	150	180

Ejemplo 2:

Siendo $\Re = \{ r \,/\, r$ rectángulo de lados b y h, con $b,h \in R^+ \}$, definimos:

$f: \Re \rightarrow R^+$

$r \rightarrow a = f(r)$ con $f(r)$ = área de r



En este caso: ¿existe g, función que invierta la correspondencia determinada por f ?.
Equivalentemente:
¿existe g tal que a cada ***a*** positivo asigne un rectángulo en ℜ, sólo uno y de área ***a*** ?.
En este caso vemos que no existe tal función. ¿Porqué?: porque dado ***a*** podemos determinar infinitos rectángulos con este área y entonces: ¿cuál de ellos tomamos?; ¿cuál de ellos asignamos a ***a*** ?. Por ejemplo si ***a*** =16 tenemos :

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & r_1 \leftrightarrow [\, h = 1 \,;\, b = 16 \,] \\
 & r_2 \leftrightarrow [\, h = 2 \,;\, b = 8 \,] \\
\boldsymbol{a} = 16 \arrow[ruu] \arrow[ru] \arrow[r] \arrow[rd] \arrow[rdd] & r_3 \leftrightarrow [\, h = 4 \,;\, b = 4 \,] \\
 & r_4 \leftrightarrow [\, h = 5 \,;\, b = 3.2 \,] \\
 & r_5 \leftrightarrow [\, h = \pi \,;\, b = 16 / \pi \,]
\end{tikzcd}$$

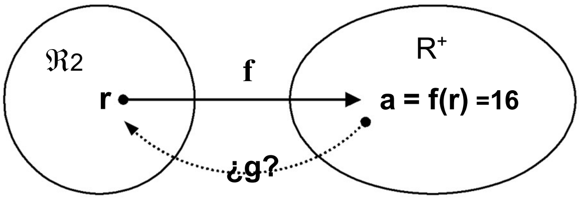
$g(a)$ = ¿ r_5 ? ; ¿ r_2 ?; ¿ r_1 ?

Ejemplo 3:

Siendo $\Re2 = \{ r \,/\, r$ rectángulo de lados b y h, con $h = 2, b \in R^+ \}$, definimos:

$f: \Re2 \rightarrow R^+$

$r \rightarrow a = f(r)$ con $f(r)$ = área de r



En este caso: ¿existe g, función que invierta la correspondencia determinada por f ?.
Equivalentemente:
¿existe g tal que a cada ***a*** positivo asigne un rectángulo de ℜ2, sólo uno y de área ***a*** ?.
En este caso vemos que sí existe tal función. ¿Porqué?: porque dado ***a*** hallamos un único rectángulo cuya área sea ***a*** y esté en ℜ2 ; luego, podemos *'volver'*.
Por ejemplo si ***a*** =16 tenemos :

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & r_1 \leftrightarrow [\, h = 1 \,;\, b = 16 \,] \\
 & \mathbf{r_2 \leftrightarrow [\, h = 2 \,;\, b = 8 \,]} \in \Re2 \\
\boldsymbol{a} = 16 \arrow[ruu] \arrow[ru] \arrow[r] \arrow[rd] \arrow[rdd] & r_3 \leftrightarrow [\, h = 4 \,;\, b = 4 \,] \\
 & r_4 \leftrightarrow [\, h = 5 \,;\, b = 3.2 \,] \\
 & r_5 \leftrightarrow [\, h = \pi \,;\, b = 16 / \pi \,]
\end{tikzcd}$$

$g(a) = r_2$

Así, y en general, para g tenemos que:

$g: R^+ \rightarrow \Re2$

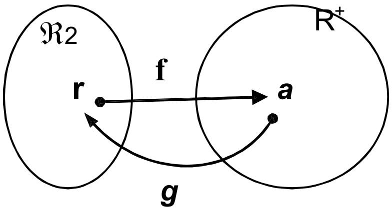
$a \rightarrow r = g(a)$ con $g(a)$ = rectángulo de $\Re^2$ cuya área es a.

ⓘ La ley de *g* admite (como cualquier función) varias formas de ser expresada. De todas ellas buscamos aquella que resulte la más general posible (en el sentido de que sirva para este ejemplo y para cualquier otro de la misma naturaleza), la que 'explicite', 'haga visible' la propiedad fundamental que caracteriza a la función *g*: *la de invertir la correspondencia determinada por* f . Así, y bajo estas condiciones tenemos que:

$g(a) = \mathrm{r}$ [*rectángulo cuya área es a*] $\xleftrightarrow[\textit{escribir como}]{\textit{lo podemos}}$ $g(a) = \mathrm{r} \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{r}) = a.$

$g: \mathrm{R}^+ \rightarrow \Re 2$

$\mathrm{a} \rightarrow \mathrm{r} \;/\; g(a) = \mathrm{r} \Leftrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{r}) = a$.



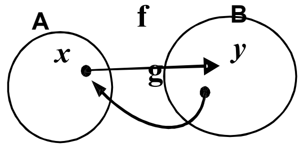
Los ejemplos analizados justifican la siguiente:

DEFINICIÓN:

función inversa

Dada **f**:A→B, si existe una función **g**:B→A que invierte la correspondencia determinada por **f**, a **g** la llamamos función inversa de **f** .

O sea: **g** inversa de **f** ⇔



» **Dominio g** = Codominio f

» **Codominio g** = Dominio f

» **Ley de g**: $\mathrm{g}(y) = x \Leftrightarrow \mathrm{f}(x) = y$

ⓘ Algunas veces, no todas, la ley de la función inversa se puede expresar a través de una fórmula. Obviamente, si tal fuera el caso, buscamos la fórmula.

Ejemplo 4: M_3: ¿admite inversa?

$\mathrm{M}_3\!: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$

$\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{y} = 3.\mathrm{x}$

$\mathrm{g}: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$

$\mathrm{y} \rightarrow \mathrm{g(y)} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \mathrm{M3}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{y}$

$\mathrm{g(y)} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow 3.\boldsymbol{x} = \mathrm{y}$

$$\underbrace{\mathrm{g(y)} = \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathrm{y}/3}_{\mathrm{g(y)} = \mathrm{y}/3}$$

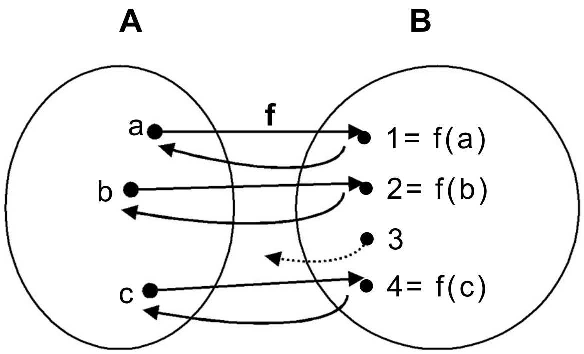
Respuesta: existe g inversa de M_3 (multiplicar por 3), y $\mathrm{g} = \mathrm{D}_3$ (dividir por 3)

Cuestiones relativas a la función inversa

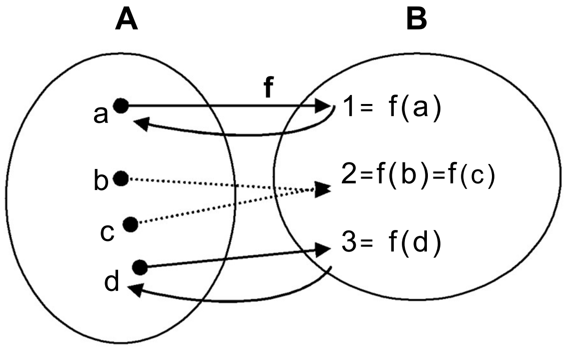
- Definida la función inversa surge la siguiente inquietud: ¿siempre existirá?; ¿cualquiera sea la función de partida?. La respuesta a estas preguntas es NO. En el ejemplo 2 tenemos una función que no admite inversa.

- La existencia de función inversa está sujeta a ciertas restricciones sobre f, la función original. Estas restricciones están relacionadas con las condiciones que debe cumplir una correspondencia entre conjuntos para ser función.

- Dada f: A→ B, básicamente son dos los problemas que se pueden presentar para la existencia de g, inversa de f ; o sea, de g: B→ A tal que $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.



Problema 1: que existan elementos de B (codominio f), que no sean imagen por f de ningún elemento de A. Si estos puntos existen, g (función que *´vuelve´), no se puede definir en todo* B .
En el ejemplo, el elemento 3 del conjunto B no puede *volver* a A (no provino de A); luego, no se puede definir g(3) .
Conclusión: no existe función inversa.



Problema 2: que existan elementos en B, imagen por f de más de un elemento de A. Si estos puntos existen, g (función que *´vuelve´*) *no se puede definir en ellos*.
En el ejemplo, el elemento 2 del conjunto B puede *volver* tanto a *b* como a *c*; o sea, le corresponden dos valores en A. Luego, esta correspondencia no puede ser función.
Conclusión: no existe función inversa.

- ¿Qué particularidad de f origina el Problema 1? : que **Im f ≠ C$_f$.**
- ¿Qué particularidad de f origina el Problema 2?: que ***distintos elementos del dominio, tienen imágenes iguales .***

Para identificar las funciones que tienen el Problema 1 y/ó el Problema 2 definimos tres nuevos conceptos: *suryectividad ; inyectividad y biyectividad*

DEFINICIÓN

función suryectiva

f es suryectiva ⇔ **Im f = C**$_f$. (Imagen igual a Codominio)

- En el Problema 1, f no es suryectiva : **Im f =** {1, 2, 4} ≠ **C**$_f$ = {1, 2, 3, 4}

- En el Problema 2, f es suryectiva : **Im f =** {1, 2, 3 } = **C**$_f$ = {1, 2, 3 }

DEFINICIÓN

función inyectiva

f es inyectiva ⇔ $\forall$ a,b $\in D_f$; **a ≠ b** ⇒ **f(a) ≠ f(b)**

- En el Problema 1, f es inyectiva : f(a) ≠ f(b) ; f(a) ≠ f(c) ; f(b) ≠ f(c)

- En el Problema 2, f no es inyectiva : b ≠ c y f(b) = f(c) =3

DEFINICIÓN

función biyectiva	f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva y suryectiva

Conclusiones:

1) el codominio de una función juega un rol importante en cuanto a la existencia de función inversa. El Problema 1 muestra que si $\mathbf{C}_f \neq \mathbf{Im\ f}$ entonces f no admite función inversa. Dicho de otra forma, usando las nuevas definiciones:

f ***no suryectiva*** $\Rightarrow$ **f** ***no admite inversa***

Luego, la suryectividad es *condición necesaria* (CN) para la existencia de inversa.
Por otro lado, en el Problema 2, f es suryectiva y sin embargo tampoco admite inversa. O sea, la suryectividad *no es condición suficiente* (CS) para la existencia de inversa.

2) la calidad de las imágenes de una función también juega un rol importante en cuanto a la existencia de función inversa. El problema 2 muestra que si elementos distintos del dominio de f *tienen imágenes iguales* entonces no existe función inversa. De otra forma:

f ***no inyectiva*** $\Rightarrow$ **f** ***no admite inversa***

Luego, la inyectividad es *condición necesaria* (CN) para la existencia de inversa.
Por otro lado, en el Problema 1, f es inyectiva y sin embargo no admite inversa. O sea, la inyectividad *no es condición suficiente* (CS) para la existencia de inversa.

RESUMEN:

(I) no toda función admite inversa.
(II) la SURYECTIVIDAD es CN para la existencia de inversa; pero no es CS
(III) la INYECTIVIDAD es CN para la existencia de inversa; pero no es CS.

- ¿Existe alguna *condición suficiente* (CS) para la existencia de función inversa?.

Es fácil verificar que si se cumplen *las dos condiciones necesarias* (suryectividad e inyectividad) entonces existe *función inversa*. O sea, que la biyectividad es una *condición necesaria y suficiente* para la existencia de inversa:

$$\boxed{\text{f admite inversa} \Leftrightarrow \text{f es biyectiva}}$$

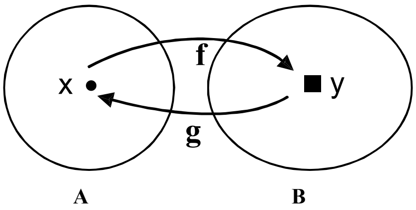
- La función inversa de f se acostumbra a indicar con el símbolo f^{-1}.

En principio, y hasta tanto no se domine la noción de función inversa, no vamos a usar esta notación ya que la misma puede confundirse con la de función recíproca de f (1/f) y, sin dudas, inversa y recíproca son funciones muy distintas una de otra.
Así; la ley de $\mathbf{f}^{-1}$ inversa de **f** es: $\mathbf{f}^{-1}(\mathrm{y})=x \Leftrightarrow \mathbf{f}(x)=y$; mientras que,

la ley de $\mathbf{1/\boldsymbol{f}}$, la recíproca de f, es: $\left(\frac{1}{f}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{f(x))}$

- Si g es la inversa de *f* , entonces *f* es la inversa de g.
  O sea; la inversa, *de la inversa de f,* es *f* → $(f^{-1})^{-1} = f$

- Sea f : A → B ; g: B → A
  x → y= f(x) y → x / g(y)=x ⇔ f (x) =y



Entonces:

$$gof(\mathbf{x}) = g(f(x)) = g(y) = \mathbf{x}$$
$$fog(\mathbf{y}) = f(g(y)) = f(x) = \mathbf{y}$$

O sea:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{gof(x) = x \;;\; \forall\, x \in A \;\Rightarrow\; gof = id_A} \\ \mathbf{fog(y) = y \;;\; \forall\, y \in B \;\Rightarrow\; fog = id_B} \end{array}}$$

(*) La primera ecuación dice que si partimos de x, aplicamos f y luego g (inversa de f) entonces *volvemos a x* .De este modo queda claro que la inversa de f *deshace* lo que f hace. La segunda ecuación dice que f deshace lo que g hace. Por ello es que estas ecuaciones se llaman ***ecuaciones de cancelación.***

- Otra condición necesaria y suficiente para que g sea la inversa de f es que la composición de ambas de por resultado la identidad: **gof = fog = id** (en A ó B)

- ***Proceso para determinar g, función inversa de una función biyectiva* f**

» Explicitamos claramente dominio, codominio, variables y ley de f .
» Verificamos que f sea biyectiva.
» Establecemos claramente dominio y codomino de g inversa de f .
» Establecemos la ley de g, por definición: ***g (y)=x sii* f *(x) =y***
» Si la ley de f está dada por una fórmula, intentamos expresar g por una fórmula. Para ello, a partir de la ecuación y = f(x) debemos llegar a la ecuación x = g(y); proceso este que será factible toda vez que podamos despejar x en términos de y.
» De ser necesario, intercambiamos x con y para expresar g como función de x.

Ejemplo: hallar la función inversa de f si $f = S_5 \circ M_2$

» f : R → R / y = f(x) con $f(x) = S_5 \circ M_2\,(x) = 2.x+ 5$
» f es biyectiva → f admite función inversa "g"
» g : R → R
» Ley g (*x def.)* :

$$\underbrace{\begin{array}{l} g(y) = \mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; f(\mathbf{x}) = y \\ g(y) = \mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; 2.\mathbf{x} + 5 = y \\ g(y) = \mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = (y - 5)/2 \end{array}}$$

despejamos x

Ley g (*x fórmula.)* **g(y) = (y - 5)/2**

» Si intercambiamos x con y → y=g(x) con g(x) = (x - 5)/2
» Finalmente: $g = D_2 \circ R_5$, es la función inversa de f.

Observación: *¿despejar?, ¿qué operación es esta?*

✓ Conocer el concepto de función inversa nos permite comprender que hacemos, en esencia, cuando *despejamos* una incógnita en una ecuación; que, *despejar x* de la ecuación $y = f(x)$, no es otra cosa que aplicar a ambos miembros de la ecuación la función inversa de f.

Efectivamente, si a

$$\left.\begin{array}{ll} & \boldsymbol{y = f(x)} \\ \text{aplicamos } f^{-1} & f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \\ \text{obtenemos:} & f^{-1}(y) = f^{-1} \text{o} f(x) \\ \text{o sea:} & f^{-1}(y) = id(x) = x \end{array}\right\} \boldsymbol{x = f^{-1}(y)}$$

✓ En el ejemplo, para $f = S_5 o M_2$ encontramos que su inversa es $g = D_2 o R_5$. O sea, corroboramos lo que ya habíamos descubierto para la composición de funciones, *que la inversa de la compuesta es la compuesta de las inversas, en el orden inverso.*

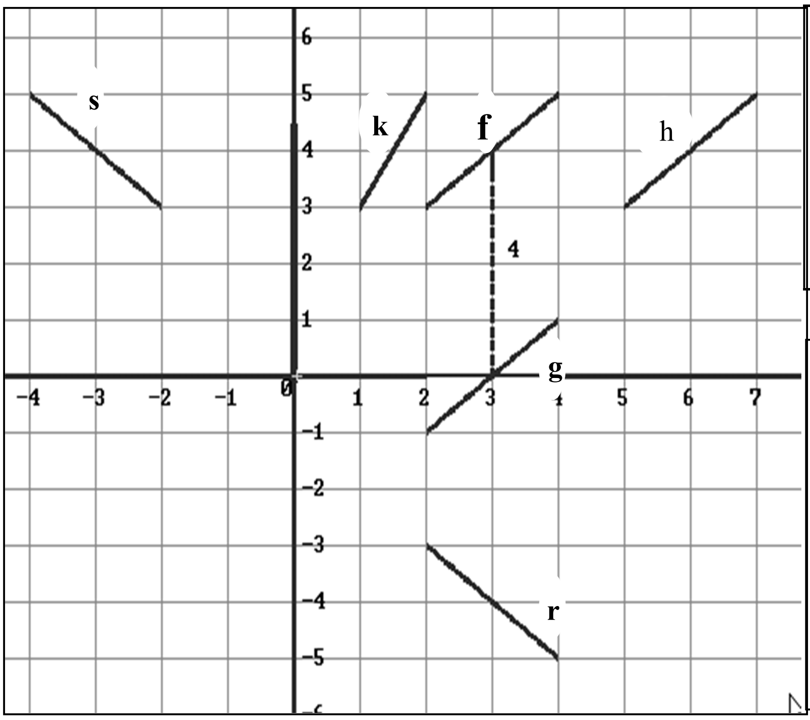
$$\boldsymbol{(k \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ k^{-1}}$$

A la vez, concluimos que *despejar x* de $y = f(x)$ en el caso que f es una función compuesta, $f = k \text{ o } h$, *no es otra cosa que aplicar, paso a paso, y en orden inverso, las funciones inversas de cada una de las que forman la composición.*

1.4.4 Operaciones gráficas con funciones

En los párrafos anteriores vimos distintos tipos de operaciones con funciones dadas: *operaciones algebraicas*, *de composición* y *de búsqueda de inversa*. En este párrafo vemos otra forma de generar funciones a partir de una dada: a través de *operaciones gráficas* (traslaciones, deformaciones, reflexiones, etc) Así, dada la función **y =f(x),** su gráfico **C** puede ser *trasladado*, *deformado* o *reflejado respecto de un eje*; operaciones todas estas que en forma genérica reciben el nombre de *transformaciones.*
Este conjunto de acciones permite un abordaje distinto de las funciones; facilita, a partir de entender las mismas como ***curvas completas*** asociadas a una ***función prototipo,*** el estudio de los aspectos globales que las caracterizan y/o distinguen.
Efectivamente, al efectuar una transformación sobre **C** obtenemos una nueva curva, **C***; por ende, una nueva función, **g** tal que **graf g=C*** . La expresión analítica de esta nueva función es de la forma **g**(x)=A.**f**(ax+b)+B; con **f** la función original (*la prototipo)* y a, b, A , B constantes cuyo valor depende de la transformación aplicada; constantes que en general llamamos *parámetros.*
Tales *parámetros* resultan así el nexo entre la función original y su transformada, entre sus correspondientes formas analíticas y gráficas. Luego, para estudiar las operaciones gráficas sobre curvas, su efecto sobre la función correspondiente, basta con estimar el efecto de la variación de parámetros en la forma analítica **y**=A.**f**(ax+b)+B.

En lo que sigue, a partir de $f(x)=x+1$ con $Df=[2,4]$ realizamos una serie de operaciones gráficas y establecemos las expresiones analíticas que les corresponden.



g → traslación

h → traslación

k → contracción

s → reflexión s/ eje y

r → reflexión s/ eje x.

g (x) = f (x) - 4

h (x) = f (x-3)

k (x) = f (2.x)

s (x) = f (- x)

r (x) = - f (x)

Conclusiones:

1) las traslaciones parecen estar asociadas a la suma (ó resta) de un parámetro a la función o a la variable, según la dirección y sentido de la traslación.
2) la contracción resultaría como consecuencia de multiplicar la variable por un número positivo mayor que 1.
3) las reflexiones parecen resultar de multiplicar por -1 la variable ó la función, según sea el eje respecto al cual se producen.

Estos hechos para ser enunciados como reglas deben ser demostrados:

Demostramos una de ellas el resto queda como ejercicio:
"si el graf g resulta de *trasladar k unidades hacia abajo* el graf f, entonces g(x)=f(x) – k".

Dados Q ∈ graf g y P ∈ graf f , ambos con la misma abscisa, entonces la ordenada de Q es menor que la de P y la distancia entre ellos es igual a *k*.

- P ∈ graf f → P (x, f(x))
- Q ∈ graf g → Q (x, g(x)) / g(x) < f(x)

$$d\,(Q,P)= \sqrt{(x-x)^2+(f(x)-g(x))^2} = |f(x)-g(x)| \xrightarrow{d(Q,\,P)=k} |\,f(x) - g(x)| = k$$

$$g(x) < f(x) \rightarrow |\,f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$$

- luego, | f(x) –g(x)| = k → f (x) – g(x) = k → **g(x) = f(x) - k**

- La siguiente TABLA resume las transformaciones fundamentales.

	TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES	
	Def. de g	**Transformación a realizar sobre el grafico de f para obtener el grafico de g.**
traslaciones	**g(x) = f(x) + k**	**.... subir k unidades**
	g(x) = f(x) - k	**.... bajar k unidades**
	g(x) = f (x + h)	**.... trasladar h unidades a izquierda**
	g(x) = f (x - h)	**.... trasladar h unidades a derecha**
alargamientos	**g(x) = c f (x)**	**.... alargar verticalmente en un factor ´c´**
	g(x) = (1/c) f (x)	**.... comprimir verticalmente en un factor ´c´**
	g(x) = f (c.x)	**.... comprimir horizontalmente en un factor ´c´**
	g(x) = f ((1/c) x)	**.... alargar horizontalmente en un factor ´c´**
reflexiones	**g(x) = - f(x)**	**.... reflejar respecto del eje x**
	g(x) = f(-x)	**.... reflejar respecto del eje y**
	g(x) = | f(x) |	**.... reflejar respecto del eje x la parte del graf f que está *por debajo del eje x.***
	Las constantes k , h y c cumplen: k >0 ; h > 0 ; c > 1	

- Las funciones, según su *estructura algebraica* se clasifican en:

polinómicas; racionales (cociente de polinomios); algebraicas (± ; producto; cociente y/ó raíz de polinomios) y trascendentes (aquellas que no son algebraicas, que *trascienden los métodos del álgebra,* como por ejemplo: trigonométricas , exponenciales, logaritmos).

- En los párrafos que siguen vamos a estudiar estas funciones pero siempre a partir de aquellas que llamamos *prototipos*; o sea, a partir de aquellas que siendo elementales tienen todos los rasgos que caracterizan a un determinado tipo o clase de función.

1.5 Funciones Reales a Variable Real

▤ En esta sección comenzamos el estudio de funciones cuyo dominio y codominio son siempre conjuntos de números reales.

▤ Analizamos en profundidad la definición, propiedades y características esenciales de funciones a las que llamamos *prototipo*; las cuales constituyen la *base* para el desarrollo del CALCULO ó ANÁLISIS MATEMÁTICO.

▤ Tales *funciones* son: lineal, potencia, raíz, cuadrática (como caso particular de polinomio), homográfica, exponencial, logaritmo, trigonométricas, inversa de las trigonométricas e hiperbólicas.

▤ ¿Cómo trabajamos en esta sección?

⇨ consideramos la memoria (M▤) como un ente real donde iremos guardando funciones a medida que las estudiemos.

⇨ En el inicio reconocemos sólo cuatro funciones en la memoria : *Sumar k (Sk), Restar k (Rk), Multiplicar por k (Mk) y Dividir por k (Dk).*

⇨ Dada una función f, si está en M🗐 , decimos que f es ***conocida*** (*)

⇨ Si f *no* está en M🗐, decimos que f es una función ***desconocida* (*)**

⇨ ***operamos*** (*) con funciones de la memoria y *generamos* nuevas funciones; estas serán ***conocidas*** ó ***desconocidas.***

⇨ ***generada una función `desconocida´, la estudiamos y la guardamos en la memoria. A partir del momento en que la guardamos en* M🗐 *la función pasa a la categoría de <u>conocida</u> .***

precisamos términos

(*) *conocida* → está en M🗐 → ej: S_4 (sumar 4)

(*) ***desconocida*** → no está en M🗐→ ej: logaritmo.

(*) ***operar*** → por operar con funciones entendemos :

- SUMAR FUNCIONES → [f+g] / [f+g](x) = f (x) + g(x)
- RESTAR FUNCIONES → [f -g] / [f -g](x) = f (x) - g(x)
- MULTIPLICAR FUNCIONES → [f.g] / [f.g](x) = f (x) . g(x)
- DIVIDIR FUNCIONES → [f /g] / [f /g](x) = f (x) / g(x)
- COMPONER FUNCIONES → $[f \, _0 \, g]$ / $[f \, _0 \, g](x) = f(g(x))$
- BUSCAR INVERSA DE f → g / $g \, _0 \, f$ = id.

ⓘ Vemos como funciona este proceso: tomamos dos funciones de M🗐, S_4 y S_6 , operamos con ellas y clasificamos el resultado en función ***conocida*** ó ***desconocida*** :

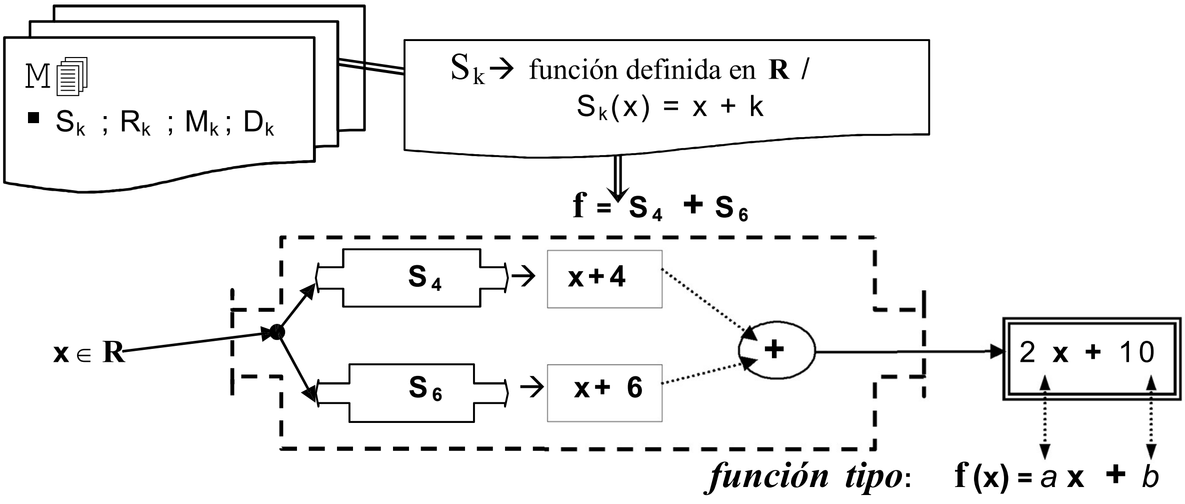
1) $[S_4 \, _0 \, S_6](x) = S_4(S_6(x)) = S_4(x+6) = (x+6)+4 = \mathbf{x+10 = S_{10}}$ → ***conocida***

2) $[S_4 + S_6](x) = S_4(x) + S_6(x) = (x+4)+(x+6) = \mathbf{2x+10}$ *(polinomio)*→ ***desconocida***

3) $[S_4 \,.\, S_6](x) = S_4(x) \,.\, S_6(x) = (x+4).(x+6) = \mathbf{x^2+10x+24}$ *(polinomio)*→ ***desconocida***

4) $[S_4 / S_6](x) = S_4(x) / S_6(x) = \frac{x+4}{x+6}$ *(racional)* → ***desconocida***

ⓘ Las tres últimas funciones no están en M🗐 ; además, cada una de ellas presenta un ***tipo distinto*** al de las otras; o sea, alguna característica que la distingue del resto e indica que no están en la misma clase. Son por lo tanto aquellas que llamamos *funciones prototipo* o *funciones tipo*. Empezamos a estudiarlas a partir del ejemplo (2).



Obtenemos un polinomio de grado 1 (o menor) al que llamamos, *función lineal.*

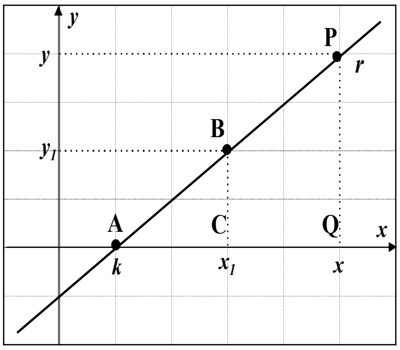
1.5.1 Función Lineal: $f(x) = a\,x + b$; $a, b \in R$

Llamamos función lineal a todo polinomio de grado menor o igual a 1; *f (x) = a x + b*
Los coeficientes ***a*** y ***b***, son los parámetros que caracterizan a esta función:
a = coeficiente de la v.i. ;
b = término independiente.

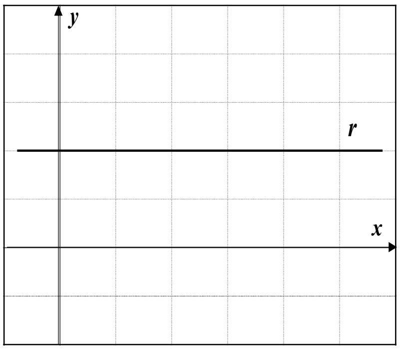
- **D_n**= R ; **C_n**= R ; **graf f =** ***recta***

- ***¿vale la recíproca?***; o sea: *¿toda recta del plano es la gráfica de una función lineal ?.*

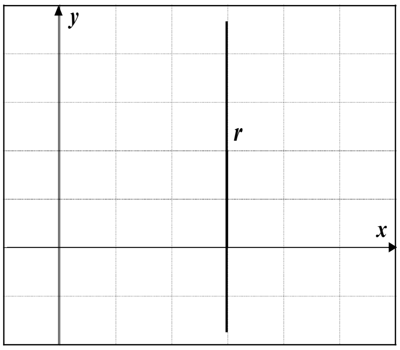
Analizamos las siguientes rectas y las sometemos a la *prueba de la recta vertical* para decidir si definen o no, función



(I) SI



(II) SI



(III) NO

Conclusión: r es el gráfico de una función ⇔ r no es paralela al eje y

Problema: si r es gráfico de una función f , ¿ es f una *función lineal ?*

Proposición: Toda recta no paralela al eje y es gráfico de una función lineal.

Sean **A** ; **B** puntos fijos y **P**(x,y) un punto *móvil* en la recta **r** del gráfico (I)
Sea **f** tal que **graf f** = **r**.

Buscamos la ley de **f:** del gráfico (I) vemos que los triángulos ABC y APQ son semejantes; luego

$$\frac{|\overline{BC}|\,\boldsymbol{BC}}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{PQ}|\,\boldsymbol{PQ}}{|\overline{AQ}|} \Rightarrow \frac{y_1}{x_1 - k} = \frac{y}{x - k} \Rightarrow y = \underbrace{\left[\frac{y_1}{x_1 - k}\right]}_{a} x + \underbrace{\left[\frac{-y_1}{x_1 - k}\right]}_{b}$$

Conclusión: $y = a\,\mathbf{x} + b \Rightarrow y = \mathbf{f}\,(x)$ con $\mathbf{f}\,(x) = a\,\mathbf{x} + b$ ⇒ **f** ***función lineal***

Observaciones:

- Para graficar rectas recordamos que *´dos puntos determinan una recta´.*
- El gráfico de una función lineal es una recta si y sólo si el dominio es R.

Dada **f (x) = 2 x – 2 ,** graficamos esta función para distintos dominios.

(I) D_f = R

x	y	*punto*
0	- 2	(0; -2) → r ∩ eje y
1	0	(1; 0) → r ∩ eje x

gráfico de f = *recta*

(II) D_f = $[2; +\infty)$

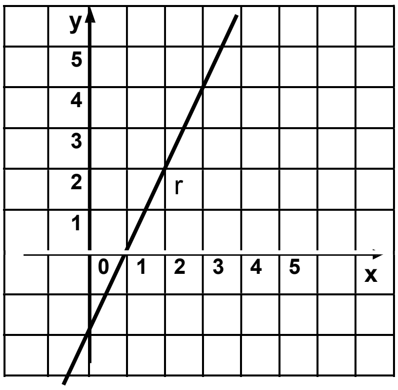
x	y	*punto*
2	2	Q (2; 2)
3	4	(3; 4)

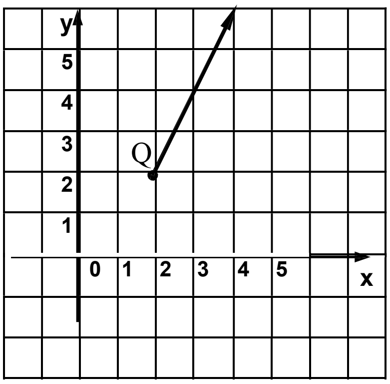
gráfico de f = *semirrecta*

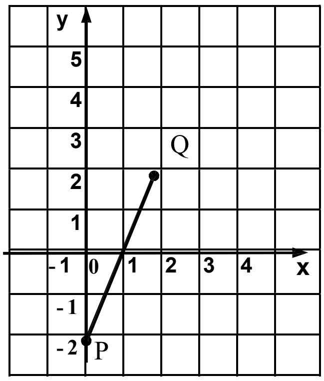
(III) D_f = $[0;\ 2]$

x	y	*punto*
0	- 2	P (0; -2)
2	2	Q (2; 2)

gráfico de f = *segmento*





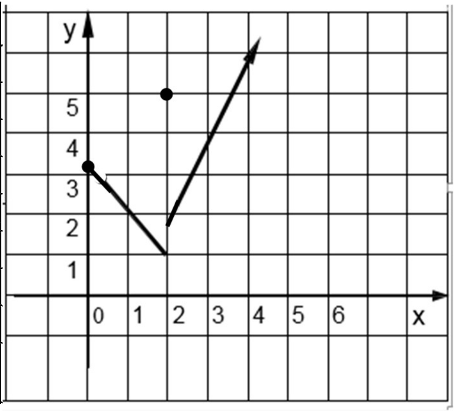


- Si f es una función seccionalmente definida, si las leyes que la forman son leyes correspondientes a funciones lineales, entonces el gráfico de f es una consecución de segmentos, puntos y/o semirrectas.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 \ ; \text{ si } 0 \leq x < 2 & [\text{ segmento }] \\ 5 \ ; \text{ si } x = 2 & [\text{ punto aislado }] \\ 2x - 2 \ ; \text{ si } x > 2 & [\text{ semirrecta }] \end{cases}$$

x	y	*punto*
0	3	**(0 ; 3) → extremo del segmento (incluido)**
2	1	**(2 ; 1) →extremo del segmento (*no incluido)***
2	5	**(2 ; 5) → punto aislado (incluido)**
2	2	**(2 ; 2) → origen semirrecta (*no incluido*)**

***Nota**: si el dominio es un intervalo abierto en alguno de sus extremos, el punto que corresponde a ese extremo no pertenece al gráfico de la función. De todas maneras obtenemos sus coordenadas para que nos guíe en el trazado de los correspondientes segmentos o*

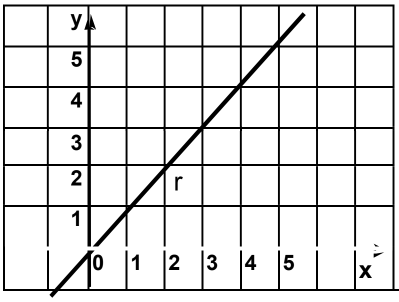


- *Casos especiales*: son casos relativos a valores particulares de los parámetros:

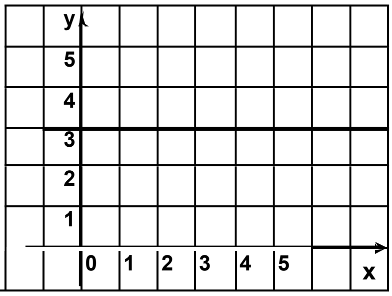
f (x) = a x + b : (I) **a = 1** y **b = 0** → **f(x) = x ;** función identidad → **f = id**

(II) **a = 0** → **f(x) = b ;** función constante

(I) id(x) = x

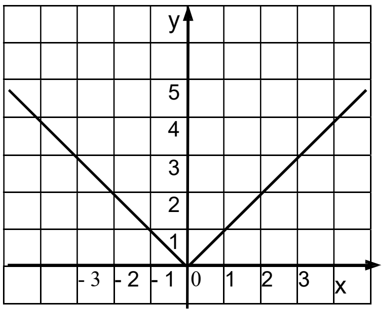


(II) f(x) = 3



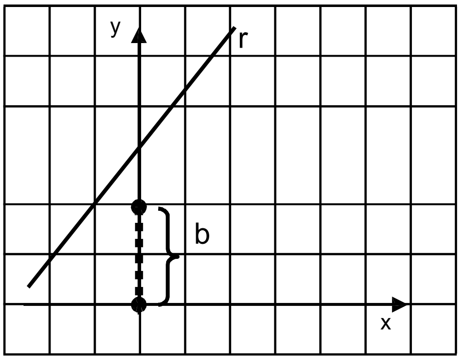
- ***función valor absoluto:*** **f(x) = | *x* |** ; este es un caso particular de función seccionalmente definida, ya que por definición de valor absoluto tenemos :

$$f(x) = \begin{cases} x \; ; \; \text{si} \;\; x \geq 0 & [\text{ semirrecta en } R^{+} \,] \\ -x \; ; \; \text{si} \;\; x < 0 & [\text{ semirrecta en } R^{-} \,] \end{cases}$$



- **Análisis de los Coeficientes en f(x) = a x + b**

» **(I)** ***Estudio del término independiente*: b**



» ¿coordenadas del punto $P_y = r \cap$ eje y ?

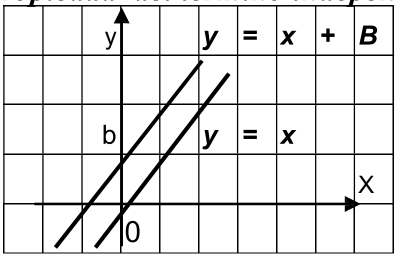
$$P_y(x; y) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x \in D_f} \\ \mathbf{y = f(x)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = f(0)} = b \end{pmatrix}$$

» **luego:** P_y (0; b)

» *conclusión*: b **es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.**

» b: *ordenada al origen*

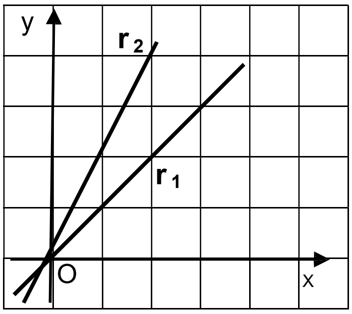
ⓘ ***propiedad del término independiente***: indica si r pasa por el origen O.



» b = 0 ⇒ r **pasa por el origen**

» b ≠ 0 ⇒ r ***no* pasa por el origen**

» **(II)** ***Estudio del coeficiente de x* : a**



» **Dadas:**

r₁) f(x) = x → a = 1
r₂) f(x) = 2 x → a = 2

» **¿qué varía de una recta a otra? :**

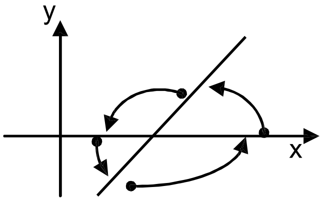
ⓘ ***propiedad del coeficiente de x*** : dada f(x) = a.x + b tenemos entonces que **a**, coeficiente de x, está relacionado con la inclinación de la recta r = graf f.

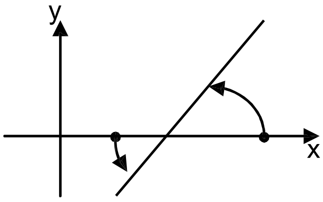
La pregunta que surge inmediatamente es *cómo* están relacionados *coeficiente e inclinación*. Para investigar esto necesitamos precisar que entendemos por inclinación.

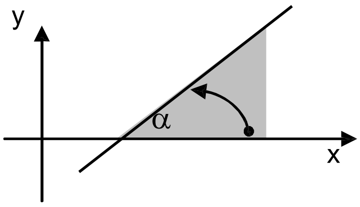
DEFINICIÓN:

inclinación	♦ **Dada una recta** r **no paralela al eje x, llamamos inclinación, al** ángulo α **formado por la recta y el eje x. (*)** ♦ **Si** r **es paralela al eje x, entonces** α **= 0**

(*) La recta determina cuatro ángulos con el eje x; luego, es necesario convenir cual de ellos reconocemos como *ángulo formado por la recta con el eje x*; así, este es, "el ángulo generado en sentido antihorario, con lado inicial en el eje x y final en **r** y tal que el lado inicial esté orientado en el sentido creciente del eje x ".

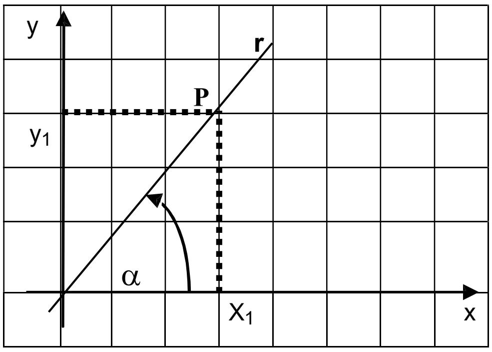






ⓘ El coeficiente a es un *número* y la inclinación un *ángulo* luego, *no pueden ser iguales* La relación entre estos objetos matemáticos la podemos investigar del gráfico de f; pero, en tal caso debemos considerar la graduación de los ejes coordenados; en particular, si ambos ejes están o no graduados con la misma escala.

(1) ejes coordenados graduados con la misma escala.



Dada r, tal que r : y = a x, tenemos :

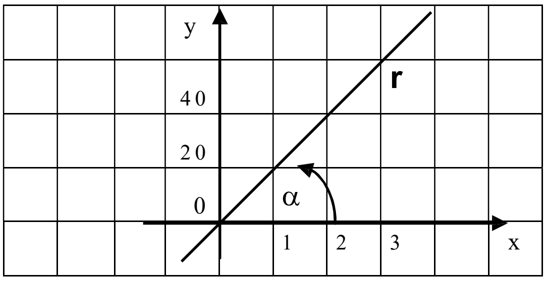
» $P(x_1 ; y_1) \in r \Rightarrow y_1 = a\,x_1 \Rightarrow a = \dfrac{y_1}{x_1}$

» $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{y_1}{x_1}$

Conclusión: si los ejes coordenados están graduados con la misma escala entonces,

$$\mathbf{a = tg}\ \alpha$$

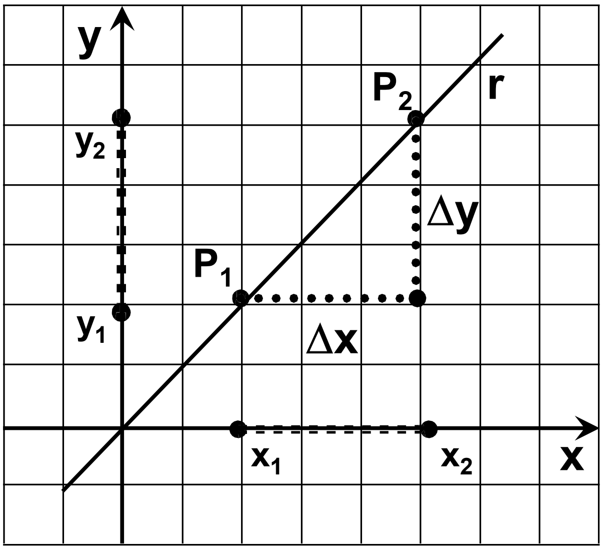
Nota: es importante destacar que si los ejes no están graduados con la misma escala, entonces **a ≠ tg** α**.**



$$\textbf{r) } \mathbf{y = 20\,x} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a =} 20 \\ \alpha = \mathbf{45^\circ} \rightarrow \mathbf{tg}\,\alpha=1 \end{array} \right\} \Downarrow \boxed{a \neq \text{tg}\ \alpha}$$

(2) ejes coordenados graduados con escalas distintas: ¿ a ?

A los fines de ver como relacionar en este caso *coeficiente* e *inclinación* procedemos a analizar r : y = a x + b



Si sobre el eje *x* pasamos de x_1 a x_2; o sea, recorremos una distancia igual a $x_2–x_1$; entonces sobre la recta pasamos de P_1 a P_2 y, respecto de P_1, nos elevamos una distancia igual a $y_2 - y_1$.
Luego:

para un *recorrido* **de $x_2 – x_1$**
tenemos una *elevación* **de $y_2 – y_1$**

(*) tradicionalmente la letra Δ se usa para indicar *variaciones* ó *incrementos;* así:

$x_2 – x_1 = \Delta x$
$y_2 – y_1 = \Delta y$

- ***Importante***: si sobre una recta no vertical fijamos P_1 y variamos P_2; los triángulos determinados en cada caso por Δx, Δy y $\overline{P_1 P_2}$ son *triángulos semejantes*. Resulta así que el cociente de los catetos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ da siempre lo mismo ó, dicho de otra manera, *la razón* del cambio en y al cambio en x permanece constante.

Luego, *esta razón ó cociente, al permanecer constante, proporciona otro valor que podemos relacionar con la inclinación de la recta ya que el mismo informa acerca de cuanto varía 'y' por cada cambio unitario en 'x'; equivalentemente, cuanto se ´eleva´ la recta cuando 'x' se incrementa en una unidad.*

En razón de ello a este valor le damos un nombre, lo llamamos *pendiente de la recta*.

DEFINICIÓN:

Pendiente de la recta

llamamos *pendiente* de la recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ al número m tal

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{[´elevación´]}{[´recorrido´]}$$

Proposición

Dada la función lineal f, el coeficiente de x es igual a la pendiente de la recta gráfica de f.

Demostración: dada f(x) = a x + b , consideramos dos puntos del graf f = r .

$$\text{»}P_2 \in \mathbf{r} \Rightarrow y_2 = \mathbf{a}\, x_2 + b$$
$$\text{»}P_1 \in \mathbf{r} \Rightarrow y_1 = \mathbf{a}\, x_1 + b$$

$$y_2 - y_1 = (\mathbf{a}\ x_2 + b) - (\mathbf{a}\ x_1 + b)$$

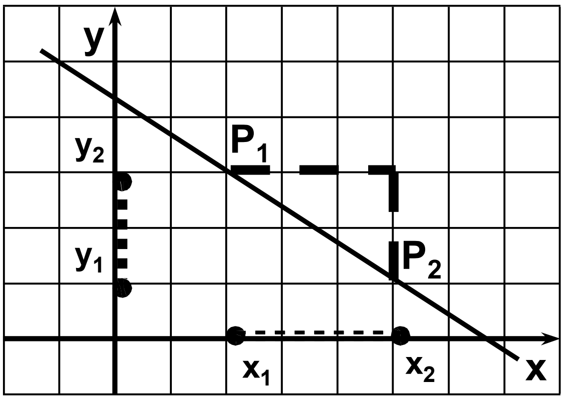
Luego, $y_2 - y_1 = \mathbf{a}\ (x_2 - x_1) \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Conclusión: **a = m,** pendiente de la recta.

Observaciones:

1) **a** = **m** trabajemos con ejes graduados *iguales* ó *distintos*.

2) Cuando P_1 y P_2 están en otra posición relativa, el vocablo "elevación" no es el más apropiado; sin embargo, lo conservamos para expresar (y_2 - y_1).

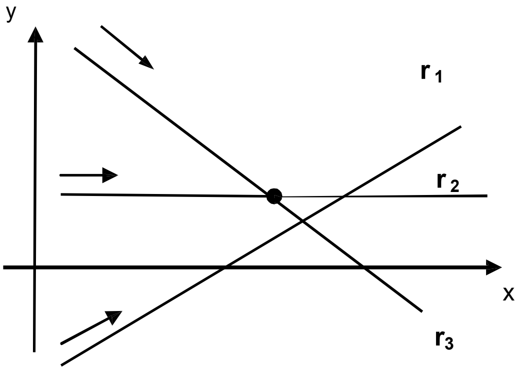


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{[\acute{}elevación\acute{}]}{[\acute{}recorrido\acute{}]}$$

Observación:

puesto que $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, para el cálculo de la pendiente no importa el "orden" de los puntos.

3) Una recta que no es paralela a ningún eje coordenado puede *´elevarse´* desde abajo e izquierda (r_1) ó, *´caer´* desde arriba e izquierda (r_3).



Luego :

- **r_1 es estrictamente creciente**
- **r_3 es estrictamente decreciente**

¿cómo se relaciona esto con `m´? :

- **m > 0 → f estrictamente creciente (r_1)**
- **m < 0 → f estric. decreciente (r_3) [⌦]**
- **m = 0 → f función constante (r_2)**

⌦ **Proposición** f(x) = m x + h ; m < 0 ⇒ f estrictamente decreciente

Demostración:

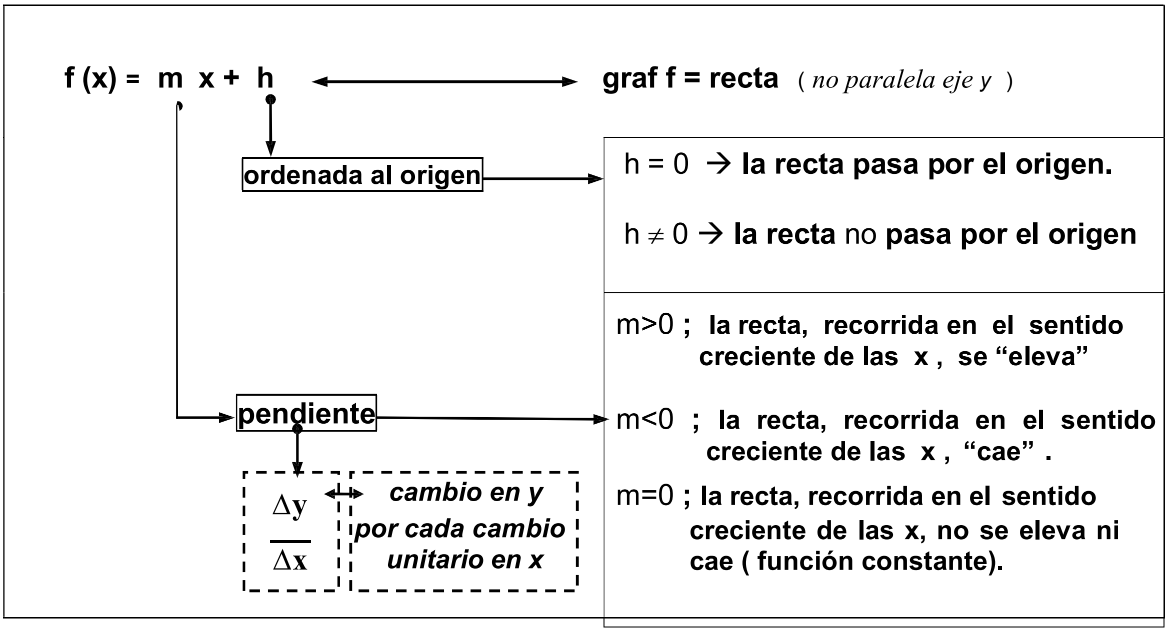
» m < 0 ⇒ f estrictamente decreciente →→

Repasamos la definición:
f estrictamente decreciente ⇔
∀ x_1 , x_2 ; $x_1 < x_2$ ⇒ $f(x_1) > f(x_2)$

» m < 0 ⇒ $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} < 0$

» luego: $\mathbf{x_1 < x_2}$ ⇒ $x_1 - x_2 < 0$ ⇒ $y_1 - y_2 > 0$ ⇒ $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ⇒ $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$

RESUMEN: función lineal



h = 0 → **la recta pasa por el origen.**

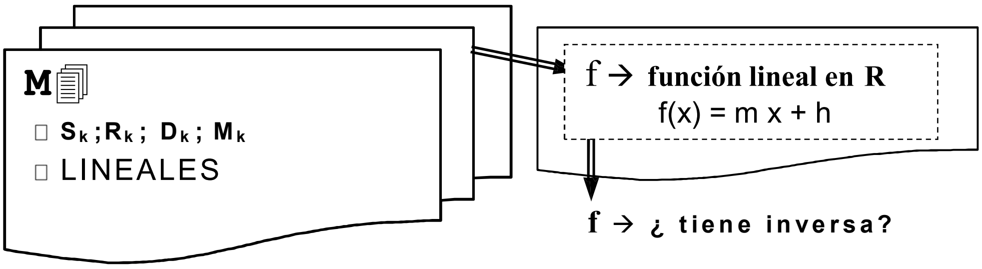
h ≠ 0 → **la recta** no **pasa por el origen**

m>0 ; **la recta, recorrida en el sentido creciente de las x , se "eleva"**

m<0 ; **la recta, recorrida en el sentido creciente de las x , "cae" .**

m=0 ; **la recta, recorrida en el sentido creciente de las x, no se eleva ni cae (función constante).**

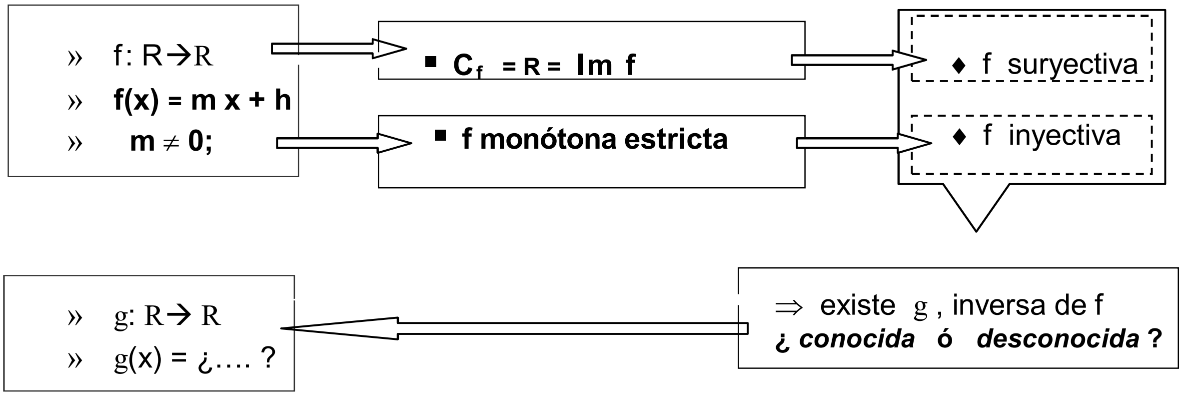
- Estudiada la función lineal, la incorporamos a la memoria y a partir de eata acción, pasa a ser una función *conocida* y podemos operar con ella; buscar nuevas funciones.



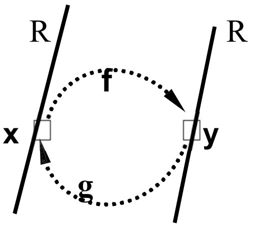
- Operamos en **M** y buscamos la inversa de la función lineal.

Recordamos que para buscar inversas debemos realizar una serie de pasos, entre ellos, determinar si la función es *biyectiva* (suryectiva e inyectiva).
Tomando como dominio natural y codominio el conjunto R, es fácil verificar que el conjunto imagen también es R, Im f = R ; o sea, que f es suryectiva.
Para demostrar que es inyectiva basta probar la siguiente proposición que queda como ejercicio:

Proposición si una función es monótona en D entonces es inyectiva en D.



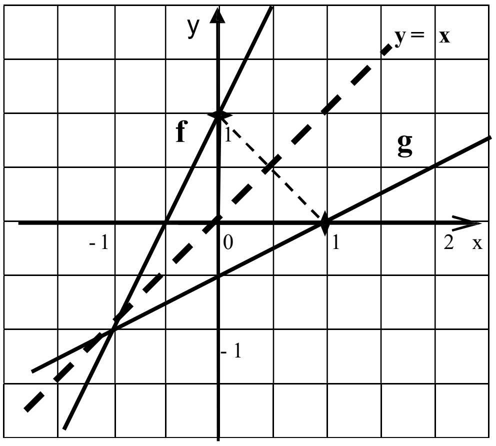
Ejemplo: buscamos g inversa de f(x) = 2x+1



- » f: R→R/ **y=f(x) con f(x)=2x+1**
- » g: R →R
- » *ley g*:

$$\underbrace{\begin{array}{llll} g(y) = x & \Leftrightarrow & f(x)= y & (*) \\ g(y) = x & \Leftrightarrow & 2x+1= y & \\ g(y) = x & \Leftrightarrow & 2x = y-1 & R_1 \\ g(y) = x & \Leftrightarrow & x = \frac{y-1}{2} & D_2 \end{array}}_{g(y) = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2}}$$

- » ***ley g:*** **g(x) = ½ x - ½**



O*bservaciones*: para hallar inversa,

- ♦ **1ro damos la ley de** g, **inversa de f, ´por definición´.(*)**
- ♦ **Luego, tratamos de hallar (si existe) una** *fórmula* **para la ley de** g .
- ♦ **Si existe, ésta se obtiene de** *despejar* x **en la ecuación** f(x) = y.
- ♦ **Recordamos que** *despejar* **equivale a aplicar las funciones inversas de las que forman la ley original, en el orden inverso.**
- ♦ **Finalmente, para expresar** g **como función de x, intercambiamos x e y en la ecuación obtenida para** g .
- ♦ **Intercambiadas x e y, graficamos** g **en el mismo sistema que** f **usando la propiedad de que ambas gráficas son** ***simétricas*** **respecto de la recta y=x.**

(*) Cabe preguntarnos si siempre podremos despejar x , cualquiera sea la función lineal de partida. La respuesta a esta pregunta es ***SI,*** pues ***conocemos*** las funciones inversas de aquellas que constituyen la función lineal ; estas son: **S_k; R_k; D_k ó M_k**.
Como las inversas de estas funciones son del mismo tipo: **S_k; R_k; D_k ó M_k** ; concluimos que:

" la inversa de una lineal es una lineal "

(*) Concluimos también que a través del proceso de buscar inversa no generamos un nuevo *tipo* de función, pues no salimos de las lineales. Intentamos con otra operación, por ejemplo, el producto

M
☐ LINEALES

f → **función lineal en R tal que**
f(x) = m x

¿qué resulta del producto de estas funciones ?

Para investigar esta cuestión, damos funciones de M🗐, por ejemplo

$$h(x) = 2.x \;;\quad k(x) = 3.x \;\text{ y }\; l(x) = 4.x$$

las multiplicamos y clasificamos el resultado en *conocido* ó *desconocido* :

1) $[h.\, k]\,(x) = h(x).\,k(x) = (2\,x).(3.x) = 6.\,x^2$
2) $[h.\, k.\, l]\,(x) = h(x).k(x).l(x) = (2.x).(3.x).(4.x) = 24.\,x^3$

Observamos que las funciones así obtenidas son *desconocidas,* no están en M🗐; pero también vemos que todas ellas tienen el mismo *tipo* : $f(x) = a.\, x^n$.
Las funciones que tienen esta fórmula las llamamos ***POTENCIAS***.
Ellas constituyen un *nuevo tipo de función*; luego, las analizamos e incorporamos a M🗐

1.5.2 Potencia: $f(x) = a\,x^n \;;\quad a \in \mathbf{R} - \{0\}\;;\quad n \in \mathbf{N}$

Las propiedades que caracterizan a las *POTENCIAS* dependen de la paridad del exponente *n* . Luego, para estudiarlas, consideramos:

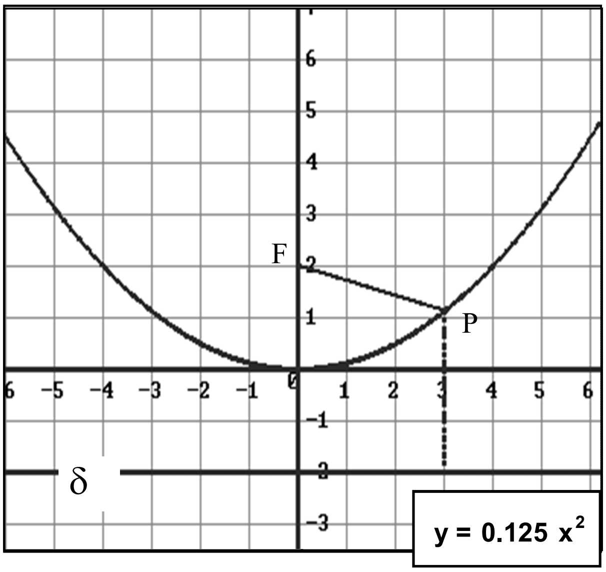
Caso I : n par

Caso II : n impar.

En ambos casos el estudio lo hacemos a través de analizar exhaustivamente *el caso más elemental* para ese tipo de función. Las propiedades o conclusiones extraídas para este caso las extendemos luego al resto de las funciones de la clase.

Caso I : ***n par → caso elemental: n = 2 →*** $f(x) = a.x^2$

Si $f(x) = a.x^2$ entonces $D_f = \mathbf{R}$ y graf **f** = *PARÁBOLA* (*)



(*) En Geometría Analítica se estudian las curvas a partir de ciertas *propiedades geométricas que las caracterizan*; así , al estudiar aquellas en las que se distingue un punto (*foco*) y una recta (*directriz*) tal que:

"*todos los puntos de la curva equidistan del punto F (el foco) y de la recta δ (la directriz)* ";

se halla la ecuación canónica de este tipo de curvas y se les da el nombre de *PARABOLAS.*

Si *F* (0,p) y δ : y = -p entonces la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{1}{4p}.x^2 \,.$$

- Las parábolas son muy útiles en las aplicaciones de la matemática al mundo físico. Así por ejemplo puede mostrarse que si se dispara un proyectil y se supone que sólo actúa la fuerza de la gravedad, la trayectoria del proyectil es *parabólica.* Dado las propiedades de estas curvas las mismas se usan tanto para el diseño de espejos o lentes para telescopios o microscopios como para el diseño de antenas satelitales, y estas son unas pocas de las múltiples aplicaciones que presentan estas curvas.

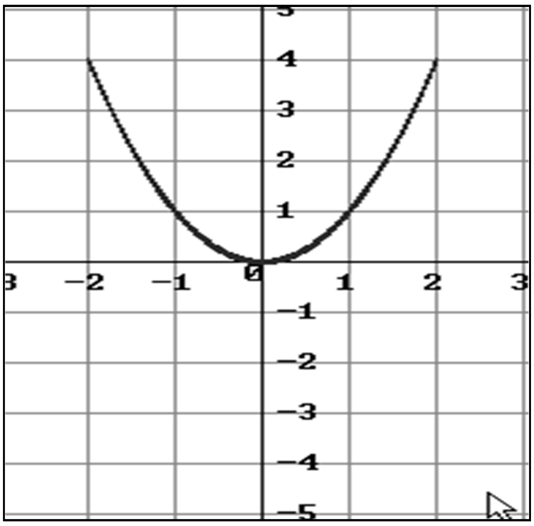
En lo que sigue estudiamos las parábolas desde la perspectiva del Análisis Matemático; es decir observamos estas curvas como gráficas de la función, $f(x) = a\,x^2$.

Desde esta perspectiva vemos que son curvas simétricas respecto del eje y; que sobre el eje de simetría presentan un punto que se *destaca* respecto de los otros. Efectivamente, observamos un punto, **V**, a partir del cual se *desarrolla* la parábola ya sea, abriéndose *hacia arriba* ($a > 0$) ó *hacia abajo* ($a < 0$).

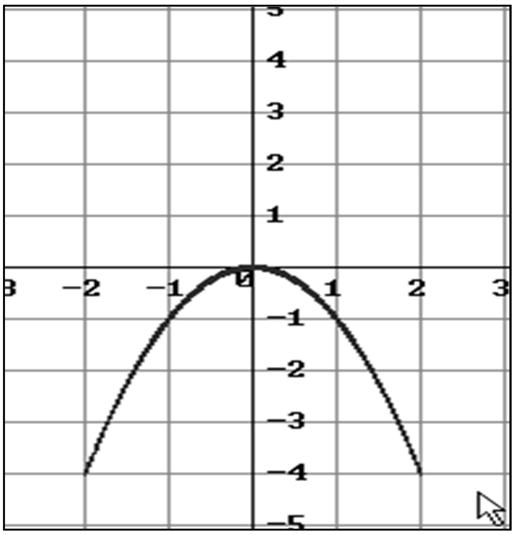
Al punto **V** lo llamamos *vértice* de la parábola.

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las potencias de grado 2.

$f(x) = a.x^2$	
a>0	**a<0**



- **PARÁBOLA, ramas ↑**
- **Im f = $\Re_0^+$**
- ***función par***
- **no *inyectiva***
- **definida *no negativa***
- **eje de simetría: eje y**
- **punto destacado; *vértice*:** V(0,0)



- **PARÁBOLA, ramas ↓**
- **Im f = $\Re_0^-$**
- ***función par***
- **no *inyectiva***
- **definida *no positiva***
- **eje de simetría: eje y**
- **punto destacado; *vértice*:** V(0,0)

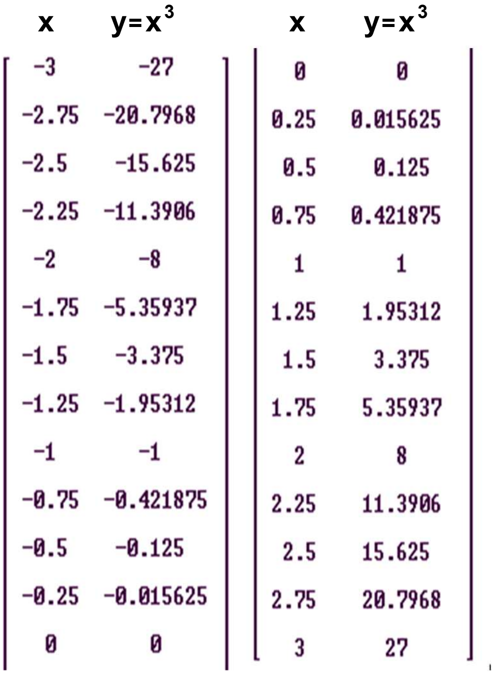
Caso II : ***n impar → caso elemental: n = 3 →*** **f (x) = a.x³**

Si **f (x) = a.x³** entonces $D_f = R$ y graf **f** = (*)

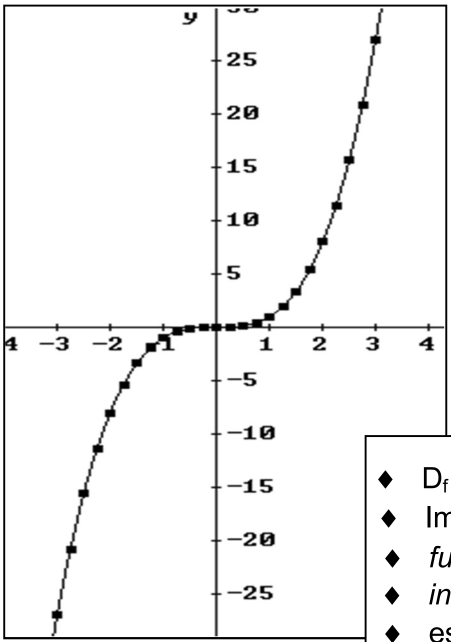
(*) en este caso no tenemos el auxilio de la Geometría Analítica, ¿cómo procedemos?.

- acudimos a una *tabla de valores*
- hallamos puntos de la gráfica hasta que aparece cierta *configuración*.
- unimos los puntos según lo sugiere la configuración.
- Obtenemos la curva.
- Le damos un nombre; en este caso: *PARÁBOLA CÚBICA*.

- Realizamos este proceso con f (x) = x^3 (a=1)



x	$y=x^3$	x	$y=x^3$
-3	-27	0	0
-2.75	-20.7968	0.25	0.015625
-2.5	-15.625	0.5	0.125
-2.25	-11.3906	0.75	0.421875
-2	-8	1	1
-1.75	-5.35937	1.25	1.95312
-1.5	-3.375	1.5	3.375
-1.25	-1.95312	1.75	5.35937
-1	-1	2	8
-0.75	-0.421875	2.25	11.3906
-0.5	-0.125	2.5	15.625
-0.25	-0.015625	2.75	20.7968
0	0	3	27



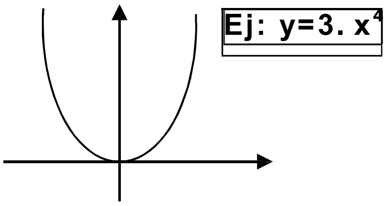
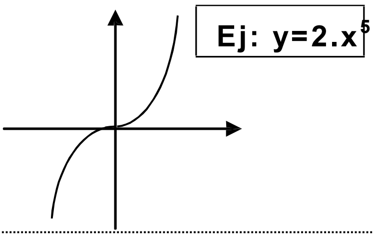
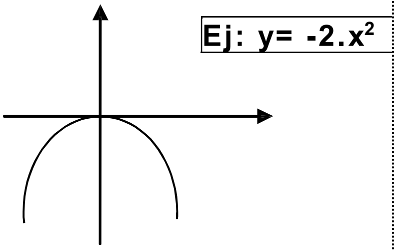
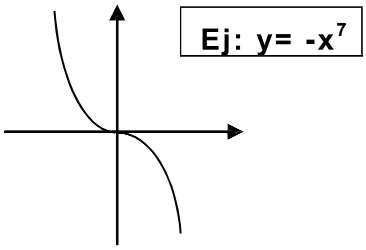
- D_f = R
- Im f = R
- *funcion impar*
- *inyectiva*
- estrict. creciente
- *centro de simetría*: origen

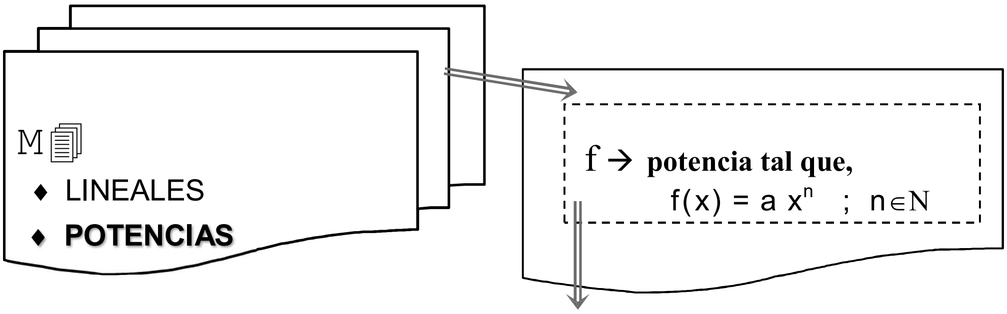
Observación:

Los casos elementales analizados (n =2 y n =3) presentan las propiedades que caracterizan a las potencias en general y según el exponente sea par o impar. O sea, para *n* genérico, $a.x^n$ será del *tipo* $a.x^2$ ó $a.x^3$ *,* según *n* sea para ó impar.

El coeficiente *a* afecta la *abertura* de las ramas y los cuadrantes donde estas se encuentran mientras el exponente *n* afecta la *rapidez* con que crecen o decrecen para valores muy grandes de x´s.

RESUMEN: potencias

f (x) = a.x^n	**n par** **(*tipo parábola)***	**n impar** **(*tipo parábola cúbica)***
a>0	 **Ej: y=3. x^4**	 **Ej: y=2.x^5**
a<0	 **Ej: y= -2.x^2**	 **Ej: y= -x^7**

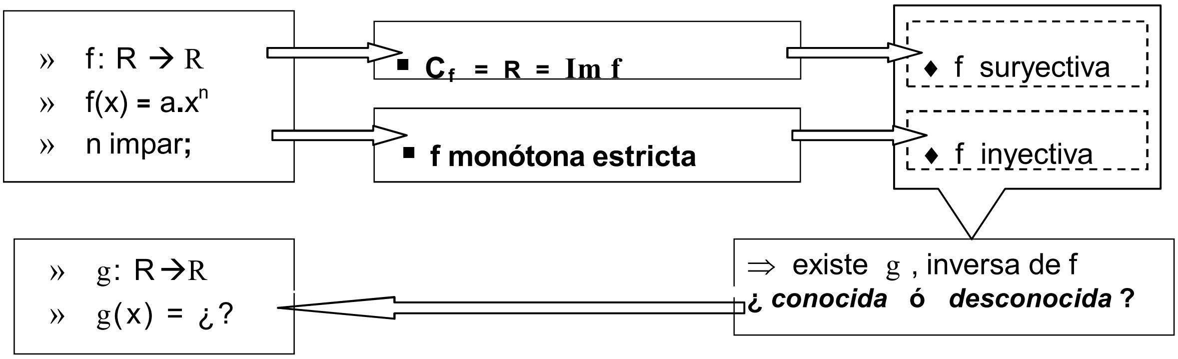


inversa de f : ¿*existe*?, ¿*es ´conocida´*?

1.5.3 Funciones Inversas de las Potencias: *Raíces*

Las propiedades de las potencias dependen de la paridad del exponente "n"; luego, las de sus inversas, si existen, también dependen de dicha paridad.

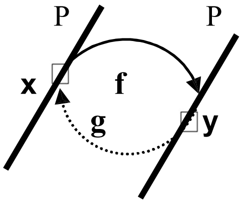
Caso II : ***n impar***



Ejemplo:

Buscamos g inversa de $f(x) = x^3$, según el proceso ya explicitado para la función lineal.

» f : R → R / **$y=f(x)$ con $f(x)=x^3$**



» g: R → R

» ley g:

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = y \qquad ?$$

$$g(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ldots$$

Recordamos que:

- **existe una fórmula para g si y sólo si podemos despejar x en la ecuación f (x) = y.**
- *despejar* **equivale a aplicar la** *inversa* **de la o las funciones que constituyen f.**
- **Luego, para la función potencia, ¿ podemos** *despejar* **x ?:**

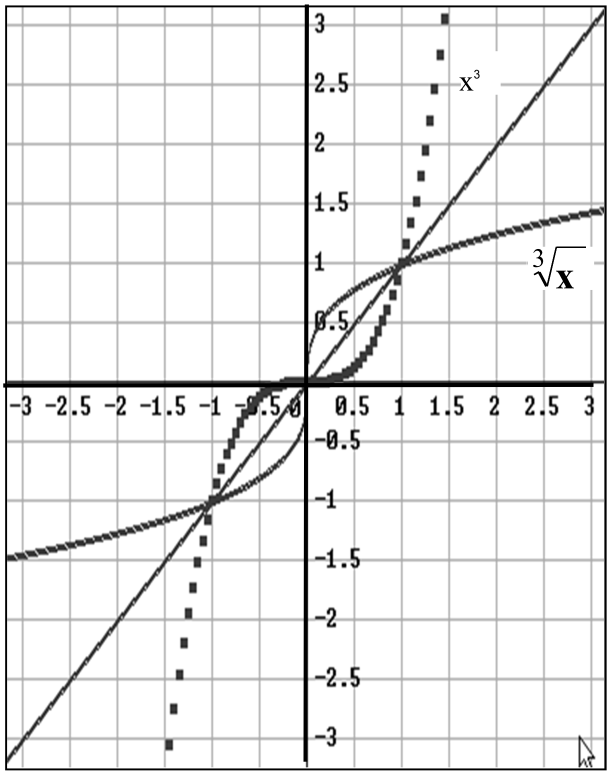
No, pues la función que necesitamos para realizar este proceso (la inversa de f) es, justamente, *la función que estamos buscando*, **hasta esta instancia , una función** *desconocida*. **(no tenemos en M una función que deshaga lo que hace x^3)**

Conclusión
Comprobamos entonces que no existe una fórmula para g y, consecuentemente, que hemos encontrado un nuevo tipo de función.

Ideamos un nombre y un símbolo para indicar este tipo de función;

las llamamos, *raíces* y simbolizamos, **g** = $\sqrt[\mathbf{n}]{\ }$ (*raíz enésima*).
Analizamos sus propiedades y la incorporamos a M🗐.

- ♦ **RAÍZ CÚBICA** = $\sqrt[3]{*}$



- ▪ **Dominio** $\sqrt[3]{*}$ **= R**
- ▪ **Imagen** $\sqrt[3]{*}$ = R
- ▪ **ley** $\sqrt[3]{*}$, ***por definición***:

$$\sqrt[3]{y} = x \Leftrightarrow x^3 = y$$

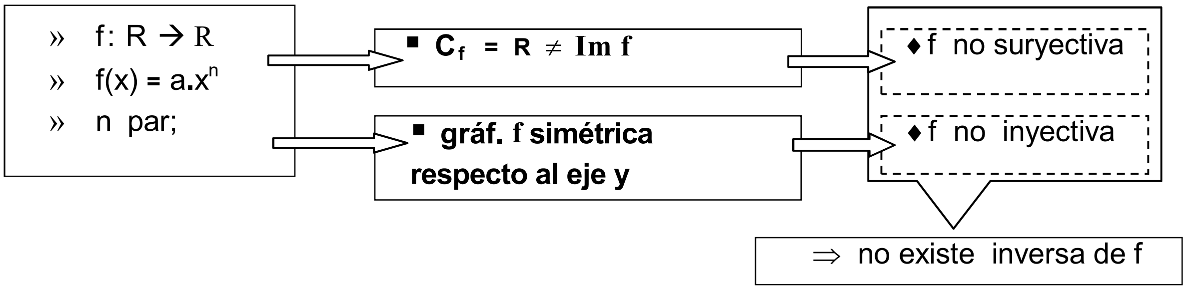
- ▪ **Para graficar en un sistema x-y cambiamos el nombre de las variables**

x → y
y → x

$$\sqrt[3]{\mathbf{x}} = y \Leftrightarrow y^3 = x$$

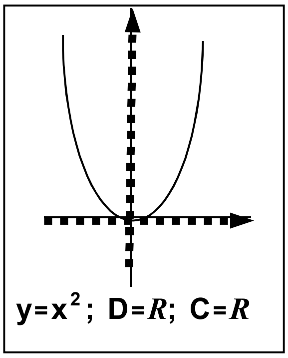
- ▪ **Obtenemos la gráfica de g por reflexión de la gráfica de** f **respecto a** ***y = x.***
  - ♦ ***funcion impar***
  - ♦ ***inyectiva***
  - ♦ ***estrictamente creciente***
  - ♦ **centro de simetría: *origen***

<u>Caso I</u>: ***n par***

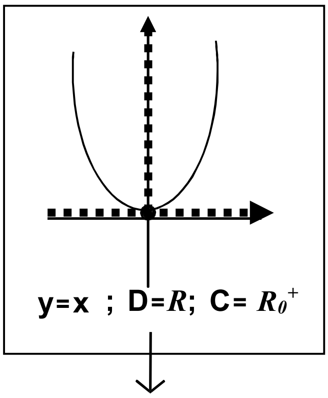


☞ Si mantenemos la ley de **f** y restringimos dominio y codominio de modo que la nueva función resulte biyectiva entonces, la *función restringida,* admite inversa.
¿Cómo debemos restringir?:

- **f** suryectiva → basta tomar el codominio igual a la imagen;
- **f** inyectiva → tenemos dos formas de restringir el dominio de modo que la función sea inyectiva : podemos tomar como dominio los R_0^+ ó R_0^-.

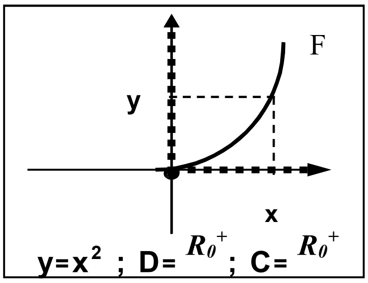


$\xrightarrow[C=\text{Im } x^2]{\text{suryectiva}}$



$\downarrow$

$$D=\boldsymbol{R_0}^+ \longleftarrow\longleftarrow\xleftrightarrow{\textit{inyectiva}}\longrightarrow\longrightarrow D=\boldsymbol{R_0}^-$$



F: $\boldsymbol{R_0}^+ \rightarrow \boldsymbol{R_0}^+$ / y=F(x) con F(x) = x^2

F: $\boldsymbol{R_0}^+ \rightarrow \boldsymbol{R_0}^+$

Ley G (inversa de F), ***por definición:***

G(y)=x $\Leftrightarrow$ F(x)=y

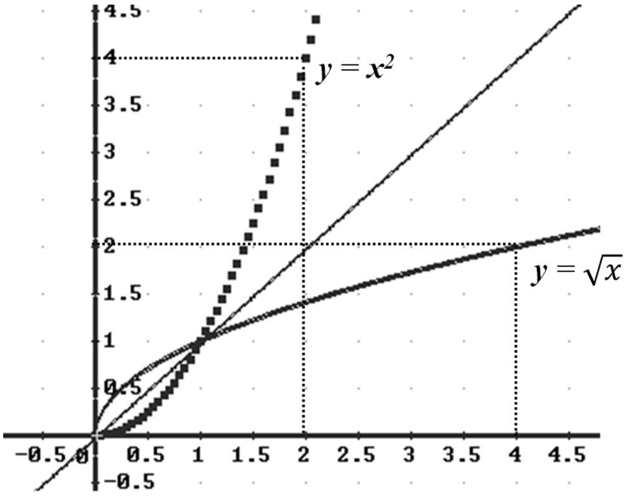
F^{-1}(y)=x $\Leftrightarrow$ x^2=y $\wedge$ x$\in \boldsymbol{R_0}^+$

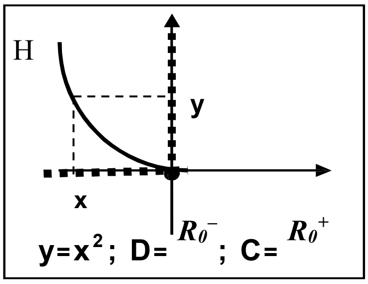
la llamamos, *raíz cuadrada*

la simbolizamos: $\sqrt{*}$

$$\sqrt{y}=x \quad \Leftrightarrow \quad x^2=y \ \wedge \ x\in \boldsymbol{R_0}^+$$

Raíz cuadrada = $\sqrt{*}$





H: $\boldsymbol{R_0}^- \rightarrow \boldsymbol{R_0}^+$ / y=F(x) con F(x) = x^2

H: $\boldsymbol{R_0}^- \rightarrow \boldsymbol{R_0}^+$

Ley K (inversa de H), ***por definición:***

K(y)=x $\Leftrightarrow$ H(x)=y

K(y)=x $\Leftrightarrow$ x^2=y $\wedge$ x$\in \boldsymbol{R_0}^-$

la llamamos, *menos raíz cuadrada*

la simbolizamos: - $\sqrt{*}$

$$-\sqrt{y}=x \quad \Leftrightarrow \quad x^2=y \ \wedge \ x\in \boldsymbol{R_0}^-$$

- **para graficar la función x^2 y su inversa, *raíz cuadrada*, en un mismo sistema *x-y* cambiamos el nombre de las variables**

x → y

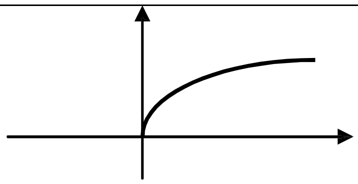
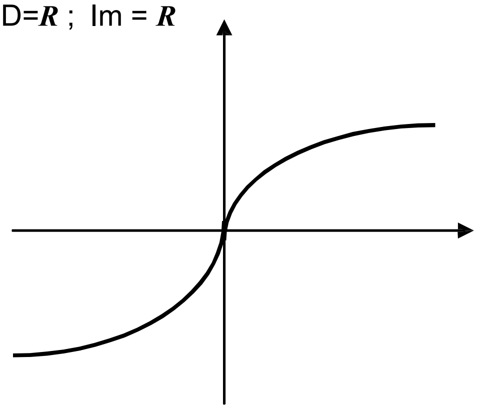
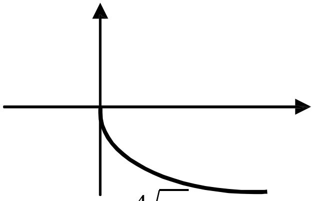
y → x

- **$\sqrt{x}$=y $\Leftrightarrow$ y^2 = x ^ y$\in \boldsymbol{R_0}^+$**
- **obtenemos la gráfica de $\sqrt{*}$ por reflexión de la gráfica de** F **respecto de la recta y=x.**

<u>Raíz cuadrada</u> :

- **no es par, ni impar**
- **inyectiva**
- **estrictamente creciente**
- **simetrías: no tiene**
- **signo: definido *no negativo*.**

RESUMEN: raíz enésima

g(x)= $\sqrt[n]{x}$	n par	n impar
(*) n par **Dg =** R_0^+ **Im g=** R_0^+	 ***raiz positiva***: $\sqrt[4]{x}$	D=R ; Im = R  ***Ejemplo***: $\sqrt[5]{x}$
(*) n par **Dg =** R_0^+ **Im g=** R_0^-	 ***raíz negativa***: - $\sqrt[4]{x}$	

M
- LINEALES
- POTENCIALES
- **RAÍCES**

f → **potencia /**
f(x) = a x^n ; n∈N

¿suma de potencias?, ¿conocida o desconocida ?
$p(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1\ x + a_0$

La suma de una o más potencias da por resultado la función que conocemos con el nombre de *polinomio*. En este punto no tenemos todavía los conocimientos matemáticos necesarios para analizar polinomios en general, pero si para hacerlo en un caso en particular: polinomio de 2do grado ó función cuadrática.

1.5.4 Función Cuadrática: C(x) = a x^2 + b x + c , a; b; c ∈R ; a ≠ 0.

Un método útil para estudiar una función es aquél que consiste en explorar la existencia de algún vínculo ó nexo entre la función incógnita y una función prototipo conocida. Si este vínculo existe, a partir de ello deducimos luego gráfica y propiedades básicas de la función desconocida.

Dada *g*, función desconocida: ¿cómo procedemos para aplicar este método ?:

1ro) Seleccionamos una función prototipo *f*, *conocida* y *conveniente* al caso en estudio.(*)

2do) Exploramos si la función *g* está vinculada a *f* a través de alguna operación gráfica; o sea, si $g(x) = A.f(a\,x + b) + B$, para algún valor de los parámetros a, b, A y B. (**)

3ro) Si tal es el caso, esto indica que *g* es el resultado de aplicar a *f* una o más transformaciones (traslación, alargamiento, reflexión, etc.), las que como sabemos no modifican en forma esencial la gráfica ni las propiedades de *f*. Luego, *g* pertenece a la clase de funciones determinada por *f*.

(*) ¿ Qué función tipo ó prototipo elegimos como punto de partida ?

La función tipo de partida resulta muchas veces sugerida por la misma función a investigar; así normalmente tomamos *f* como el caso más elemental posible relativo a la función incógnita *g*.

(**) ¿Cómo organizamos la exploración ?, ¿ partimos del caso general o de casos particulares ?

Aquí conviene organizar la exploración a partir de casos particulares, lo más sencillo posibles.

Acorde a este método procedemos al estudio de $C(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

1ro) C es un polinomio de grado dos; luego, y a los fines de comenzar el estudio comparativo, buscamos el polinomio más elemental posible entre todos ellos y lo tomamos como función prototipo: $\mathbf{C(x) = a\,x^2 + b\,x + c \xrightarrow[a=1;\ b=0;\ c=0]{} f(x) = x^2}$ (***prototipo)***

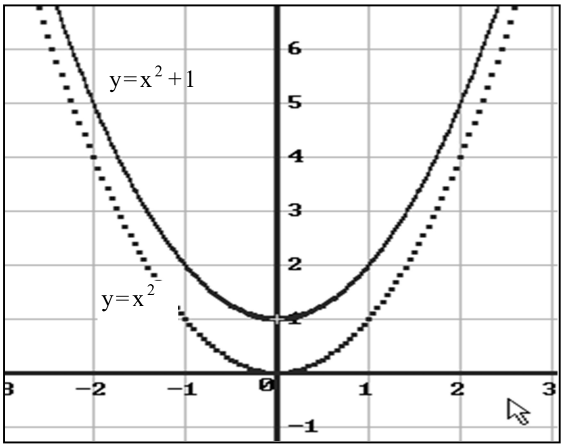
Así, tomamos $\mathbf{f(x)=x^2}$ como función tipo la cual, además de ser el caso más elemental posible para un polinomio de grado dos, es una función conocida (*potencia).*

2do -3ro) consideramos casos particulares de funciones cuadráticas y, a partir de ellos, obtenemos la conclusión para el caso general.

Ejemplo 1: $p(x) = x^2 + 1$

$$\mathbf{p(x) = x^2 + 1 \xrightarrow{f(x)=x^2} p(x)=f(x)+1\ (*)}$$

(*) Sumo 1 a la función f ; luego:
graf p = graf f subido 1 unidad.
graf p = ´parábola´ subida 1 unidad
∗ eje simetría: eje y
∗ vértice: V* (0,1)



Ejemplo 2: $q(x) = x^2 - 2x + 1$

<u>NOTA 1</u>: **en este caso la relación entre q y f no es evidente. Trabajamos algebraicamente la función q hasta descubrir su relación con f ; para ello, *factoreamos*.**

$q(x) = (x-1)^2$

<u>NOTA 2</u>: **escrita de esta forma, vemos que q es una composición de funciones; *¿ de qué funciones?***

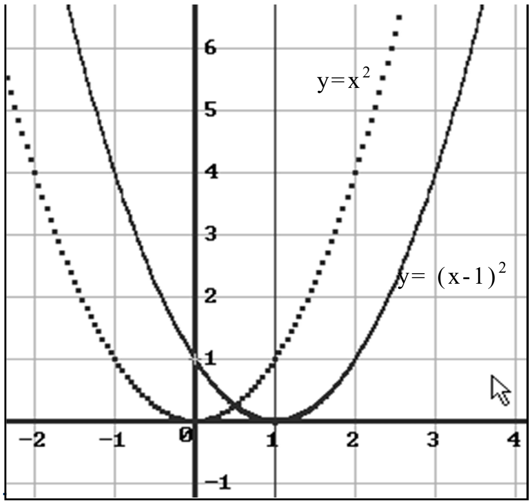
$$x \mapsto \overset{R_1}{\boxed{[\ldots] - 1}} \mapsto (x-1) \mapsto \overset{f}{\boxed{[\ldots..]^2}} \mapsto (x-1)^2$$

$q(x) = f o R_1(x)$

Conclusión: $q(x) = f(x-1)$ **(*)**

(*) resto 1 a la v. i. ; luego:
graf q = graf f trasladado 1 unidad a derecha
graf q = ´parábola´ trasladada 1 u. a derecha

∗eje de simetría: x =1
∗vértice: V*(1,0)



Ejemplo 3: $C(x) = x^2 - 2x + 3$

<u>NOTA</u> : **trabajamos algebraicamente la función C . En este caso: *completamos cuadrados.***

$C(x) = [x^2 - 2x + \mathbf{1}] \mathbf{- 1} + 3$

$$\mathbf{C(x) = (x-1)^2 + 2}$$

<u>NOTA</u> : **¿ que operaciones vinculan C con f ?**

$$x \; \overset{R_1}{\boxed{[\ldots]-1}} \rightarrow \mathbf{(x-1)} \rightarrow \overset{f}{\boxed{[\ldots]^2}} \rightarrow \mathbf{(x-1)^2} \rightarrow \overset{S_2}{\boxed{[\ldots]+2}} \rightarrow (x-1)^2+2$$

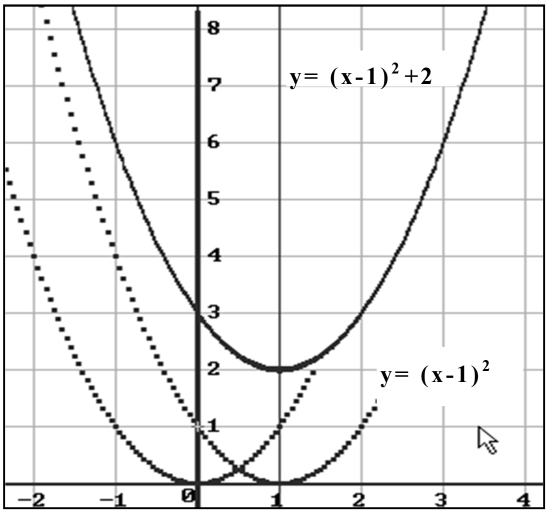
$C(x) = S_2 \text{ o } f o R_1(x)$

Conclusión: $C(x) = f(x-1) + 2$ **(*)**

(*) resto 1 a la v.i.; sumo 2 a la función resultado.

graf C = graf f trasladado: 1☞ y 2☝
graf C = ´parábola´ trasladada: 1☞ y 2☝

∗ eje de simetría: x =1
∗ vértice: V(1,2)**



CONCLUSIONES:

- Los ejemplos vistos permiten suponer que cualquiera sea la forma de la función cuadrática la gráfica siempre va a ser una *parábola*, que la misma puede pensarse como el resultado de trasladar a otra región del plano la parábola correspondiente a una potencia dada, que el vértice resulta de ´completar cuadrados´ en la función original.
- Si trabajamos algebraicamente la expresión general, $C(x)= ax^2 +bx+ c$, demostramos con toda certeza que la gráfica de una cuadrática es siempre una parábola. Efectivamente, como resultado del trabajo algebraico obtenemos que la vinculación entre C y f se da través de una expresión de la forma: $C(x) = a. f (x + h) + k$, y esto (s/ TABLA pag. 48), indica que la cuadrática C se puede interpretar como el resultado de operaciones gráficas realizadas sobre la potencia $f(x) = ax^2$, donde:
  - h , indica el corrimiento en sentido horizontal.
  - k , indica el corrimiento en sentido vertical.
  - a , indica la abertura de las ramas de la parábola y hacia adonde apuntan.

$$\mathbf{C(x)} = \mathbf{ax^2+ bx +c} \xrightarrow{\text{completando cuadrados}} C(x) = \mathbf{a}\,(x-\mathbf{h})^2 + \mathbf{k}$$

graf C = parábola

|h| **unidades** ☞ ó ☜

|k| **unidades** ☝ ó ☟

- Elementos geométricos que caracterizan la parábola:
  - *eje de simetría* : x = h
  - *vértice :* V*(h, k)
  - *abertura de las ramas* → signo del coeficiente **a** →
    - a > 0 → ∪**, parábola** ☝
    - a < 0 → ∩**, parábola** ☟

- **Grafica ´por corrimientos´ de una función cuadrática, $C(x) = ax^2+ bx +c$.**

1º) reconocemos el *tipo de función, su gráfica* → cuadrática, parábola , ramas.

2º) elegimos la *función prototipo* → $\mathbf{f(x) = a\,x^2}$

3º) completamos cuadrado para obtener el nuevo vértice: $C(x) = \mathbf{a}\,(x-\mathbf{h})^2 + \mathbf{k}$

4º) trasladamos al punto V*(h,k) la parábola correspondiente a $f(x)=a\,x^2$. (Para un mejor gráfico podemos calcular otros puntos además del vértice).

Ejemplo 4: $C(x) = 2x^2 - 4x - 6$

1°) $C(x) = 2x^2 - 4x - 6$

- **cuadrática** → ***parábola***
- **a = 2 >0** → ***ramas*** ☝
- **b ≠ 0; c ≠ 0** → ***parábola ´trasladada´.***

2°) $f(x) = 2x^2$ *(prototipo)*

3°) $C(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2.[x^2 - 2x - 3] = 2.[(x^2 - 2x + 1) - 1 - 3] = \mathbf{2(x-1)^2 - 8}$

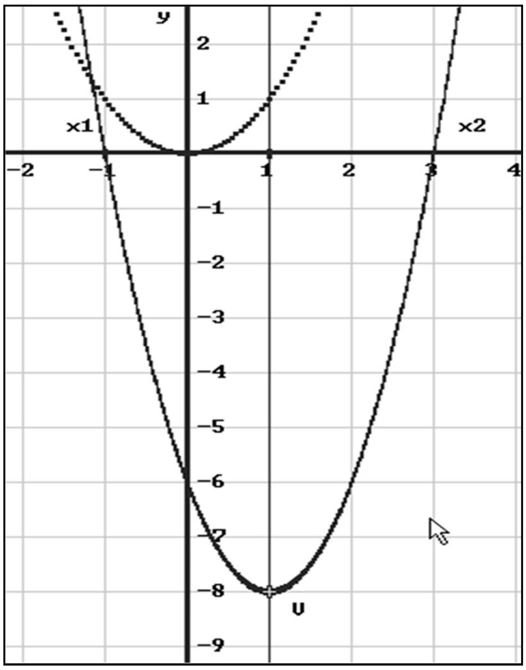
$C(x) = f(x-1) - 8$

4°) graf C = graf f trasladado a V*(1; - 8).

Para graficar con mayor precisión calculamos otros puntos de la gráfica, pero no puntos cualesquiera sino aquellos que *sobresalen (*)*: los correspondientes a la intersección de la parábola con cada uno de los ejes x-y .

PTOS SOBRES.	**x**	**y =C(x)**	**P(x ; C(x))**
P_y (0; C(0))	**0**	**-6**	**(0; -6)**
P_x (x; 0)	**x/C(x)=0**	**0**	**(-1; 0)** **(3 ; 0)**
V*(h ; k)	**1**	**- 8**	**(1; - 8)**

***eje simetría*: x =1**



(*) en la parábola distinguimos cuatro puntos *´sobresalientes´*: V, P_y, P_{x1} , P_{x2} ; o sea, vértice e intersección con los ejes coordenados respectivamente. También distinguimos una recta que *´sobresale´*: el eje de simetría; luego, una vez reconocida la función y la orientación de las ramas, podemos graficar la parábola con sólo determinar estos *elementos sobresalientes´*. Tenemos así otro *método* para graficar una cuadrática.

- **Procesos para graficar funciones (en general) .**

Método 1: por *corrimientos*.
1°) reconocer la clase a la que pertenece la función en estudio.
2°) elegir una función prototipo dentro de esta clase.
3°) trabajar algebraicamente la función dada hasta poner en evidencia la relación entre ella y la prototipo; o sea, hasta detectar las *operaciones gráficas* que permiten ´pasar´ de la prototipo a la dada.
4°) operar sobre la función prototipo acorde a lo detectado en(3°).

Método 2: por *elementos sobresalientes*.
1°) reconocer el tipo de función y sus elementos sobresalientes.
2°) calcular y graficar los elementos sobresalientes.
3°) unir con un trazo continuo los puntos sobresalientes obtenidos en el 2° paso, teniendo en cuenta la identificación hecha en el 1er. paso y los otros elementos sobresalientes (si existen)

Ejemplo 5: $C(x) = 2x^2 - 8x + 6$. Graficamos C, <u>por elementos sobresalientes</u>

1°) reconocemos <u>tipo de curva</u> y <u>elementos sobresalientes</u>

- **cuadrática → *parábola***
- **a = 2 → *ramas* ↑ ; b ≠ 0; c ≠ 0 → *trasladada***
- **Puntos de intersección con los ejes → parábola ∩ eje y; parábola ∩ eje x (*)**
- **eje de simetría →** $x_{(eje)} = h$ **(**)**

(*) parábola ∩ eje x = $P_{x\,(x,\,0)}$ ⇒ **buscamos los x´s tal que C(x) =0 .**

$$C(x) = 0 \Leftrightarrow a\,x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Pregunta: **el valor de Δ, ¿qué información da acerca de la intersección buscada ?**

(**) $x_{(eje)} = h$ → ¿h?

El eje de simetría es paralelo al eje *y*; luego, toda recta perpendicular al eje *y* corta a la parábola en dos, uno o ningún punto. *Si la corta, los puntos de corte equidistan del eje de simetría.*

Así, si P_{x1} y P_{x2} (∩ eje x) *existen*, *estos puntos equidistan del eje de simetría.*

En tal caso, el $x_{(eje)}$ *es el punto medio entre* x_1 *y* x_2.

Conclusión 1: $h = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

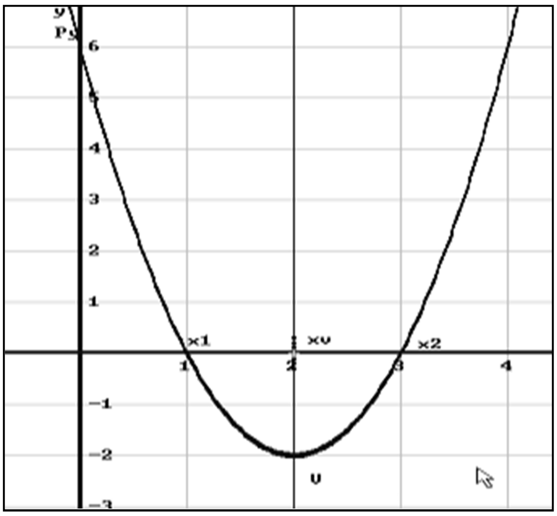
Conclusión 2: para todo Δ, $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2.a}$; luego, vale también, $h = \dfrac{-b}{2.a}$

(***) ¿ V ? *:* $V(x_v, y_v)$ vértice de la parábola ⇒ V está sobre el eje de simetría ⇒ $x_V = h$

Conclusión: $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y_V = C(x_V)$

2°) calculamos los puntos sobresalientes

PTOS SOBRES.	x	y=C(x)	P(x;C(x))
P_y (0; y)	0	C(0)= 6	(0; 6)
P_{x1} (x_1,0)	x_1 =1	C(1)=0	(1; 0)
P_{x2} (x_2,0)	x_2 =3	C(3)=0	(3; 0)
V (x_v ; y_v)	$x_v = \frac{1+3}{2}$	y_V=C(2)	(2; -2)

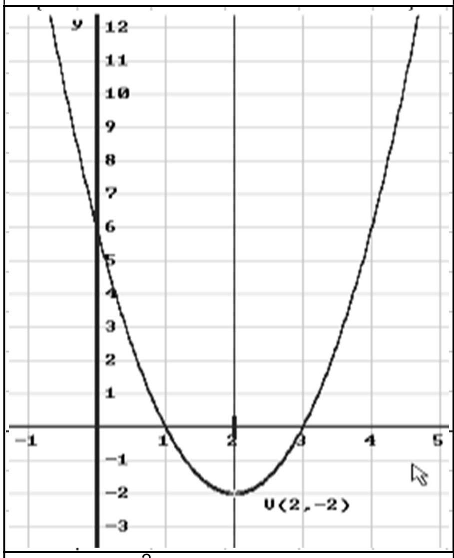
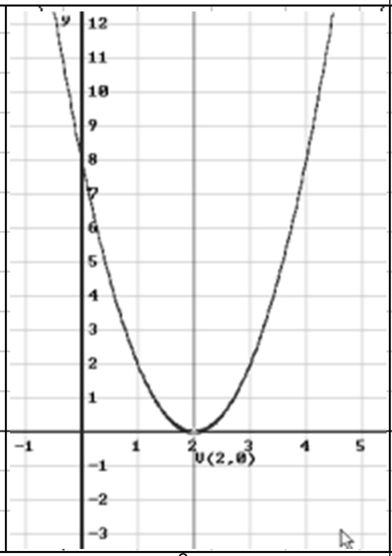
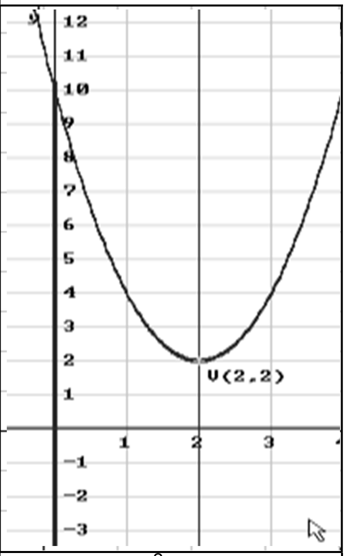


3°) graficamos la parábola.

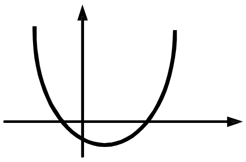
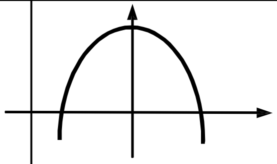
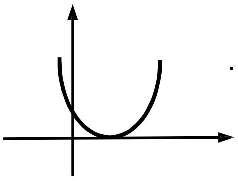
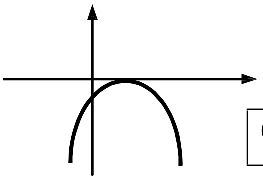
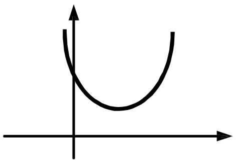
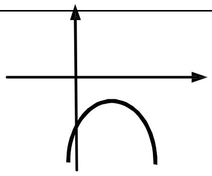
<u>OBSERVACION</u>: para obtener los puntos de intersección de la curva con el eje x tenemos que resolver una ecuación. Así, en este caso, la cantidad de puntos de intersección depende del número y tipo de raíces de una ecuación de 2do grado.

$$a\,x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Analizamos algunos ejemplos a los efectos de concluir de qué depende la intersección buscada:

$C(x) = 2x^2 - 8x + 6$ (ej. 5)	$p(x) = C(x) \mathbf{+ 2}$	$q(x) = C(x) \mathbf{+ 4}$
		
$C(x) = 2x^2 - 8x + 6$ $\Delta = (-8)^2 - 4.2.6 = \mathbf{16}$ $x_1 = 1$; $x_2 = 3$	$p(x) = 2x^2 - 8x + \mathbf{8}$ $\Delta = (-8)^2 - 4.2.8 = \mathbf{0}$ $x_1 = x_2 = 2$	$q(x) = 2x^2 - 8x + \mathbf{10}$ $\Delta = (-8)^2 - 4.2.10 = \mathbf{-16}$ x_1 y x_2: Nros complejos
$\Delta > 0 \Rightarrow \cap$: dos puntos	$\Delta = 0 \Rightarrow \cap$: un punto	$\Delta < 0 \Rightarrow \cap$: no existe

Conclusión: la intersección de la parábola con el eje x depende del signo de Δ **,** discriminante de la resolvente de la ecuación de 2do grado.

RESUMEN:	**a > 0**	**a < 0**
Δ **> 0**		
Δ **= 0**	 $C(x) \geq 0; \forall x$.	 $C(x) \leq 0; \forall x$.
Δ **< 0**	 $C(x) > 0; \forall x$.	 $C(x) < 0; \forall x$.

M📄
- LINEALES y ***CUADRÁTICAS***
- POTENCIAS
- RAÍCES

C → **cuadrática** /
C(x) = a x^2 + bx +c

- **operamos en M📄** → OPERACIONES GRÁFICAS

El proceso hecho con la función cuadrática se puede hacer con cualquier otra función. Es decir, a través de *´operaciones gráficas´* podemos relacionar una función *`desconocida´* con una de la Memoria y, a partir de allí, establecer la *´clase´* a la que pertenece la función *`desconocida´*.

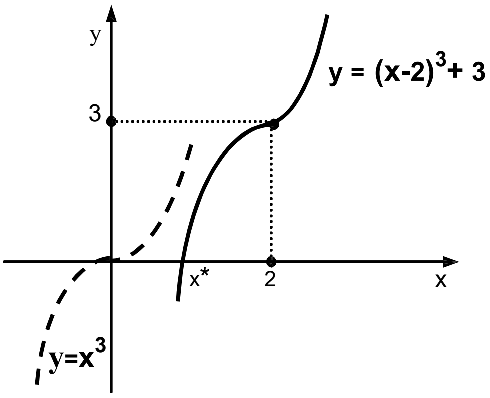
Ejemplo 6: **p(x) = $(x-2)^3$+ 3** ← función de referencia en M📄 → **f (x) =x^3**

operaciones → * restar 2 a la v.i. → 2 ☞ .
* sumar 3 a f → 3 ☝ .

conclusión → * graf p = graf f trasladado 2☞ y 3☝

D_p = **R**
C_p = **Im p = R**
p → estrictamente creciente
p → biyectiva
p → tiene una raíz real en x*

p → admite inversa ‘g’.



Ejemplo 7: hallar **g** inversa de p(x) = $(x-2)^3$+ 3.

» **p**: **R → R** / y=p(x) con p(x)= $(x-2)^3$+3
» **g**: **R → R**
» ley **g :**

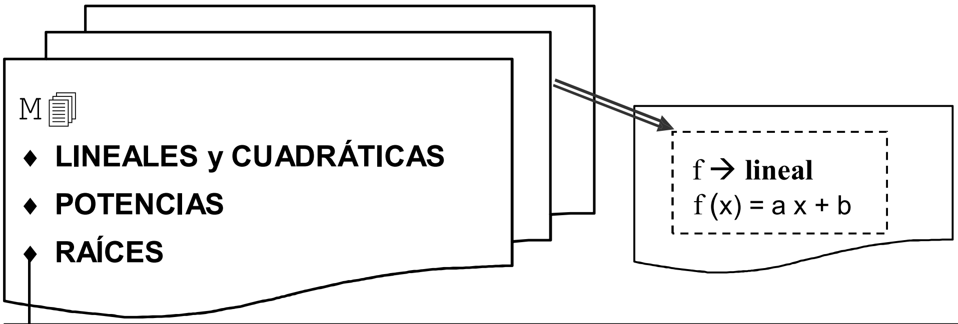
g(y) = x ⇔ **p**(x) = **y** **(*)**

$$\underbrace{\begin{aligned} g(y) = x &\Leftrightarrow (x-2)^3+3 = y \\ &\quad\downarrow R_3 \\ g(y) = x &\Leftrightarrow (x-2)^3 = y-3 \\ &\quad\downarrow \sqrt[3]{*} \\ g(y)= x &\Leftrightarrow (x-2) = \sqrt[3]{y-3} \\ &\quad\downarrow S_2 \\ g(y)= x &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-3}+2 \end{aligned}}$$

$$g(y) = \sqrt[3]{y-3}+2$$

<u>RECORDAR</u>: para hallar inversa:

- **Damos la ley de g inversa de p, ´por definición´ (*).**
- **Tratamos de hallar (si existe) una** *fórmula* **para la ley de g**.
- **Si existe una fórmula para g ésta se obtiene de despejar** x **en p(x) = y ; y,** *despejar* **≈ *aplicar inversas.***
- **<u>En este caso</u>, las inversas de las funciones que componen ´p´ son** *conocidas* **; luego, podemos hallar una fórmula para g**



♦ **operamos** → ¿ cociente de polinomios? → función racional (*desconocida*)

En este punto no tenemos todavía conocimientos suficientes para analizar funciones racionales en general Si podemos hacerlo para un caso particular: *el cociente de dos lineales.*

$$h(x)=\frac{a.x+b}{c.x+d}\xrightarrow{\text{dos opciones}}\left[\begin{array}{l} c=0;\ d\neq 0;\ h(x)=\frac{a}{d}.x+\frac{b}{d}\longrightarrow \textit{lineal}\\ c\neq 0\longrightarrow \textit{función racional}\rightarrow \textit{homográfica}\end{array}\right.$$

Observamos así que el cociente de dos lineales puede dar otra lineal (c=0) o una racional propiamente dicha (c ≠0). Esta última es una función que no tenemos en la memoria; luego, es una función desconocida y, por ende, tenemos que estudiarla.

1.5.5 Función Homográfica: $h(x) = \frac{a.x + b}{c.x + d}$; $a, b, c, d \in R$; $c \neq 0$

Según lo establecido en la pág. 64 para conocer la función homográfica procedemos a explorar a través de operaciones gráficas la relación entre dicha función y una función prototipo f conveniente al efecto. Vimos también que f generalmente es el caso más elemental posible para la función en cuestión; en este caso, el cociente entre una constante y la identidad.

$$h(x) = \frac{a.x + b}{c.x + d} \xrightarrow{a=0;b=1;c=1;d=0} f(x) = \frac{1}{x} \quad (\rightarrow \textit{recíproca})$$

La función recíproca no está en M🗐; o sea, es también una función desconocida. Luego, comenzamos por estudiar esta función.

Caso elemental: $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$

▪ **Dominio de f**: al estudiar una función desconocida lo primero que debemos determinar es su dominio. En este caso **f** es el cociente de dos funciones; luego, el dominio resulta de la intersección de los dominios de las funciones que forman el cociente, *menos los puntos en que se anula la función del denominador*. Así, $\mathbf{D_f = R - \{0\}}$.

▪ **Gráfica de f**: en este caso para obtener la gráfica de la función no tenemos otra opción que acudir al proceso más elemental que disponemos al efecto; o sea, a la *tabla de valores.* Así:

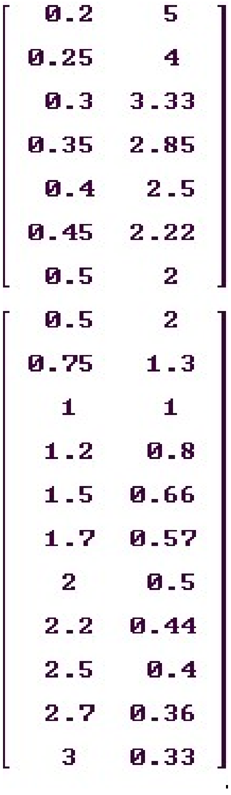
- calculamos y completamos una *tabla de valores* hasta que aparece cierta *configuración*
- unimos los puntos según lo sugiere la configuración y obtenemos la curva.
- le damos un nombre a la curva; en este caso: *HIPÉRBOLA*.

Nota: cuando para graficar debemos acudir a una tabla de valores resulta útil detectar propiedades de la función, pues muchas veces las mismas proporcionan datos útiles para la construcción de la tabla.

En este caso por ejemplo la función es *impar*; luego, su gráfica debe ser *simétrica respecto del origen*.

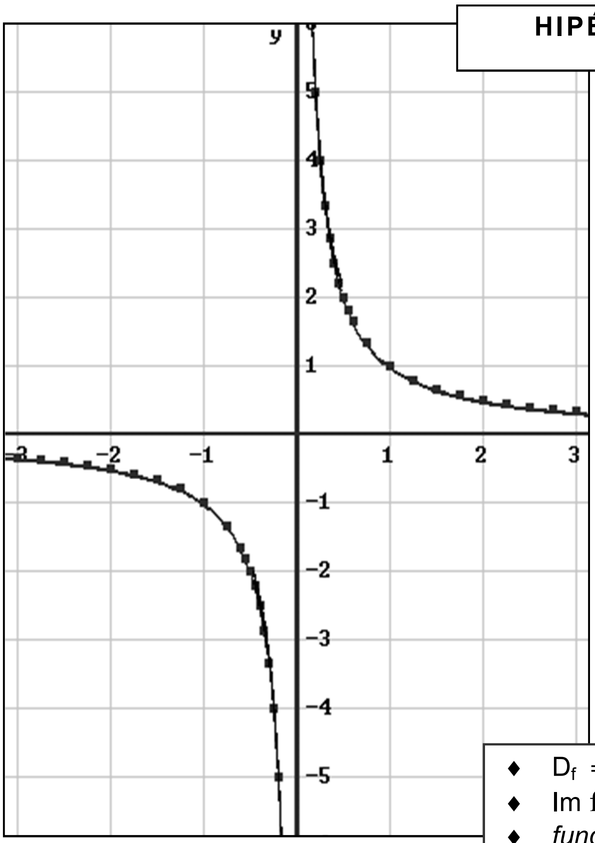
Esto implica que podemos construir la tabla sólo para $x > 0$, graficar la curva correspondiente a los puntos así obtenidos y luego, *por simetría*, completar la gráfica para los $x < 0$.

Procedemos a graficar f acorde a esta última observación.



x	$y = \frac{1}{x}$
0.2	5
0.25	4
0.3	3.33
0.35	2.85
0.4	2.5
0.45	2.22
0.5	2
0.5	2
0.75	1.3
1	1
1.2	0.8
1.5	0.66
1.7	0.57
2	0.5
2.2	0.44
2.5	0.4
2.7	0.36
3	0.33

HIPÉRBOLA



- $D_f = R - \{0\}$
- $\text{Im } f = R - \{0\}$
- *funcion impar*
- *inyectiva*
- centro de simetría: *origen O*

- la curva presenta:

¡¡ ASÍNTOTAS !!

a_h: y = 0 (eje x)

a_v: x = 0 (eje y)

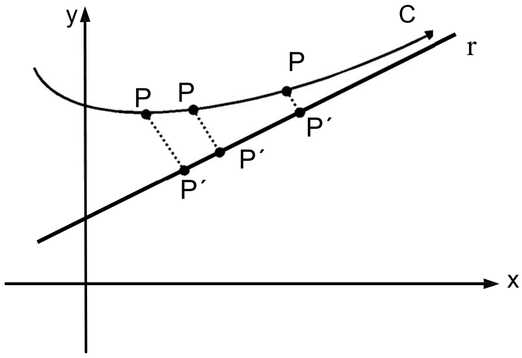
Nota: observamos que la hipérbola tiene una propiedad que hasta ahora no se había presentado en las otras curvas estudiadas:

"sus ramas se acercan tanto como quiera a los ejes coordenados, sin cortarlos nunca".

Los ejes coordenados son *asíntotas de la curva.*

DEFINICIÓN

asíntota de una curva	**Una recta r se dice que es una asíntota de una curva C si dado un punto P sobre C, la distancia entre P y P´ (proyección de P sobre r), se hace cada vez más chica a medida que P se mueve sobre la curva en algún sentido; es decir, d(P, P´)→ 0 cuando P se desplaza sobre C.**

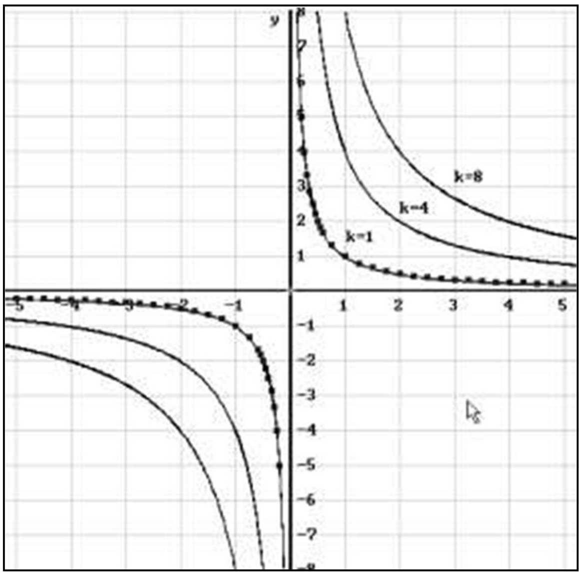


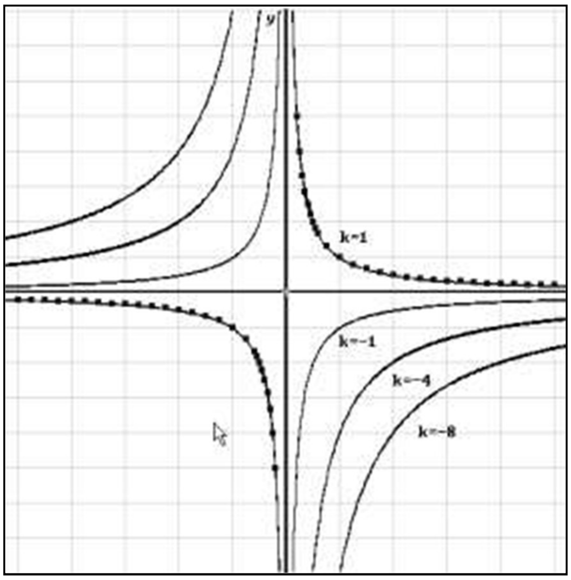
- La recta r es una asíntota para la curva C.
- En el caso de la homográfica las asíntotas son
  rectas horizontales (y = k)
  ó
  rectas verticales (x = h).

Estudiada la función recíproca, f(x) = 1/x, hipérbola con ramas en 1er y 3er cuadrante, nos apoyamos en esta función a los efectos de concluir para las funciones homográficas en general.
Así, en lo que sigue exploramos a través de operaciones gráficas y distintos ejemplos la relación entre homográficas cualesquiera y la función recíproca f .

Ejemplo 1: a = d = 0 → $h(x) = \frac{b}{c.x} = \frac{b/c}{x} \xrightarrow[b/c=k]{}$ $\mathbf{h(x) = \frac{k}{x}}$

En este caso, h(x) = k. f(x); luego y según la tabla de transformación de funciones de la pag. 48 la gráfica de h será una hipérbola alargada, comprimida o reflejada respecto del eje x según sea el valor y signo de la constante k.





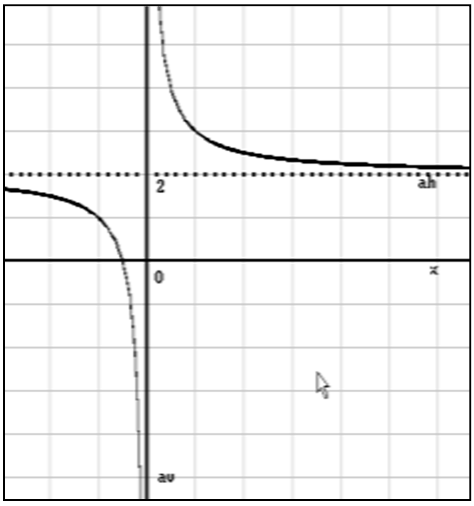
k > 0 → HIPÉRBOLAS
ramas: I C y III C

k < 0 → HIPÉRBOLAS
ramas: II C y IV C

Ejemplo 2: $h(x) = \dfrac{2.x+1}{x}$

NOTA: en este caso la relación entre h y f no es evidente. Luego, trabajamos algebraicamente la función h hasta descubrirla; para ello, *dividimos* .

$$h(x) = 2 + \frac{1}{x} \xrightarrow{f(x)=1/x} h(x)=f(x)+2$$



(*) Sumo 2 a la función f; luego:

. graf h = graf f , 2 ☝ .

. graf h = ´hipérbola´ subida 2 unidades

∗ Dh = R – {0}

∗ a_V : x =0 (eje y)

∗ a_h : y =2 (eje x , 2 ☝)

∗ O´(0,2) → centro de simetría

(**) Para graficar la hipérbola trasladada basta con trasladar las asíntotas y el centro de simetría, tomar estos elementos como sistema coordenado auxiliar x´-y´, y graficar allí la *hipérbola tipo* correspondiente a f .

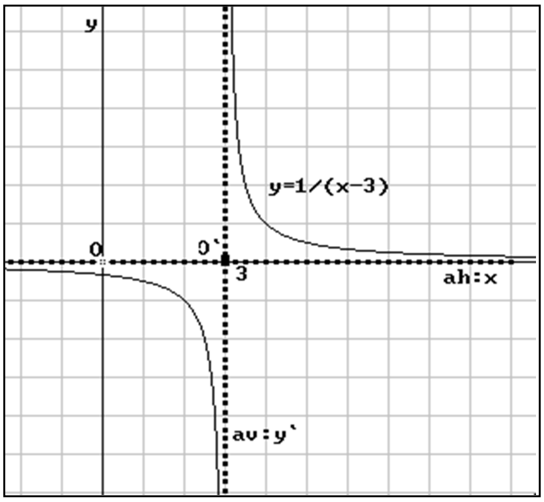
Ejemplo 3: $h(x) = \dfrac{1}{x-3}$

NOTA: en este caso la relación entre h y f no es evidente. Si se observa fácilmente que h es una composición de funciones → ***¿de qué funciones?***

$$x \mapsto \overset{R_3}{\boxed{[\ldots]-3}} \mapsto (x-3) \mapsto \overset{f}{\boxed{1/[\ldots]}} \mapsto {}^{1}\!/_{x-3}$$

$$h(x)=f\text{o}R_3(x)$$

Conclusión: h(x)= f(x-3)



(*) resto 3 a la v. i. ; luego:

graf h = graf f ; 3 ☞

graf h = ´hipérbola´ trasladada 3 ☞

∗ Dh = R – {3}

∗ a_V : x =3 (eje y, 3 ☞)

∗ a_h : y =0 (eje x)

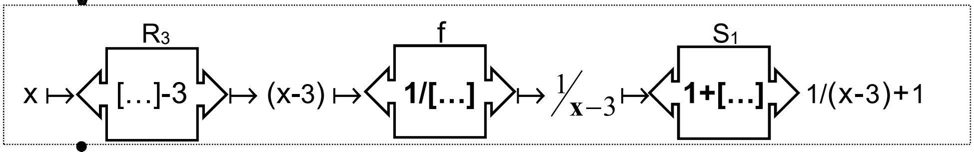
∗ O´(3,0) → centro de simetría

Ejemplo 4: $h(x) = \frac{x-2}{x-3}$

$h(x) = 1 + \frac{1}{x-3}$

NOTA : **trabajamos algebraicamente la función h . En este caso acudimos al: *algoritmo de la división*.**
(x-2) = c (x-3) + r con c = cociente; r = resto.

NOTA : **¿ que operaciones vinculan h con f ?**



$h(x) = S_1 \circ f \circ R_3(x)$

Conclusión: $h(x) = f(x-3) + 1$

(*) resto 3 a la v.i.; sumo 1 a la función resultado.

graf h = graf f trasladado: 3☞ y 1☝

graf h = ´hipérbola´ trasladada: 3☞ y 1☝

∗ **Dh = R – {3}**

∗ **a$_V$: x =3 (eje y, 3 ☞)**

∗ **a$_h$: y = 1 (eje x , 1 ☝)**

Observaciones:

Los ejemplos vistos van poniendo en evidencia algunos hechos :

- La asíntota horizontal es la recta y=k, donde k indica lo que que trasladamos la hipérbola en forma vertical. (☝ ó ☟)
- La asíntota vertical es la recta x=h, donde h indica lo que que trasladamos la hipérbola en forma horizontal (☞ ó ☜)
- La asíntota vertical pasa por el punto que excluimos del dominio de la función. (este hecho proporciona un método muy simple para determinar donde se halla esta asíntota, el de buscar el punto donde se anula el denominador) .

ⓘLo observado hasta ahora nos animaría a conjeturar que el gráfico de una homográfica es siempre una hipérbola. Ahora bien, ¿nos animamos a dar por válida esta conjetura sin más ?, ¿alcanzan los ejemplos vistos para concluir acerca de la verdad de tal supuesto?. Un buen matemático sabe que no, que no hay ninguna cantidad de ejemplos que alcance para demostrar la validez de una conjetura, que las demostraciones matemáticas se basan en el método deductivo; sabe también que basta un contraejemplo para demostrar que un supuesto es falso.
Entonces.., ¿cómo procedemos para concluir en este caso?
Tenemos distintos caminos para asegurarnos de la validez de los resultados obtenidos, uno de ellos, *trabajar en forma genérica*. En lo que sigue, optamos por este método.

Ejemplo 5: $h(x) = \dfrac{\mathbf{a.x + b}}{\mathbf{c.x + d}}$

$h(x) = \boldsymbol{k} + \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{c.x + d}}$

Trabajamos algebraicamente la función h acudiendo al: ***algoritmo de la división.***
(a.x+ b) = k **(c.x+d) + r con** k **= cociente; r = resto**

ⓘ La expresión obtenida indica que la graf h es una hipérbola ⇔ $\mathbf{r} \neq 0$; o sea, si el resto de dividir numerador por denominador <u>no es cero</u>.

ⓘ ¿ **r** = 0 ?. Investigamos en que caso se da esta situación y concluimos que:

$$\mathbf{r} = 0 \iff a = \boldsymbol{k}.c \;;\; b = \boldsymbol{k}.d \iff \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} \text{ ó } \mathbf{a.\,d - b.\,c = 0\,.}$$

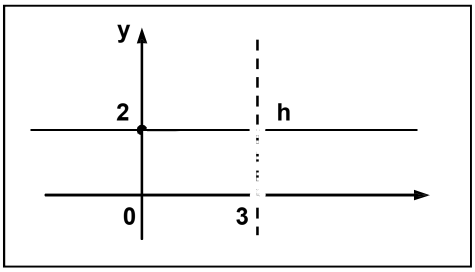
¿Qué sucede en tal caso?, vemos un ejemplo:

$$h(x) = \frac{2x-6}{x-3};\ \left[\frac{a}{c} = \frac{b}{d}\right];\ D_h = R\text{-}\{3\}$$

$$h(x) = \frac{2(x-3)}{x-3} \underbrace{=}_{x\neq 3} \mathbf{2.}$$

Luego, comparando h con la función g tal que, $g(x)=2 \ \forall\, x \in R$, tenemos:

$\forall\, x \neq 3$ → $h(x) = g(x)$
$x = 3$ → $h(3) \neq g(3)$ pues $h(3)$: ∄



<u>*Conclusión:*</u> h coincide con una función constante excepto en un punto.
Luego, su gráfica coincide con la de la recta y = 2 excepto en un punto, por ello decimos que la misma es una ´recta perforada´ (o agujereada).

RESUMEN: ***homográfica***

- $h(x) = \dfrac{\mathbf{a.x + b}}{\mathbf{c.x + d}}$; $c \neq 0$
- $D_h = R - \{- d/c\}$
- graf h → depende de la existencia o no de proporcionalidad entre los coeficientes.

(I) $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}}$ ⇒ graf h = *recta perforada*

(II) $\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \neq \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}}$ ⇒ graf h = *hipérbola trasladada* (*)

(*)en este caso la hipérbola es el resultado de operaciones gráficas efectuadas sobre $f(x) = \alpha/x$; así y según la TABLA de la pag. 48, h resulta vinculada a f a través de la siguiente expresión $h(x) = \alpha.\, f(x + d/c) + k$, donde:

- d/c , indica el corrimiento en sentido horizontal.
- k , indica el corrimiento en sentido vertical.
- α (= r/c), indica la abertura de las ramas de la hipérbola y el cuadrante donde están.

$$h(x) = \frac{a.x + b}{c.x + d} \xrightarrow{\text{dividiendo}} h(x) = k + \frac{r}{c.x + d} = k + \alpha \frac{1}{x + d / c}$$

graf h = hipérbola

corrimiento: ☞ ó ☜ .

corrimiento : ☝ ó ☟

(*) Elementos geométricos que caracterizan la hipérbola:

∗ asíntota vertical → a_v : $x = - d/c$ (☞ ó ☜).

∗ asíntota horizontal → a_h : $y = k$ (☝ ó ☟)

∗ centro de simetría → O´ (-d/c, k)

∗ ramas →
- $\alpha > 0$ → **I y III C**
- $\alpha < 0$ → **II y IV C**

Ejemplo 6: $h(x) = \frac{3.x - 5}{x - 4}$; D_h= R - { 4 }

1º) reconocemos el <u>tipo de función</u> →

- **c ≠ 0 → homográfica;**
- **3 / 1 ≠ (-5)/ (-4) → HIPÉRBOLA**
- **b ≠ 0 y d ≠ 0 → *trasladada***
- **nuevo sistema → eje x´= a_h ; eje y´ = a_v**

2º) efectuamos el cociente:

$$h(x) = \frac{3.x - 5}{x - 4} \xrightarrow{\text{dividiendo}} h(x) = 3 + \frac{7}{x - 4}$$

graf h = hipérbola

3 ☝

4 ☞

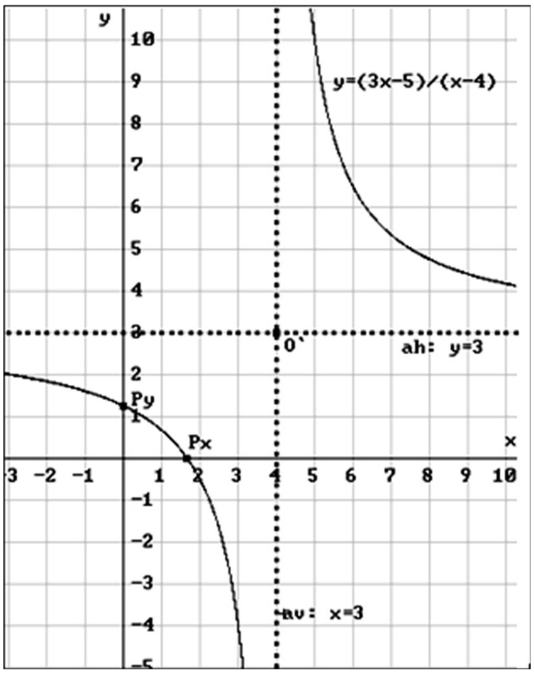
3º) elegimos la <u>función tipo de referencia</u> : f (x) = 7 / x → ramas I y III C

4º) O´(4 ; 3) ; a_v : x = 4 ; a_h : y = 3

5º) trasladamos f (x) = 7/ x al sistema x´-y´ formado por las asíntotas y O´.

(para graficar con mayor precisión buscamos otros puntos sobresalientes tales como la intersección de la curva con cada uno de los ejes coordenados → Px y Py)

PTOS. SOBRES.	x	y = h(x)	P(x; y)
P_y (0; h(0))	0	5/4	(0; 5/4)
P_x (x ; 0)	x /h(x)=0	0	(5/3; 0)
O´ (☞; ☝)	4	3	(4 ; 3)



(*) elementos sobresalientes de la hipérbola:

<u>tres puntos</u> *:*

- P_y , P_x , intersección con los ejes .
- **O´** , centro de simetría.

<u>dos rectas</u>: las asíntotas.

Estos elementos permiten *ubicar* fácilmente la hipérbola una vez *reconocida* (paso 1º); o sea, permiten que para graficar la curva usemos el otro método, el del gráfico por *"elementos sobresalientes"* .

Ejemplo 7: $h(x) = \dfrac{6.x - 8}{2.x - 4}$; $D_h = R - \{ 2 \}$

Graficamos h, <u>por elementos sobresalientes</u>:

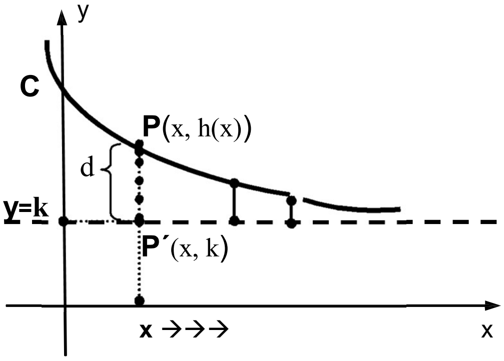
1º) reconocemos el <u>tipo de función</u> y sus <u>elementos sobresalientes</u>

- **$c \neq 0$ → homográfica;**
- **$6 / 2 \neq (-8)/(-4)$ → *hipérbola***
- **$b \neq 0$ y $d \neq 0$ → *trasladada***
- **nuevo sistema → eje y´= a_v → x = 2 (*)**
  eje x´ = a_h → y = k (**)
  O´ (h ; k) → O´ (2 ; k)

(∗) Como ya observáramos la asíntota vertical pasa por el punto que no pertenece al dominio de h .

(∗∗) Para poder graficar la hipérbola por elementos sobresalientes se hace necesario hallar una forma de detectar <u>directamente de la ley</u> el punto por donde pasa la <u>asíntota horizontal</u> ; o sea, una forma de reconocer **k** sin tener que realizar la división.

- Con este objeto recordamos y analizamos la definición de asíntota.



➢ **La recta y = k es asíntota de C para x →+∞ (o x → -∞) si y sólo si d (P; P´) → 0 a medida que x crece (o decrece) sin tope.**

- Luego; para detectar la asíntota horizontal, o sea el valor de **k** , basta con identificar el número al cual se aproxima h(x) para valores de x muy grandes**.**
- ¿Es posible identificar tal número? Sí, si trabajamos algebraicamente la función y la escribimos de otra forma podemos entonces reconocer este valor.

$$h(x) = \frac{\mathbf{a.x + b}}{\mathbf{c.x + d}} \xrightarrow{\div \ \mathbf{m.a.m.\ por.x}} h(x) = \frac{\mathbf{a} + \left[\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}}\right] \xrightarrow{\mathbf{x\ ´grande´}} \approx 0}{\mathbf{c} + \left[\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{x}}\right] \xrightarrow[\mathbf{x\ ´grande´}]{} \approx 0} \approx \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$$

Conclusión : para x´s muy grandes, h(x) $\approx \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$; luego este es el valor buscado.

Por lo tanto k = $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$ y la asíntota horizontal es , y= $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$; o sea, a_h se obtiene de hacer el *cociente entre los coeficientes de la variable independiente.*

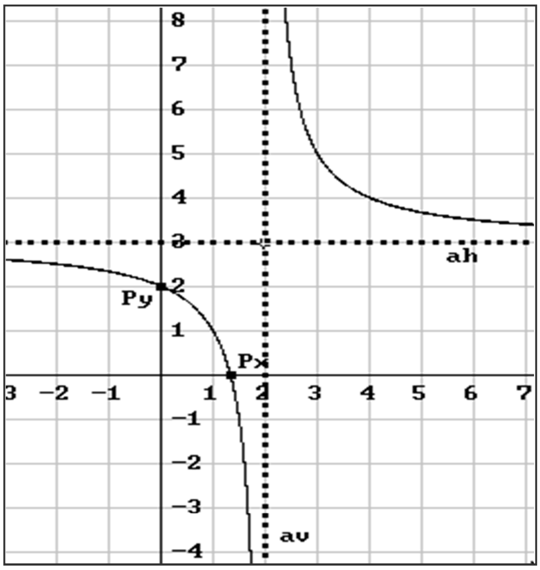
2º) calculamos los elementos sobresaliente

de h(x) = $\frac{6x-8}{2x-4}$

PTOS SOBRES.	x	y = h (x)	P(x; y)
P_y (0; h(0))	0	2	(0 ; 2)
P_x (x ; 0)	4/3	0	(4/3; 0)
O´ (☞; ☝)	2	3	(2; 3)

eje y´ = a_v → x = 2

eje x´ = a_h → y = 3



3º) graficamos la hipérbola con esos datos

M🗐

- LINEALES y CUADRÁTICAS
- POTENCIALES
- RAÍCES
- ***HOMOGRÁFICAS***

h → **homográfica /**

h(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$; c ≠ 0

Operamos: ¿existe inversa de homográfica?, ¿sí?, ¿conocida ó desconocida?

- Sea f (x) = 1/x con f : R–{0} → R–{0} entonces f es biyectiva y existe g, inversa de f .

ley g: f o g= id ⇒ f o g (x) = x ⇒ f (g(x))=x ⇒ 1/g(x)= x ⇒ g (x)= 1/x ⇒ **g ≡ f**

(*) En este ejemplo vemos otra forma de hallar la función inversa: trabajar con la propiedad de que la composición de una función y su inversa es la ´identidad´

(*) Comprobamos además que la inversa de la recíproca es : ¡¡ la recíproca !!.

(*) Si observamos la gráfica de la recíproca vemos que esta, además de ser simétrica respecto del origen también lo es respecto de la recta y=x. Esto ya era un indicio de que la función y su inversa debían coincidir.

- **h (x)** = $\frac{6.x-2}{2.x-2}$; h: R-{1} → R-{3}; biyectiva ⇒ ∃ g = inversa de h

Dg = **R-{3}**

Im g= **R-{1}**

ley g**:** **g(y)** = x → ¿ x ?

g(y) = x ⇔ **h**(x) = **y** (**ley por def.**)

$$\frac{6.x-2}{2.x-2} = y \quad \text{(dividimos)}$$

$$3 + \frac{4}{2.x-2} = y \quad \text{(R3)}$$

$$\frac{4}{2.x-2} = y - 3 \quad \text{(recíproca)}$$

$$\frac{2x-2}{4} = \frac{1}{y-3} \quad \text{(M4)}$$

$$2x\text{-}2 = \frac{4}{y-3} \quad \text{(D2)}$$

$$x\text{-}1 = \frac{2}{y-3} \quad \text{(S1)}$$

$$x = \frac{2}{y-3} + 1$$

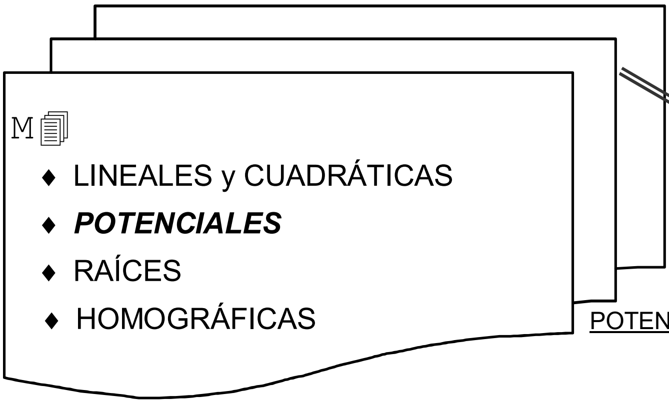
En este caso conocemos las inversas de cada una de las funciones que definen ´h´, luego podemos despejar ´x´ de h(x) = y; obtener una fórmula para g.

$$\boxed{x = \frac{2}{y-3} + 1}$$

Conclusión: g(y) = $\frac{2}{y-3}$ +**1** → **homográfica** → **¡conocida!**

Si deseamos graficarla en el mismo sistema que h, intercambiamos el nombre de las variables y aplicamos cualquiera de los métodos vistos para graficar homográficas:

$\left.\begin{array}{l} x \to y \\ y \to x \end{array}\right]$ ⊢ $y = \frac{2}{x-3} + 1$ → hipérbola desplazada (3☞ y 1☝)



M

- ♦ LINEALES y CUADRÁTICAS
- ♦ ***POTENCIALES***
- ♦ RAÍCES
- ♦ HOMOGRÁFICAS

f → **función potencial** /
f(x)= x^n ; n∈N → **[potencia]**

POTENCIA: $\mathbf{a}^{\mathbf{b}}$ → exponente **/ a ∈ R; b ∈ R**
↓base

La función potencia tiene la base variable y el exponente fijo (ej: x^3); ahora nos preguntamos, ¿qué sucede si consideramos la <u>base fija</u> y el <u>exponente variable</u>, ¿obtenemos una función?. Si así fuera: ¿conocida o desconocida? En lo que sigue analizamos: **f (x) = a^x** .

- Dado x∈R; **x** $\xrightarrow{\text{único}}$ **a^x** . Luego la correspondecia puede definir función.
- a^x , ¿ <u>existe para todo x</u>, cualquiera sea la base ? .
- Vemos dos ejemplos: **4^x** y **$(-4)^x$**

x	$\mathbf{4^x}$	$\mathbf{(-4)^x}$
0	$4^0 = 1$	$(-4)^0 = 1$
1	$4^1 = 4$	$(-4)^1 = -4$
2	$4^2 = 16$	$(-4)^2 = 16$
3	$4^3 = 64$	$(-4)^3 = -64$
-1	$4^{-1} = ¼$	$(-4)^{-1} = - ¼$
-2	$4^{-2} = 1/16$	$(-4)^{-2} = 1/16$
½	$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$	$\sqrt{-4}$ no tiene solución en R (*)
-½	$4^{-1/2} = ½$	$(4)^{-1/2}$ no tiene solución en R (*)
x∈R	$4^x \in R^+$	$(-4)^x$ puede o no ser un nro real

(*) $(-\mathbf{4})^{1/2} = \sqrt{-4}$

$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\ \sqrt{-1} = 2\,i$

$(-4)^{1/2} \in \mathbb{C}$, nros. complejos

CONCLUSIÓN: $\mathbf{f(x) = a^x}$ es función real a variable real $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a > 0}$

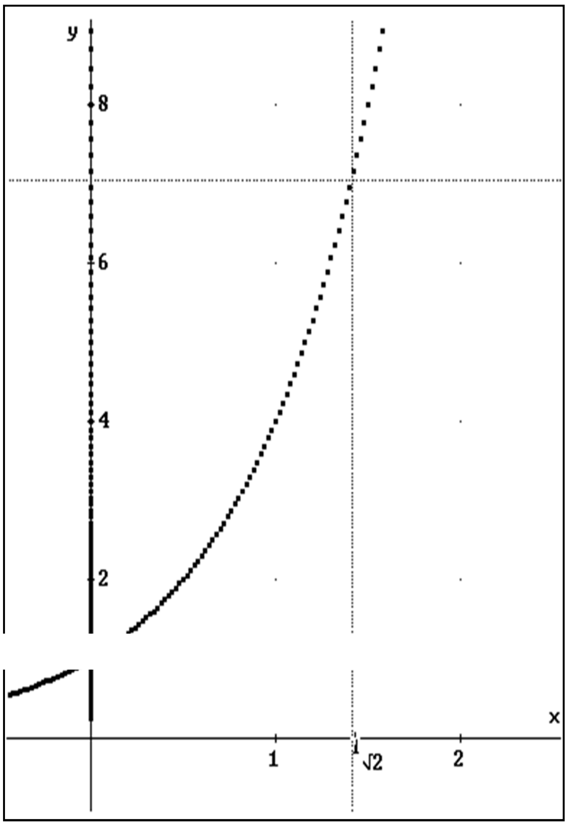
OBSERVACIÓN 1: si $\mathbf{a > 0}$ entonces $\mathbf{a^x > 0}$ $\forall\, x \in R \Rightarrow$ $\mathbf{Im\, f = R^+}$
OBSERVACIÓN 2: para x´s crecientes; $\mathbf{f(x) = 4^x}$ crece.
OBSERVACIÓN 3: como cualquiera sea la base, Im f = R^+ y f es monótona, entonces *no puede ser una función tipo potencia.* Luego, estamos ante una función desconocida; por lo que le damos un nombre, función exponencial, la estudiamos y luego la incorporamos a M🗐.
OBSERVACIÓN 4: en la página 48 clasificamos a las funciones en dos grandes grupos: algebraicas y trascendentes. Allí dijimos que la exponencial es una función trascendente. En esta instancia cabe preguntarnos porqué es trascendente y no algebraica sí, según vemos de la tabla para calcular potencias tenemos que hacer productos y/ó raíces. Para contestar esta pregunta repasamos el significado de $\mathbf{a^x}$:

- x = n; n entero positivo, entonces: $a^n = \underbrace{a\,.\,a \ldots\ldots\ldots\ldots a}_{n\ \text{factores}}$
- x = - n; n entero positivo, entonces: $a^{-n} = 1/a^n$
- x = p/q, p y q enteros y q>0; entonces: $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

Nros. RACIONALES

- x = nro. irracional, por ejemplo: π, $\sqrt{2}$; entonces, ¿cómo calculamos a^{π}; $a^{\sqrt{2}}$?

Nota: para trabajar en Cálculo es necesario tener definida la exponencial para todo número real, racional ó irracional. Si trabajamos sólo con racionales, la gráfica de $\mathbf{a}^{x}$ resulta una curva creciente ´infinitamente perforada´ (infinitos puntos no tendrían imgen). ¿Cómo definimos la exponencial para los irracionales?



Consideremos el caso de $a^{\sqrt{2}}$.

El valor que asignemos a $a^{\sqrt{2}}$ debe ser tal que ´rellene´ el hueco que se observa en la gráfica para $x = \sqrt{2}$. Para realizar esta tarea acudimos a un nuevo proceso: el de aproximación.

Para ello tenemos en cuenta que la expresión decimal infinita $\sqrt{2}$= 1.414214.... indica que $\sqrt{2}$ es el número real que satisface la siguiente lista de desigualdades:

$\mathbf{1 < \sqrt{2} < 2}$

$\mathbf{1.4 < \sqrt{2} < 1.5}$

$\mathbf{1.41 < \sqrt{2} < 1.42}$

$\mathbf{1.414 < \sqrt{2} < 1.415}$

....

☞ los valores que acotan $\sqrt{2}$ son racionales; por lo tanto, para ellos, la exponencial está definida

$\mathbf{4 < 4^{\sqrt{2}} < 16}$

$\mathbf{6.96440 < 4^{\sqrt{2}} < 8}$

$\mathbf{7.06162 < 4^{\sqrt{2}} < 7.16020}$

$\mathbf{7.10089 < 4^{\sqrt{2}} < 7.11074}$

$\mathbf{7.10286 < 4^{\sqrt{2}} < 7.10384}$

7.10..... < $4^{\sqrt{2}}$ < 7.10....

Si $a = 4$; $4^{\sqrt{2}}$ satisface las siguientes desigualdades, obtenidas de calcular 4^{x} para el listado anterior.

CONCLUSIÓN : definimos $4^{\sqrt{2}}$ como el número que satisface la lista de desigualdades que resulta de aplicar 4^{x} a la lista de desigualdades que satisface $\sqrt{2}$. Este número existe y es irracional. Los números de la última lista proporcionan aproximaciones de $4^{\sqrt{2}}$:

$4^{\sqrt{2}} \approx 7.10286$ (con tres decimales exactos) ; $4^{\sqrt{2}} \approx 7.10299$ (con cinco decimales exactos).

Finalmente, para todo x, número irracional, a^{x} se define en forma similar al ejemplo y, de este modo, la función exponencial queda definida para todo número real .

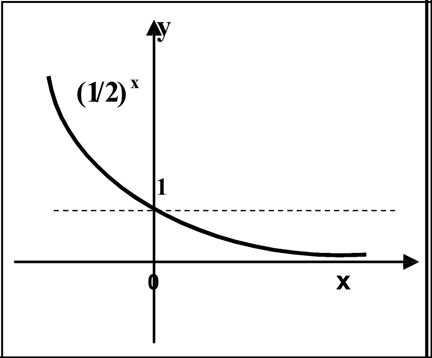
1.5.6 Función Exponencial: $f(x)=a^{x}$; con $a>0, a\neq1$, $D_f = R$

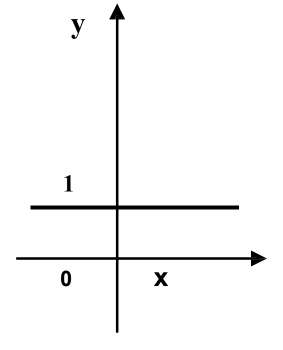
NOTA 1: $1^{X} = 1$, $\forall x \in P$. Luego, para $a = 1$; $f(x) = 1$ $\forall x \in P$ (f función lineal, ya conocida), por ello excluimos el caso de la base igual a 1.

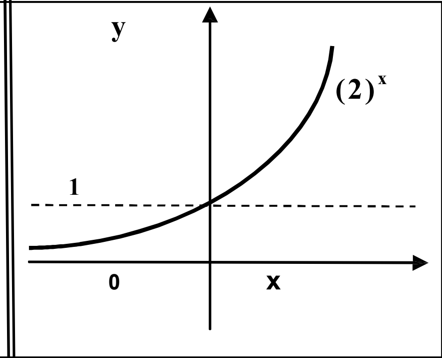
NOTA 2: $\mathbf{a}^{x} \in P$ $\forall x \in P \Leftrightarrow \mathbf{a > 0}$, por ello pedimos base positiva y no nula.

NOTA 3: si $\mathbf{a>0}$ entonces $\forall x \in P$, $\mathbf{a}^{x} > \mathbf{0}$

NOTA 4: el comportamiento tendencial de la función depende de la base; así,
- si $0 < a < 1$; $x_1 < x_2 \Rightarrow \mathbf{a}^{x1} > \mathbf{a}^{x2}$. Luego, f es decreciente.
- si $a > 1$; $x_1 < x_2 \Rightarrow \mathbf{a}^{x1} < \mathbf{a}^{x2}$. Luego, f es creciente.







x	**0**	**x>0**	**x<0**	**x↑**	x	**0**	**x>0**	**x<0**	x	**0**	**x>0**	**x<0**	**x↑**
y	**1**	**y<1**	**y>1**	**y↓**	y	**1**	**1**	**1**	y	**1**	**y>1**	**y<1**	**y↑**

a^x (0< a <1)	**1^x** (a=1)	**a^x** (a >1)
Im f = R^+	**Im f = {1}**	**Im f = R^+**
estric. decreciente	constante	estric. creciente
signo definido positivo	sg definido positivo	sg definido positivo
asíntota horizontal: eje x.	------	asíntota horizontal: eje x

Incorporamos la función exponencial a nuestra memoria.

M

- **LINEALES y CUADRÁTICAS**
- **POTENCIALES**
- **RAÍCES**
- **HOMOGRÁFICAS**
- ***EXPONENCIALES***

f → **función exponencial /**

f(x)= a^x ; a >0 ; a ≠1; D_f =R

¿inversa?

- f : R → R^+
  x → y= a^x
- **a>0 ; a≠1**

f biyectiva
⇓
existe g, inversa de f

1.5.7 Inversa de Exponencial

» f : R → R^+ / **y=f(x) con f(x)=a^x**

» g: R^+ → R, g inversa de f.

» **ley g** ***(por definición)***

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$g(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$$?

$$g(y) = x \Leftrightarrow x = \ldots$$

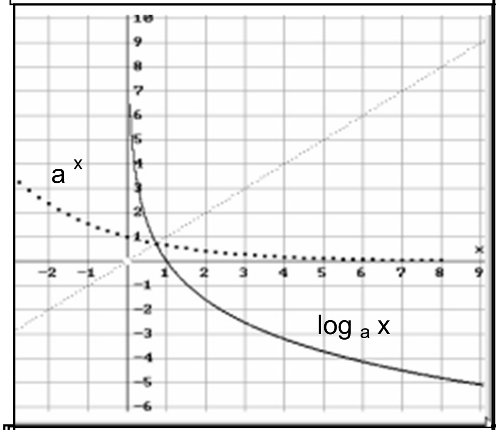
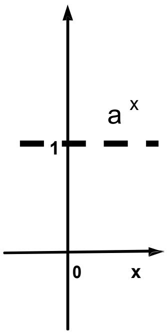
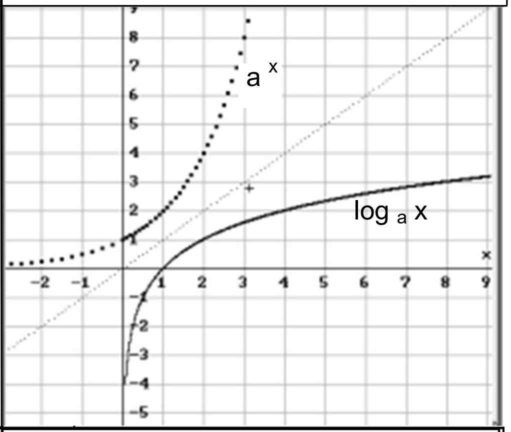
no se puede "despejar" *x* a través de funciones conocidas.

Comprobamos entonces que <u>no existe una fórmula para g</u> y, consecuentemente, que hemos encontrado un <u>nuevo tipo de función</u>. Ideamos un nombre y un símbolo para indicar este tipo de función; la llamamos: **LOGARITMO.**

CONCLUSIÓN:

- **g** es una nueva función [∉M🗐].
- <u>NOMBRE</u>: **logaritmo en base a**
- <u>SÍMBOLO</u>: **log** $_a$ [•]
- Restricciones: **a >0 ; a ≠1**

▫ Dom. **log $_a$ [•] = R** $^+$
▫ Im **log $_a$ [•] = R**
▫ ley: $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$

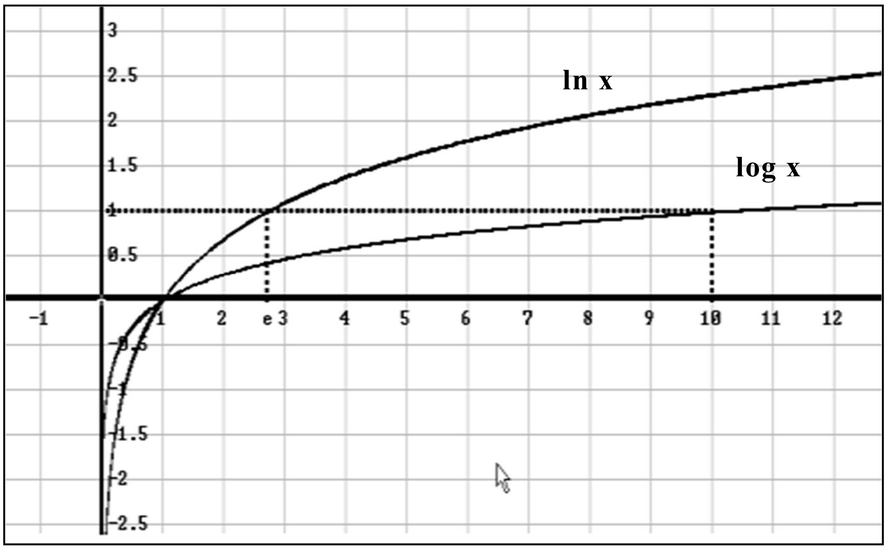
log $_a$ x (0<a<1)	**a = 1**	**log $_a$ x** (a>1)
		

x	**0<x<1**	1	**x>1**	**x crece**	**no existe**	**x**	**0<x<1**	1	**x>1**	**x crece**
y	**y>0**	0	**y<0**	**y decrece**	**inversa**	**y**	**y<0**	0	**y>0**	**y crece**

- **D log$_a$ [•] = R$^+$**
- **Im log$_a$ [•] = R**
- estrictamente decreciente
- asíntota vertical: eje y
- definida positiva en (0,1)
- definida negativa en (1,∞)
- $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$

D log$_a$ [•] = R$^+$
Im log$_a$ [•] = R
estrictamente creciente
asíntota vertical: eje y
definida negativa en (0,1)
definida positiva en (1, ∞)
$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$

	BASE	FUNCIÓN	INVERSA	NOMBRE
Casos	a =10	f (x) = 10^x	g(x) = log x	*log decimal*
particulares:	a = **e**	f (x) = $\mathbf{e}^x$	g(x) = ln x	*log natural*



***<u>fórmula de cambio de base</u>*:**

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

➢ $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

log x = 0,434 . ln x

➢ $\ln x = \dfrac{\log x}{\log e}$

ln x = 2,302 log x

M

- ♦ **LINEALES y CUADRÁTICAS**
- ♦ **POTENCIALE**
- ♦ **RAÍCES**
- ♦ **HOMOGRÁFICAS**
- ♦ **EXPONENCIALES**
- ♦ ***LOGARITMOS***

g → **función logaritmo /**

$g(x)= \log_a x$; $a>0$; $a \neq 1$, $D_g = R^+$

• **¿inversa?**

- $g: R^+ \to R$
  $x \to y = \log_a x$
- $a>0$; $a \neq 1$

g biyectiva ⇒ existe inversa de g

Observación: por definición de logaritmo: $\mathbf{\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x}$.
Resulta claro entonces que la función que "deshace" lo que hace el logaritmo (o sea su "inversa") es, **la exponencial**. Esto vale en general; o sea que si g es la inversa de f, entonces f es la inversa de g.
Recordando que la composición de una función y su inversa da como resultado la función identidad, tenemos así dos importantes resultados:

» $\mathbf{\ln(e^x) = x \;;\; \forall x \in R}$

» $\mathbf{e^{\ln x} = x \;;\; \forall x > 0}$

1.5.8 Funciones Trigonométricas

En el Apéndice C comentamos algo acerca del origen de las funciones trigonométricas, de su relación histórica con las ´razones trigonométricas´. Así mismo damos allí las definiciones que finalmente y a través de un largo proceso (en el que varía la noción de ángulo) se establecen para estas funciones (aquellas en las que el dominio de aplicación no se encunetra restringido a ángulos agudos sino que comprende cualquier tipo de ángulo, ya sea, agudo, obtuso, de más de una vuelta, positivo o negativo).

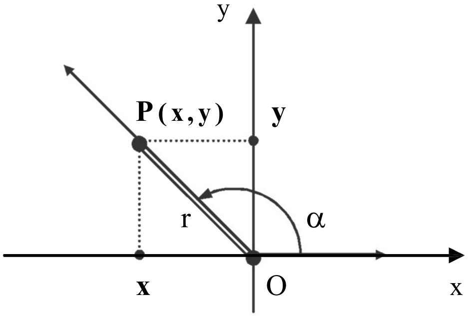
DEFINICIÓN

funciones trigonométricas	Dado un ángulo α en posición estándar y P(x,y) un punto cualquiera del lado final del ángulo, si la distancia de P al origen la indicamos con r (*radio vector*), definimos las funciones trigonométricas básicas como sigue

➢ $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{y}{r}$

➢ $\cos \alpha = \dfrac{x}{r}$

➢ $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y}{x}$



En particular, para r=1, tenemos :

➢ sen α = y **(ordenada de P)**

➢ cos α = x **(abscisa de P)**

Cofunciones: llamamos así a las recíprocas de las funciones trigonométricas básicas. Les damos un nombre a cada una de ellas. Tenemos así:

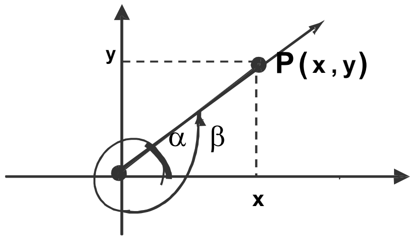
-recíproca del seno → **cosec** $\alpha =$ **r/y**
-recíproca del coseno → **sec** $\alpha =$ **r/x**
- recíproca de la tangente → **ctg** $\alpha =$ **x/y**

ⓘNos abocamos al estudio de las trigonométricas *básicas* ya que, conocidas la propiedades de estas, las de sus recípocas se deducen automáticamente. Por ejemplo, conocido el signo del seno y coseno, se tiene el signo de todas las demás funciones.

ⓘ En general el seno o coseno de un ángulo es un número irracional. Fácilmente podemos apreciar también que estas funciones no resultan de un número finito de *operaciones algebraicas* sobre la variable. Luego son *funciones trascendentes.*

ángulos congruentes

Dos ángulos se dicen congruentes cuando difieren un número entero de giros. Así α y β son congruentes si $\beta = \alpha +$ k giros, con $k \in Z$. Luego, sus medidas difieren en $2k\pi$ ($\beta = \alpha + 2k\pi$) y el lado final de β coincide con el de α.



Así, para las funciones de ángulos congruentes, tenemos:

- **cos** $\beta =$ **cos** α **= x** → **cos** (α + **2 k** π) = **cos** α
- **sen** $\beta =$ **sen** α **= y** → **sen** (α + **2 k** π) = **sen** α

funciones periódicas

Son funciones cuyos valores se repiten ´cíclicamente´ o ´periódicamente´ ; o sea aquellas que, cubierto un ´ciclo´, comienzan luego a tomar los mismos valores y así continuan indefinidamente. Las funciones seno y coseno (y en consecuencia todas las demás) son funciones periódicas ya que luego de una vuelta (360º) sus valores comienzan a repetirse indefinidamente: $\cos(\alpha + 360^{o}) = \cos\alpha$; $\text{sen}(\alpha + 360^{o}) = \text{sen}\ \alpha$

DEFINICIÓN:

función periódica

f periódica con período no nulo T $\Leftrightarrow$ $f(x+T) = f(x)\ \forall\ x \in D_f$

Observaciones :

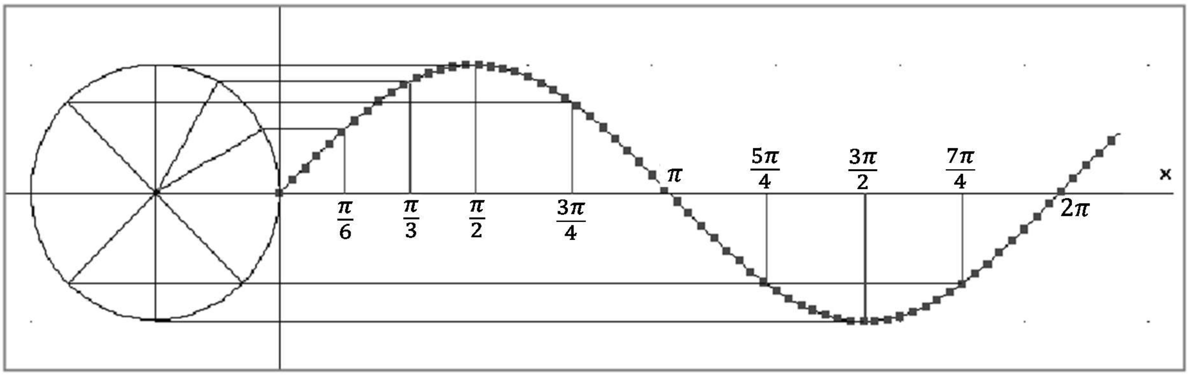
» si T es período entonces kT ($k \in Z$) también lo es.
Por ejemplo: $f(x + 2T) = f((x+T) + T) = f(x+T) = f(x)$
» Al menor de los períodos se lo llama período de f.

Actividad: demostrar que el período del seno y coseno es 2π, que el de la tangente es π. O sea; demostrar que:

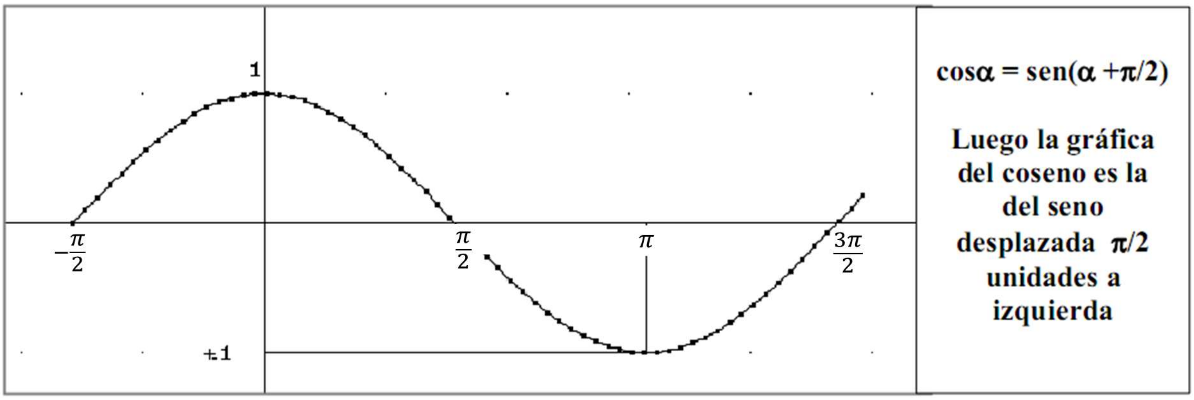
$$\text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen}\ \alpha \ ; \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha \ ; \quad \text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}\ \alpha$$

- » Aplicando identidades trigonométricas tenemos que **cos** α **= sen (**α **+**π**/2)**; luego si conocemos la gráfica del seno, por ´transformaciones´ tenemos la del coseno.
- » La gráfica del seno la obtenemos apoyándonos en la circunferencia trigonométrica.

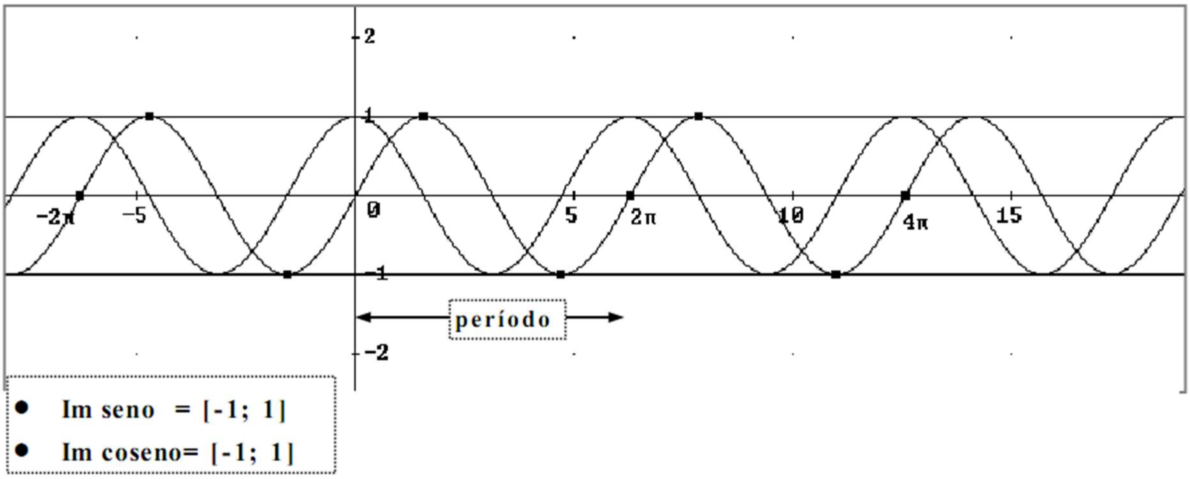
➢ GRÁFICA de la FUNCIÓN SENO (sinusoide)



➢ GRÁFICA de la FUNCIÓN COSENO



➢ SENO y COSENO

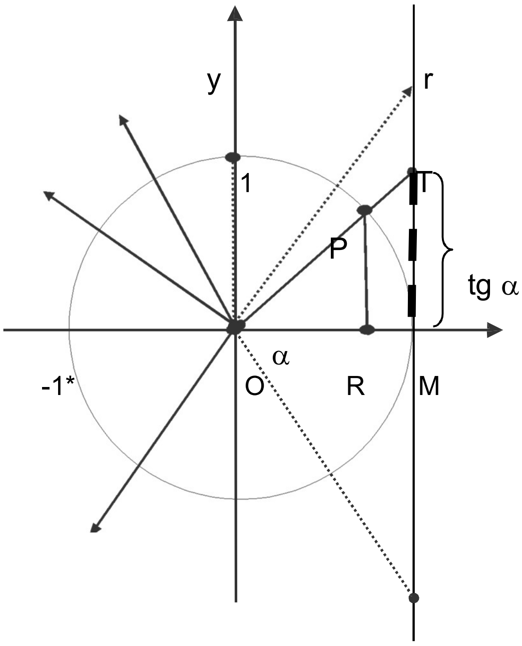


Del gráfico observamos que seno y coseno son funciones acotadas; es decir sus valores permanecen entre dos valore fijos: –1 y 1.

DEFINICIÓN

función acotada	• **f acotada superiormente en D** $\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbf{R}\ /\ f(x) \leq c\ ,\ \forall x \in D$ • **f acotada inferiormente en D** $\Leftrightarrow \exists\, d \in \mathbf{R}\ /\ f(x) \geq d\ ,\ \forall x \in D$ • **f acotada en D** $\Leftrightarrow\ \exists\, c,\ d \in \mathbf{R}\ /\ d \leq f(x) \leq c\ ,\ \forall x \in D$

➢ GRÁFICA de la FUNCIÓN TANGENTE : $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada P}}{\text{abscisa P}}$

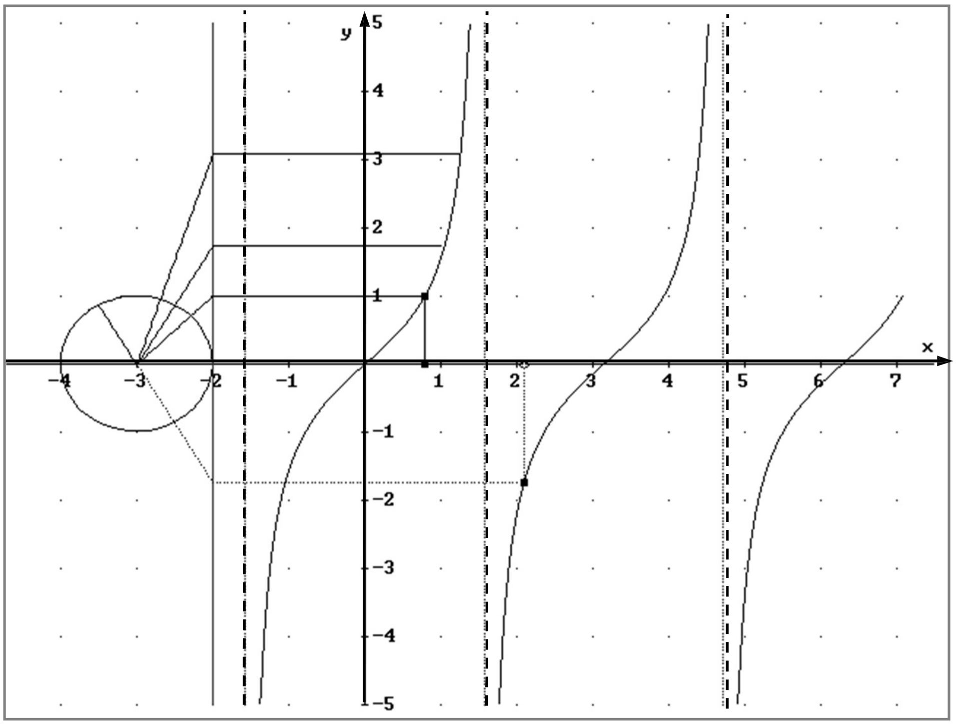


- C: circunferencia de radio 1
- P (cos α , sen α)
- Los triángulos OQP y OMT son triángulos semejantes; luego:

$$\frac{|\mathbf{MT}|}{|\mathbf{OM}|} = \frac{|\mathbf{RP}|}{|\mathbf{OR}|} \Rightarrow \frac{|\mathbf{MT}|}{\mathbf{1}} = \frac{\textbf{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow$$

$$|\mathbf{MT}| = \text{tg } \alpha$$

- T **(1, tg α)** ⇒ **la ´tg α´ es la <u>ordenada del punto T</u>, punto donde el lado final del ángulo corta a la recta r ⊥ eje x.**
- **<u>NOTA</u>: si α= 90º entonces el lado final y r no se cortan ⇒ <u>no existe tg</u>**



***Propiedades de la tg*:**

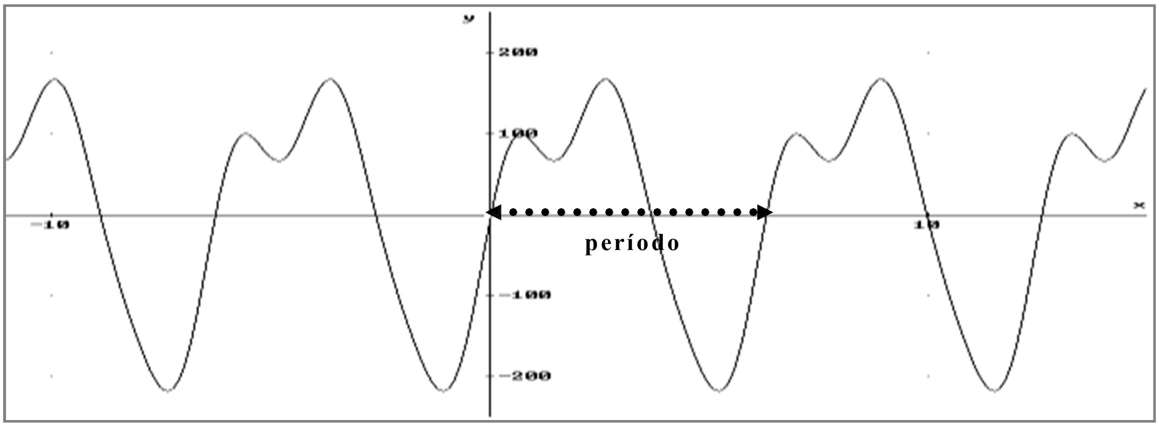
- Dominio tg = { x∈R / x ≠ (2k+1).π/2 con k∈Z }
- Imagen tg = R
- Período: p = π
- Asíntotas verticales: a_v : x = (2k+1).π/2 ; k∈Z
- Función impar.

OBSERVACIONES:

» Las funciones periódicas son el medio para estudiar gran cantidad de fenómenos naturales. Dado que la condición de perioricidad es muy ´amplia´ existe una gran variedad de funciones periódicas. Sin embargo, un célebre matemático, Joseph Fourier, demostró (¡ oh sorpresas de la matemática!) que en general toda función periódica puede ser aproximada por suma de funciones periódicas de sólo dos tipos, ¿Cuáles son estas funciones?, pues nada más ni nada menos que, ¡ seno y coseno !

» Dada esta particularidad (la descubierta por Fourier), las funciones trigonométricas desempeñan en la teoría de funciones avanzadas un papel tan importante como el que juegan el ´eje x´ y el ´eje y´ en la descripción de puntos del plano.

Como ejemplo de lo dicho vemos que los sonidos producidos por intrumentos musicales o la voz humana pueden ser modelizados por funciones trigonométricas. Así, el gráfico adjunto aproxima una "onda sonora", la correspondiente al sonido producido por un violín. O sea, tenemos una gráfica de "sonido contra tiempo". Gráficamente vemos que estamos ante una función periódica.
¿Cuál es el período de esta función? ¿Y su ley?

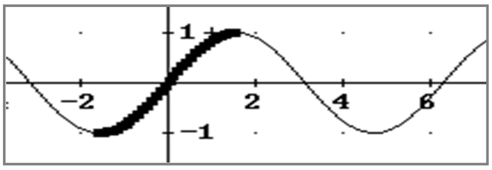
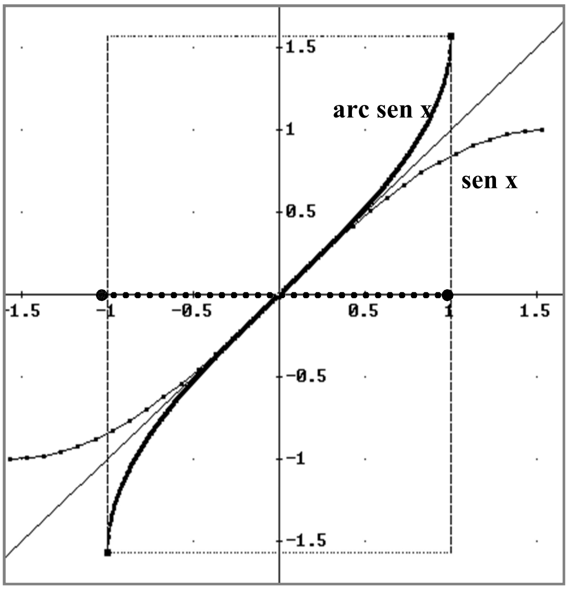
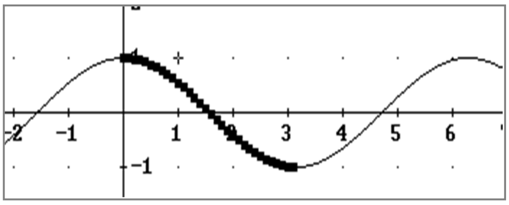


Pues, sorprendentemente, la ley de esta función es una suma de senos y cosenos.
Así: $y = 151 \cdot SEN(t) - 67 \cdot COS(t) + 24 \cdot SEN(2 \cdot t) + 55 \cdot COS(2 \cdot t) + 27 \cdot SEN(3 \cdot t) + 5 \cdot COS(3 \cdot t)$

» El ejemplo anterior obliga a realizar ciertas reflexiones sobre el dominio de la función seno (ó coseno). En el gráfico, en el eje de las abscisas se representa tiempo, magnitud que se mide con números reales. Por otro lado, las funciones trigonométricas las hemos definido para ángulos; o sea, la pregunta aquí es: ¿tiene sentido aplicar funciones trigonométricas a números reales? Justamente para resolver este problema es que, para medir ángulos, se inventa el sistema circular o radian. Este sistema (adimensional) establece una correspondencia uno a uno entre ángulos medidos en grados y números reales (a través de la correspondencia básica 360º ↔ 2π). De esta manera, si usamos el sistema radian, las funciones trigonométricas se aplican a números reales y, entonces, la medida del ángulo en radianes, que es la medida del arco que este subtiende en la circunferencia trigonométrica (recordar que con "medida" nos referimos al número que resulta del cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio, en este caso 1) resulta un número real que puede representar tiempo; particularmente, el tiempo que tarda una partícula en recorrer ese arco. No sería correcto, por ejemplo, hablar de 30º de tiempo, si se puede hablar de π/6 segundos.

» En función de todos los considerandos hechos y para abarcar todos lo casos posibles, a partir de ahora trabajaremos siempre con los ángulos medidos en radianes; es decir, con números reales. O sea que; dominio natural de la función seno y coseno: R

1.5.9 Funciones Trigonométricas Inversas

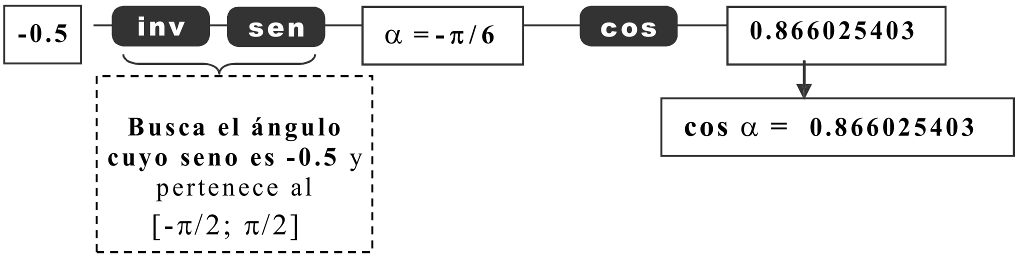
FUNCIÓN	Biyec.	INVERSA
• Seno; D = R ; C = Im (seno)  	**NO**	• no existe
• Seno; D = $[-\pi/2 ; \pi/2]$; C=$[-1; 1]$	**SI**	• existe g inversa de f
f: $[-\pi/2 ; \pi/2] \rightarrow [-1; 1]$ $x \rightarrow y$  		g: $[-1; 1] \rightarrow [-\pi/2 ; \pi/2]$ $y \rightarrow x$ • **ley:** **$g(y) = x \Leftrightarrow \text{sen } x = y \wedge x \in [-\pi/2; \pi/2]$** **($g(1/2)= x \Leftrightarrow \text{sen } x =1/2 \Rightarrow x =\pi/6$)** • **no se puede obtener una fórmula para g; tenemos una *nueva función*** • **Nombre: ARCO SENO ó sen^{-1}** - **Dominio = [-1; 1]** - **Imagen = $[-\pi/2 ; \pi/2]$** - **Ley:** **$\text{arc sen } y= x \Leftrightarrow \text{sen} x =y \wedge x\in[-\pi/2; \pi/2]$** • **Cambiamos el nombre a las variables** **$\text{arcsen } x = y \Leftrightarrow \text{sen} y = x \wedge y\in[-\pi/2; \pi/2]$** • **Graficamos.**
• Coseno; D=R ; C=Im (coseno)  	**NO**	• no existe
• Coseno; D= $[0 ; \pi]$; C= $[-1; 1]$	**SI**	• existe g inversa de f
f: $[0 ; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ $x \rightarrow y$		g: $[-1; 1] \rightarrow [0 ; \pi]$ $y \rightarrow x$ g= ARCO COSENO ó $\cos^{-1}$

- no se puede obtener una fórmula para g; estamos ante una *nueva función*.
  - Dominio = [-1; 1]
  - Imagen = [0; π]

  Ley: $\arccos\ y = x \Leftrightarrow \cos x = y \wedge x \in [0;\ \pi]$

Ejercicio: hallar una región donde la función tangente sea biyectiva y definir la inversa de la tangente: *arco tg* ó tg^{-1}

Ejemplo: Sabiendo que sen α = - ½; hallar "cos α"
Acudimos a la calculadora y a la inversa del seno para obtener "α ".

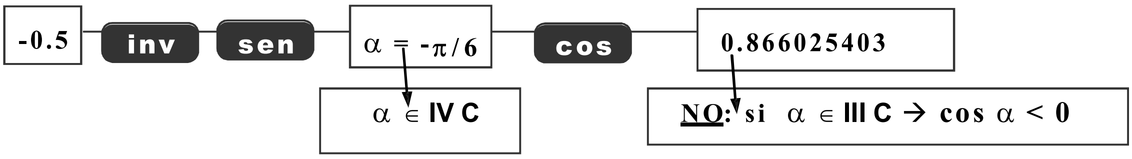


Busca el ángulo cuyo seno es -0.5 y pertenece al [$-\pi/2$; $\pi/2$]

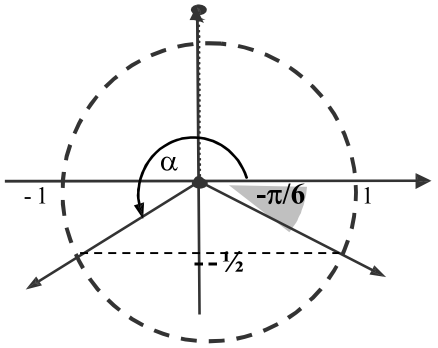
Ejemplo: Sabiendo que sen α = - ½ y $\pi < \alpha < 3/2\pi$, hallar "cos α" .

Si para resolver este problema acudimos a la calculadora y procedemos a trabajar con ella ´en forma mecánica´, lo más probable es que lleguemos al mismo resultado que en el ejemplo anterior, (incorrecto ya que para $\alpha \in$ IIIC, cos $\alpha < 0$). Si tuviéramos el hábito de reflexionar sobre los resultados, esto no sería problema ya que nos daríamos cuenta del error, pero, esto, en general no es así. Lo más frecuente es informar el resultado, apenas obtenido, sin reflexionar sobre las características del mismo, si las cumple o no.

¿Cómo debemos proceder para obtener la respuesta correcta?:
- primero, tener claro que la calculadora procede internamente acorde a un programa, así, al apretar las teclas ´inv sen´, ella busca el ángulo del I ó IV cuadrante cuyo seno sea -½ ; o sea, no puede buscar , por sí, el ángulo del III C cuyo seno sea - ½. ; no se la programó para esto.



- luego, debemos planificar una pequeña estrategia para encontrar el ángulo deseado. Para ello acudimos a nuestros conocimientos teóricos, hacemos un gráfico muy simple para orientarnos y concluimos :



- sen α = sen $(-\pi/6) = -$ **½ .**
- del gráfico: α **es tal que** $\alpha - \pi/6 = \pi$.
- Luego: $\alpha = \pi + \pi/6 = \frac{7}{6}\pi$ (o sea, 210º).
- $\cos \alpha = \cos \frac{7}{6}\pi$ = - 0.866025403

1.6 Modelos Matemáticos. Ajuste de Curvas

- Un **modelo matemático** es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o de una ecuación) de un fenómeno del mundo real. La finalidad del modelo es comprender el fenómeno y, en lo posible, usarlo para hacer predicciones a futuro acerca de los hechos que el mismo comprende. Es importante tener en cuenta que un modelo matemático nunca va a resultar una representación exacta del fenómeno que modeliza; que es una *idealización* del mismo. Generalmente, para que el modelo sea matemáticamente resoluble los datos de la realidad se someten a ciertas simplificaciones. Es importante tener en cuenta esto, particularmente para saber hasta que punto o instancia el modelo es útil; cuales son sus limitaciones.

En el párrafo 1 hemos visto algunos ejemplos sencillos de ´modelización´. Si repasamos estos ejemplos vemos que siempre y como primer paso procedemos a identificar las variables que intervienen en el problema, el carácter de las mismas (dependiente o independiente). Luego, acudiendo a nuestros conocimientos de la situación en sí misma y a nuestros conocimiento matemáticos tratamos de hallar una ecuación que relacione las variables. Si esto se logra el tipo de función que ligue las variables nos dará mucha y muy rica información acerca del tipo de dependencia entre ellas.

- No siempre tendremos una ley (física u otra) que permita llegar a la formulación del modelo a través de una sucesión de pasos algebraicos; o sea, no siempre resultará posible obtener *´directamente´* la expresión algebraica de la función modeladora. Se acude entonces al **modelo empírico**, modelo esencialmente sustentado en **datos** que se reúnen a través de una o más observaciones o repeticiones experimentales del fenómeno en estudio.

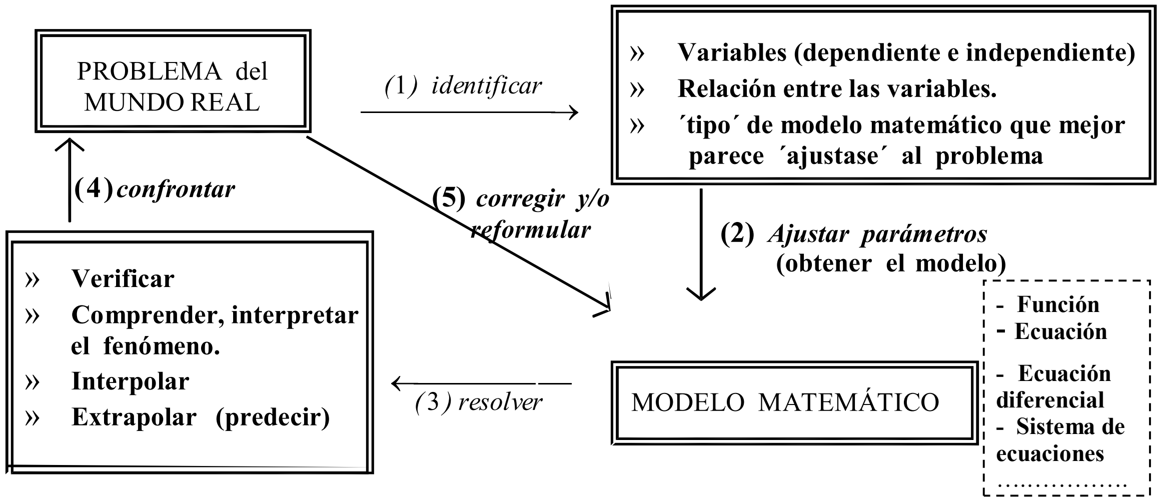
En este caso, una vez reunidos los datos se analizan los mismos en búsqueda de un **patrón de comportamiento.** Para ello resulta importante la **forma disponer los datos**, ya que existen disposiciones que facilitan la búsqueda al poner al descubierto propiedades de la función modeladora o hacerlas más fácilmente apreciables.

» En una primera instancia se procede entonces a la tabulación de los datos; o sea, a la representación de la función en *forma numérica*.

» Si de la ´tabla de valores´ podemos pasar a la *representación gráfica*, las probabilidades de hallar patrones de comportamiento crecen en forma importante ya que gran cantidad de propiedades pueden ser leídas directamente de un gráfico. Además, en muchos casos la misma gráfica *´sugiere´* la ecuación adecuada; más aún, existen métodos perfectamente probados que, para cierto tipo de curvas, permiten obtener la ecuación que mejor la ´ajusta´ ; o sea la que mejor captura la tendencia básica de los puntos datos.

» Si de la representación gráfica podemos obtener la *representación algebraica* estamos sin dudas en condiciones óptimas de estudiar el fenómeno, incluso estaremos también en condiciones de hacer interpolaciones y/o extrapolaciones .

- En la siguiente figura se ilustra el proceso del modelado matemático.

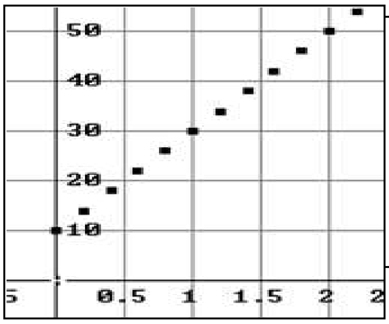


(1) *Identificar el tipo de modelo*: uno de los pasos más difíciles en el proceso de modelización, el que en general más requiere del trabajo interdisciplinario.

En este paso, a los efectos de establecer alguna hipótesis acerca del tipo de relación que liga las variables normalmente debemos acudir tanto a conocimientos matemáticos, como a conocimientos y habilidades de orden más general. Además, y como ya dijimos, el análisis de los datos del problema puede hacerse de distintas maneras, unas más convenientes que otras, según los datos; luego, en esta instancia también debemos decidir esta cuestión.

(2) *Ajustar parámetros*: en este caso la representación gráfica puede resultar de gran utilidad, ´sugerir´ cual puede ser la fórmula adecuada para la función que se busca.

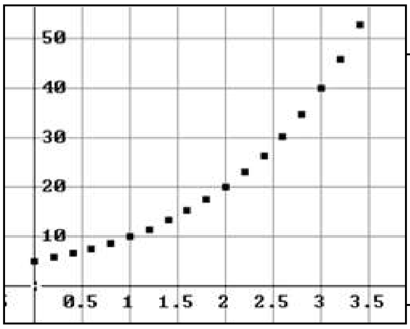
Los siguientes ejemplos son gráficos obtenidos a partir del registro de ´datos´ (observados o experimentales) y las funciones que les pueden corresponder:



(*) modelo lineal

$y = m\,x + h$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



(*) modelo exponencial

$\mathbf{y = C.e^{\alpha x}}$

(*) modelo potencial

$\mathbf{y = C.x^{\alpha}}$

Análisis

Normalmente, al observar un fenómeno, resulta fácil ver si el mismo responde a un proceso de ´crecimiento´ ó ´decrecimiento´ (por lo menos en un intervalo de tiempo). Luego, y en tal caso, una de las cuestiones más importantes a determinar es la *´velocidad´* a la que el proceso se desarrolla; particularmente, si esta es constante o no.

Esta cuestión, ***matemáticamente***, se resuelve a través del estudio de ***la razón de cambio*** ($\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$).

Aquí se pueden presentar dos situaciones:

(I) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathbf{k} \quad \Rightarrow$ f es una función lineal con pendiente ´k´ ; o sea : $\mathbf{f(x) = k\,x + h}$

(II) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq \mathbf{cte} \quad \Rightarrow$ f , función ´no´ lineal. →

(*) En este caso procedemos a buscar f a través de proponer una función y analizar luego si la misma se ´ajusta´ o no a la gráfica .

(*) ¿Cómo elegimos la función de ´ajuste´ ?: normalmente para elegir la función de ´ajuste´ basta con acudir a las funciones tipo que hemos estudiado en este capítulo (exponenciales, potenciales, recíprocas, ..). Vemos aquí dos casos:

Si sospechamos que la función que mejor ajusta es una **exponencial** o una **potencial**:

≈ proponemos: $\mathbf{y = C.e^{\alpha.x}}$ ó $\mathbf{y = C.\,x^{\alpha}}$ (según corresponda).

≈ *rectificamos*(*) la curva a los efectos de determinar los parámetros C y α;

≈ reemplazamos los parámetros hallados en la función propuesta y la graficamos;

≈ confrontamos ambos gráficos (experimental y analítico) y decidimos.

(*) La forma de ´rectificar la curva´ depende del tipo de función; pues:

a) *´una función es exponencial si y sólo si el gráfico de ln y versus x, es una recta ´.*

b) *´una función es potencial si y sólo si el gráfico de ln y versus ln x, es una recta ´.*

a) $$y = C\,e^{\alpha x} \xrightarrow{\text{aplicamos ln}} \ln y = \ln C + \alpha\,x \xrightarrow{\textbf{hacemos } \mathbf{Y=\ln y}} Y = \underbrace{\mathbf{\ln C}}_{\mathbf{h}} + \underbrace{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{m}}\mathbf{.x}$$

$$\alpha = \mathbf{m}\ \textbf{(pendiente)} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\mathbf{\ln C = h}\ \textbf{(ordenada al origen)} \ \Rightarrow \quad C = e^{h} \quad \textbf{(h se lee del gráfico x-Y)}$$

b) $$y = C\,x^{\alpha} \xrightarrow{\text{aplicamos ln}} \ln y = \ln C + \alpha \ln x \quad \overset{\ln y = Y}{\underset{\ln x = X}{\to\to\to}} \quad Y = \underbrace{\mathbf{\ln C}}_{\mathbf{h}} + \underbrace{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{m}}\mathbf{.X}$$

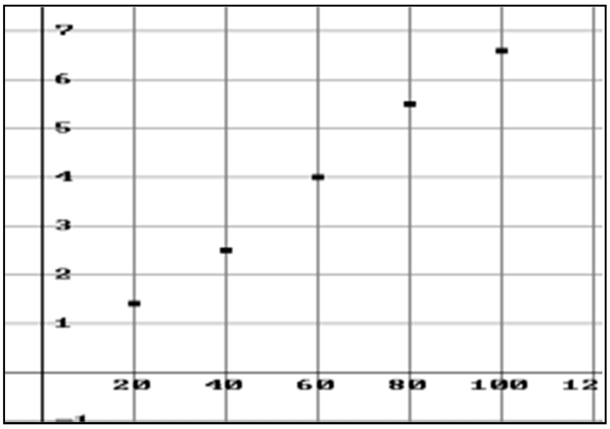
Luego: $$\alpha = \mathbf{m}\ \textbf{(pendiente)} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$$

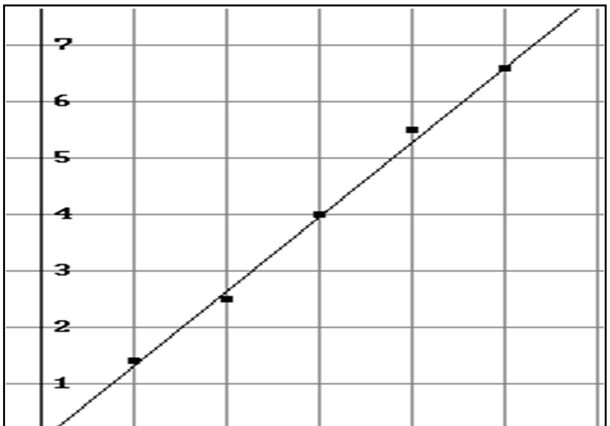
$$\mathbf{\ln C = h}\ \textbf{(ordenada al origen)} \ \Rightarrow \quad C = e^{h} \quad \textbf{(h se lee del gráfico x-y)}$$

EJEMPLO 1:

La Ley de Hooke dice que la fuerza F necesaria para estirar (comprimir) un resorte es proporcional a la variación de longitud (*d*) que experimenta el resorte; o sea: F= k *d*, donde k es la medida de la resistencia del resorte a la deformación (*constante elástica).* Esta constante es propia del resorte y su determinación se puede hacer en forma experimental. Para ello dado un resorte se registran en una tabla los estiramientos *d* (en cm.) sufridos por el mismo cuando se le aplican distintas fuerzas F (en kilogramos fuerza).

» F	20	40	60	80	100
d	1.4	2.5	4.0	5.3	6.6

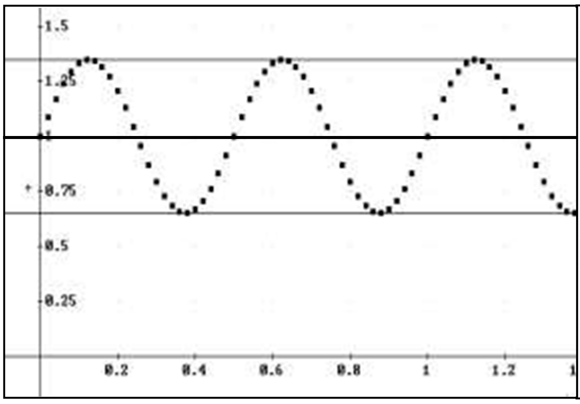




- **Los puntos datos parecen estar sobre una recta; luego, lo natural es proponer un modelo lineal. (función lineal).**
- **Los puntos no están exactamente alineados; luego, debemos buscar la recta que mejor los ´ajuste´ Existen varios métodos para determinar tal recta.**
- **Un método: tomar la recta que pase por el primer y último punto dato.**
- **Así tenemos: F = 0.065 *d* + 0.1**
- **Observamos que si bien la recta hallada ajusta bastante bien los datos, esta no describe una relación de directa proporcionalidad como requiere la Ley de Hooke (t.i.≠ 0). Luego intentamos ajustar nuevamente recordando que el origen también es un punto dato (trivial): o sea, *tomamos el origen como primer punto***
- **Así tenemos: F = 0.066 *d***
- **Esta recta, además de contemplar la directa proporcionalidad, también ajusta muy bien, prácticamente se superpone con la otra; luego, la**

NOTA: Otro método para determinar la recta que mejor ajusta es un procedimiento conocido con el nombre de regresión lineal. Este método proporciona la recta para la cual la *distancia* entre cada punto experimental y el correspondiente de la recta de ajuste *sería mínima*; o sea, la recta para la cual se minimiza el *error* . La recta así obtenida se llama recta de regresión.
El método para hallar los coeficientes de esta recta se llama método de mínimos cuadrados e involucra complicadas fórmulas para la pendiente y la ordenada al origen las cuales se obtienen con la ayuda del Cálculo para Dos Variables. Existen numerosos dispositivos que poseen paquetes estadísticos que calculan los coeficientes y dan la recta de regresión.

EJEMPLO 2:
Un detector registra el movimiento oscilatorio de un peso suspendido de un resorte. Tal registro, que se hace en forma gráfica , muestra el desplazamiento (x) del peso respecto a la posición de equilibrio según el tiempo (t) transcurrido desde que comienza a oscilar. El desplazamiento se mide en centímetros y el tiempo en segundos.



- Del gráfico deducimos sin ninguna dificultad que la función que ajuste los puntos dato tiene que ser periódica, luego, un seno ó coseno. Además, que está *subida uno*. Luego la ley de la función sería de la forma: $x = A \text{ sen } (wt) + 1$
- Leemos amplitud y período del gráfico:
  Amplitud: 0.35
  Período : 0.5 $\Rightarrow$ $w = 2\pi / 0.5 = 4\pi$
- Finalmente: $x = 0.35 \text{ sen } (4 \pi t) + 1$, sería un modelo matemático adecuado a este caso.

EJEMPLO 3:
Estudiando el crecimiento de un potrillo que al comienzo de las observaciones pesaba 50 kg. un biólogo observa que al cabo de un mes el animal pesa 60 kg.; es decir, que su peso ha aumentado un 20% respecto al de partida. Un mes más tarde vuelve a observar lo mismo, ya que ahora pesa 72 kg, Si el proceso siguiese de esta manera, o sea aumentando cada mes un 20 % respecto del peso del mes anterior; ¿es posible deducir una ley que lo modele?

» Comenzamos por identificar variables y darles nombre. Así el peso del potrillo es la variable dependiente y, el tiempo, la independiente:
P_o = peso inicial (50 kg),
P_1 = peso al cabo del primer mes (60 kg),
P_2 = peso al cabo del segundo mes (72 kg),....................

» Tratamos de hallar cierta regularidad o comportamiento cuantificable; para ello reescribimos los datos *sin efectuar las operaciones* para, de esta forma, ver si detectamos algún patrón de comportamiento.

$$\mathbf{P_1 = P_o + 20\,\%\,P_o = P_0(1 + \frac{20}{100})} \updownarrow$$

$$\mathbf{P_2 = P_1 + 20\,\%\,P_1 = P_1(1 + \frac{20}{100}) = P_0(1 + \frac{20}{100}).(1 + \frac{20}{100}) = P_0\,(1+\frac{20}{100})^2}$$

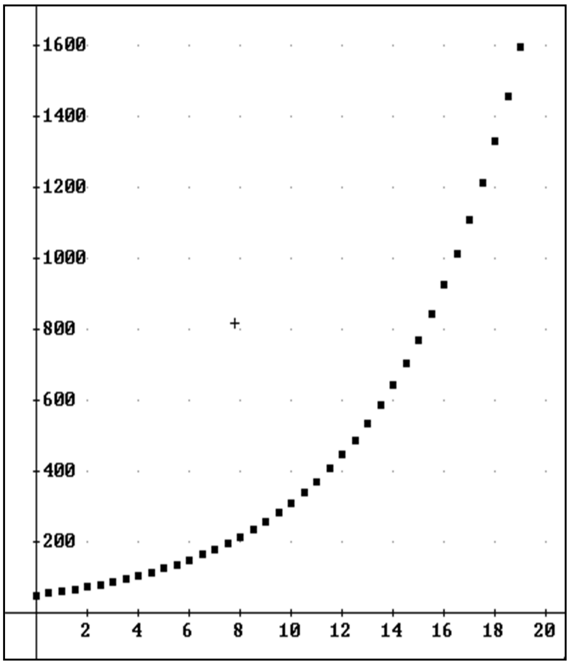
$$\mathbf{P_3 = P_2 + 20\,\%\,P_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = P_0\,(1+\frac{20}{100})^3}$$

....

$$\mathbf{P_n = P_{n-1} + 20\,\%\,P_{n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = P_0\,(1+\frac{20}{100})^n}$$

» **Conclusión :** $P_n = P_0\,(1{,}2)^n$ **(n: enésimo mes) → modelo exponencial**

» Confrontamos el modelo exponencial obtenido con lo que pasa en la realidad:



1º) el crecimiento de un animal no es a "a saltos" sino en forma continua, por lo que, en lugar de la expresión obtenida resulta más razonable escribir el peso del animal en el tiempo "t":

$P = 50 \; . \; (1.2)^{t}$; con t real positivo ó cero.

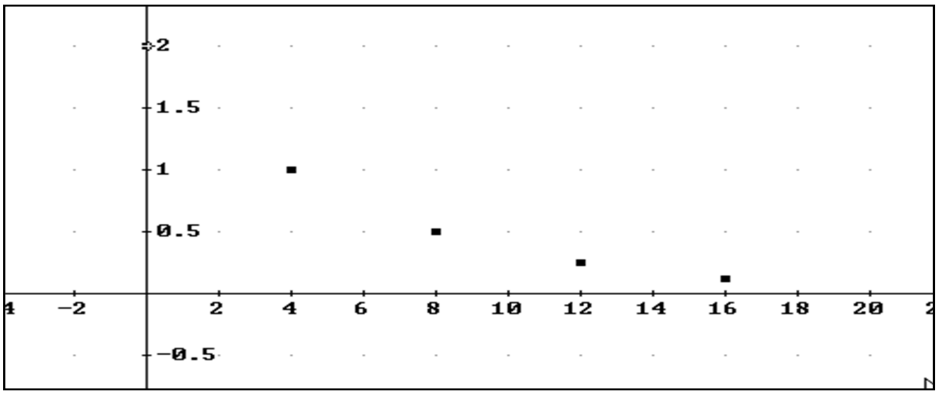
2º) que el peso del animal aumente en un 20 % cada mes puede ser una aproximación razonable a lo real durante los primeros meses. Obviamente deja de tener sentido transcurridos estos. (si no fuera así a los 3 años (36 meses) pesaría más de 35000 Kg. y, ¿alguna vez vieron caballo semejante?). Aquí tenemos dos opciones: buscar el dominio natural de la función (o sea, establecer claramente el intervalo de tiempo para el cual la fórmula hallada tiene validez) o, directamente buscar *otra ley*, válida aún para cuando el animal alcanza su peso adulto.

EJEMPLO 4:

Para determinar la vida media del paladio 100, ^{100}P , se registran datos acerca de su descomposición en el tiempo. La muestra observada tiene un peso inicial de 2 gramos.
La tabla siguiente contiene los valores medidos a intervalos de cuatro días.

» T	0	4	8	12	16
m	2.000	1.000	0.500	0.250	0. 125

» Graficamos los puntos experimentales a los efectos de deducir el tipo de curva.



- Los puntos datos parecen estar sobre una exponencial con base menor que uno, luego resulta natural pensar que los mismos responden a un modelo exponencial.
- Podemos proceder cómo en el ejemplo anterior o aplicar lo visto en pag. 95.

Vemos aquí que es lo que se obtiene en cada caso:

- <u>1er método</u>: reconocemos que, cada 4 días, la masa se reduce a la mitad. Así, como en el ejemplo anterior, planteamos:

$t=0 \rightarrow \quad m_o = 2$

$t=4 \rightarrow \quad m_4 = \frac{1}{2} \cdot m_o$

$t=8 \rightarrow \quad m_8 = \frac{1}{2} m_4 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\; m_o = \frac{1}{2^2} m_o$

$t=12 \rightarrow \quad m_{12} = \frac{1}{2}\; m_8 = \ldots\ldots = \frac{1}{2^3} m_o$

$t=4n \rightarrow \quad m_{t=} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2^{\mathbf{n}}} \cdot m_o$

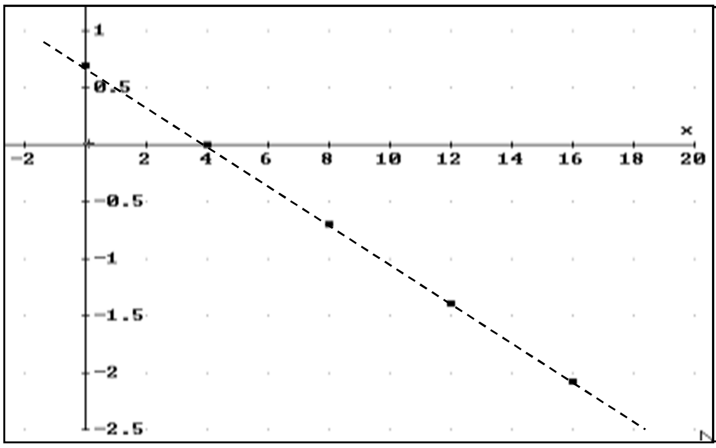
$t \rightarrow \quad m_{t=} \frac{1}{2^{t/4}} \cdot m_o = 2.\ 2^{-t/4}$

- <u>2do método</u> : proponemos, con coeficientes indeterminados, la función tipo a la cual creemos que responden los puntos datos. Procedemos a ´rectificar´ la curva según lo indicado en pag. 95.
- Proponemos: $m = C\, e^{\alpha\, t}$
- Calculamos $M = \mathit{ln}\ m$, para cada ´m´ de la tabla.
- Graficamos los nuevos puntos (t ; M); y verificamos si los mismos se disponen o no, según una recta.
- Si lo hacen, a partir de allí obtenemos los coeficientes intederminados, C y α
- Vemos en detalle este proceso, el *método del cambio de escala* (*)

(*) Calculamos M= ln m, para cada uno de los datos de la tabla y graficamos M versus t .

» ***t***	***0***	***4***	***8***	***12***	***16***
m	2.000	1.000	0.500	0.250	0. 125
M= ln m	**0.693**	**0**	**- 0.693**	**-1.386**	**-2.079**

Graficamos M versus t ; vemos que los puntos se disponen efectivamente sobre una recta. Calculamos la ecuación de la recta y obtenemos y = 0.693147 - 0.173286· t



CONCLUSIONES:

- α = **pendiente** = **- 0.173286**
- ln C = **h** **(ord. origen)** = **0.693147**

$\Rightarrow \quad C = e^{0.693147} = 2$

- **luego:** $m = 2.\ e^{-\,0.173\ t}$

- *<u>Observación</u>*: en general, las funciones obtenidas con distintos métodos son distintas. En este caso resulta interesante observar que las fórmulas obtenida con ambos métodos corresponde a una misma función, aún cuando por su escritura pareciera que fueran funciones distintas.

→ ***2do método:*** $\mathbf{m = 2.\ \ e^{-\,0.173\ t}}$

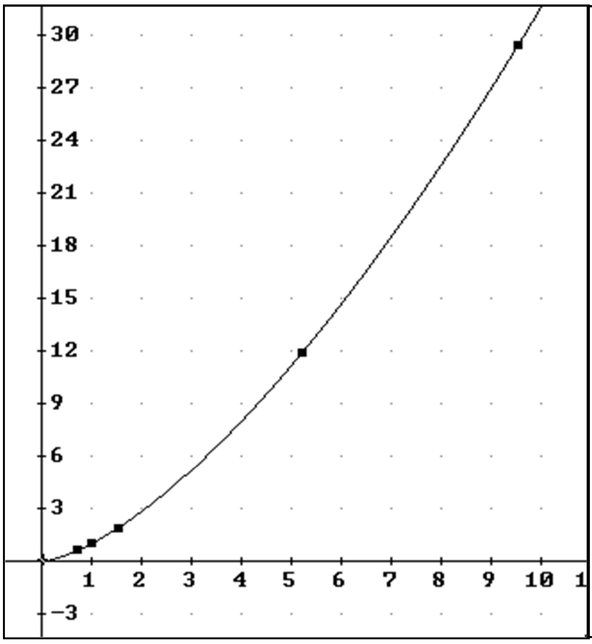
→ ***1er método:*** $\mathbf{m = 2.\ 2^{-t/4} = 2.\, e^{ln 2^{-t/4}} = 2.e^{(-t/4).ln 2} = 2.\ \ e^{-\,0.173\ t}}$

EJEMPLO 5:

En la siguiente tabla se muestra la distancia (d) de los planetas al Sol (tomando como unidad la distancia de la tierra al sol) y sus períodos T (tiempo de revolución alrededor del sol en años terrestres).

» Planeta	**Venus**	**Tierra**	**Marte**	**Júpiter**	**Saturno**
d	**0.723**	**1.000**	**1.523**	**5.203**	**9.541**
T	0.615	1.000	1.881	11.861	29.457

Graficamos los puntos datos para descubrir el comportamiento tendencial de los mismos; o sea, que relación existe entre d y T .



- Si bien los puntos parecen disponerse según una exponencial, si se procede como el caso anterior y se grafica ln T versus d se observa que no ´rectifican´. Luego, una exponencial no es un buen modelo para este problema.
- Si se grafica lnT versus ln d si se se observa que los puntos ´rectifican´. Luego, proponemos: $T = C\,d^{\alpha}$
- Calculamos *ln T* y *ln d*, para cada ´*T*´ y ´*d*´ de la tabla.
- Graficamos los nuevos puntos (*ln d* ; *ln T*); y verificamos que los mismos se disponen según una recta. Hallamos la ecuación de esta recta.
- obtenemos los coeficientes intederminados: $C = 1$ y $\alpha = 3/2$

Observación:

La tercera ley de Kepler del movimiento planetario afirma:
´el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia al sol´
El modelo hallado: ¿cumple esto?

1.7 Actividades

1.- Indicar cuál de las siguientes tablas define una función de **A** = {1 ,2, 3 } en **B**= **N .**
Si define función indicar dominio, codominio e imagen de la misma **.**
Si no lo hace, analizar si modificando algún dato la nueva tabla define función**.**

TABLA 1	x	1	2	3
	y	2	5	10

TABLA 2	x	1	2	3
	y	1	2	3

TABLA 3	x	1	2	3
	y	2	2	2

TABLA 4	x	1	2	2	3
	y	2	3	4	5

TABLA 5	x	1	2	3
	y	1	1.5	2

TABLA 6	x	0	1	2	3
	y	2	5	8	10

2.- Dados los siguientes conjuntos **A** ={libros de una biblioteca } ; **B**= **N** , se pide:

- dar, *verbalmente,* tres funciones de **A** en **B .**
- dar, como quiera ó pueda, una función de **B** en **A.**
- decidir si la siguiente expresión describe una función de **A** en **B .**
  " a cada libro se le asigna los divisores del número de su última hoja".

3.- Sea **f** una función cuyo dominio son los cinco primeros números naturales y su ley es $f(x) = 2x - 4$. Ilustrar **f** mediante una tabla de valores, un gráfico y un diagrama de correspondencia.

4.- Sea **p**: $X \rightarrow X$, con $X = \{1,2,3,4,5\}$ y la ley de **p** indicada por la tabla:

TABLA	x	1	2	3	4	5
	p(x)	2	3	4	5	1

(**p** se llama permutación y como su nombre lo indica, permuta el orden en un conjunto de números.)

Se pide:

- dar la ley de **f** por una tabla si $f(x) = p(p(x))$; $\forall x \in X$. (**f** aplica **p**, *dos veces*)
- idem, si $f(x) = p(p(p(x)))$; $\forall x \in X$ (**f** aplica **p**, *tres veces*)
- ¿cuántas veces debe **f** aplicar **p**, para que la función resultante sea la **identidad**?

5.- La TABLA adjunta define $y = f(x)$.

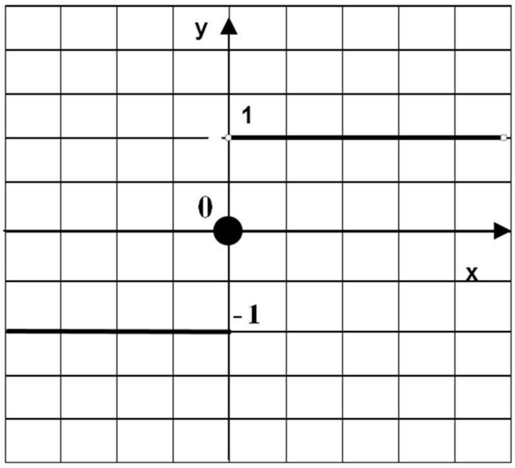
x		¼	½	1	2	3	4		-1/4	-1/2	-1	-2	-3	-4
f(x)		4	2	1	½	1/3	¼		-4	-2	-1	-1/2	-1/3	-1/4

(a) realizar el gráfico de esta función.
(b) Si $h(x) = x.f(x)$. Ilustrar h mediante una tabla de valores.
(c) Obtener una fórmula para la ley de f. Discutir si esta fórmula define la misma **función** que la tabla.

6.- El gráfico adjunto es el gráfico de la función signo "SG".

(a) Dar la LEY de la función "SG" a través de una (o más) fórmulas.
(b) Calcular
$SG(3.5)$; $SG(\ln 0.1)$; $SG(3.1416-\pi)$;
$SG(a^2+1)$; $SG(-a^2-1)$; $SG(\ln 1)$;
$SG(3.1415- \pi)$; $SG(| 3.1415 - \pi |)$.

(c) Indicar V ó F. Justificar la repuesta.
$SG (a.b) = SG(a) . SG(b)$
$SG (a+b) = SG(a) + SG(b)$
$SG (2a) = 2 SG (a)$
$SG (-a) = - SG (a)$.



7.- ¿ Qué *función* tiene por gráfica la parte de la circunferencia que está por encima del eje x ? ; ¿ y la que está en el primer cuadrante?.

8.- En cada uno de los siguientes casos dar una *fórmula para la función* descripta e indicar el *dominio natural* de la misma:
a) Un rectángulo tiene un área de 10 m^2. Expresar el perímetro en función de la longitud de uno de sus lados.
b) Un cajón rectangular abierto con un volumen de 2 m^3, tiene base cuadrada. Expresar el área superficial del cajón como función de la longitud del lado de la base.
c) Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen 2m. de longitud. Expresar el área del triángulo en función de la longitud de la base.
d) Un rectángulo está inscripto en una semicircunferencia de 1 m de lado, con una de sus bases sobre el diámetro. Expresar el área del rectángulo en función de su base.

9.- Expresar cada afirmación con una fórmula:
a) P es directamente proporcional a t. Además si $P= 4$ entonces $t =10$.
b) La distancia “d” recorrida por un móvil que viaja a velocidad constante es directamente proporcional al tiempo transcurrido “t” y a las 2 hs. había recorrido 250 km.

10.- La presión del agua bajo la superficie del mar es directamente proporcional a la profundidad. Llamamos ´x´ a la profundidad medida en metros y ´p´ a la presión medida en atmósferas.
a) Sabiendo que a 97 ms. de profundidad la presión es de 10.21 atmósferas, expresar **p** en función de **x** .
b) Hallar la presión a 50 m.; 100 m.; 200 m.
c) Un cuerpo sumergido soporta una presión de 8,4 atmósferas: ¿a qué profundidad está?

11.- Si la temperatura de un gas encerrado en un recipiente permanece constante, la presión P del mismo es inversamente proporcional al volumen V. Se sabe que la presión de un gas en un globo esférico de 9 cm. de radio es 10 lb/cm^2:

(Vol. Esfera = $4/3\ \pi\ r^3$)

a) Hallar la expresión que permite calcular P en función de V.
b) Hallar la expresión que permite calcular P en función de r.
c) Si el radio del globo aumenta 12 cm, hallar P con la fórmula que más convenga.

12.- a) La variable ´x´ es inversamente proporcional a ´y´ ; ´y´ es directamente proporcional a ´z´ , la que a su vez es directamente proporcional a ´u´ . ¿Qué relación existe entre ´x´ y ´u´?

b) Durante una electrólisis, la cantidad de sustancia que se desprende en el electrodo es directamente proporcional a la conductividad del electrolito, esta última a su vez es proporcional a la concentración del electrolito. Dada cierta cantidad de sustancia, la concentración es inversamente proporcional al volumen del solvente. ¿Qué dependencia existe entre la cantidad de sustancia desprendida en el electrodo y el volumen de solvente?.

13.- Sea **f** la función definida como sigue:

"f(x) = edad en años de una persona cuya edad en meses es x "

Indicar Dn, Im f y gráfico f.

14.- La TABLA adjunta corresponde al registro de la temperatura (T) de un cuerpo de metal según el tiempo (t) transcurrido desde el inicio de una experiencia.

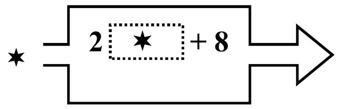
t (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T (ºC)	60	70	80	60	50	40	35	40	50	60	70	80	70	70	70

» La TABLA : ¿define T= f(t)? Si así fuera, indicar: D_{nf} , C_{nf} e Im f .

» Responder las preguntas que se indican a continuación:

- ¿cual habría sido la temperatura máxima alcanzada por el cuerpo?;
- ¿en que tiempo(s) la habría alcanzado?
- ¿cual la temperatura mínima? ; ¿cuando la habría alcanzado?
- ¿en qué intervalo de tiempo la temperatura parece estar "disminuyendo"?. ¿y permanecer constante?
- ¿por qué las preguntas están hechas en potencial?

15.- El siguiente diagrama de máquina corresponde a la función **f** . Expresar la ley de la misma a través de una fórmula. Indicar luego, dominio natural de **f**.



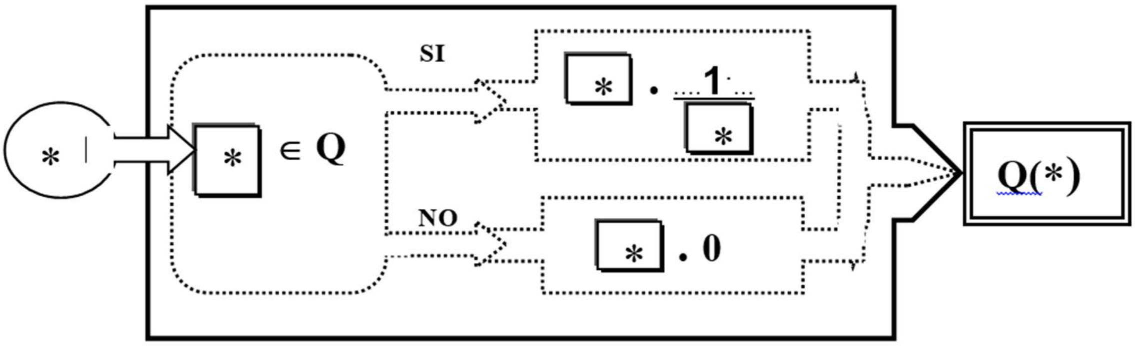
f (✶) = ...

a) *Calcular*: f(2); f ($\sqrt{\mathbf{2}}$); f ($\sqrt{\mathbf{2}}$ -5); f (log 1); f (log 10^2); f ($\sqrt{\mathbf{-16}}$); f (30º); f (π/6); f (cos 2).

b) Indicar el ouput correspondiente a los siguientes input:
$g(x)= \sqrt{\mathbf{x}}$; $r(x)= \sqrt{\mathbf{x}} - 5$; $s(x)= \sqrt{\mathbf{x}} - 5/2$
$h(x)= \log x$; $k(x)= \cos x$; $p(x) = \log x^2$

(*) Comparar los ouput de la máquina en el item (a) y en el item (b) y señalar cual es la diferencia esencial entre un caso y otro.

16.- El siguiente diagrama de máquina corresponde a la función "Q", la cual ´separa racionales de irracionales´.



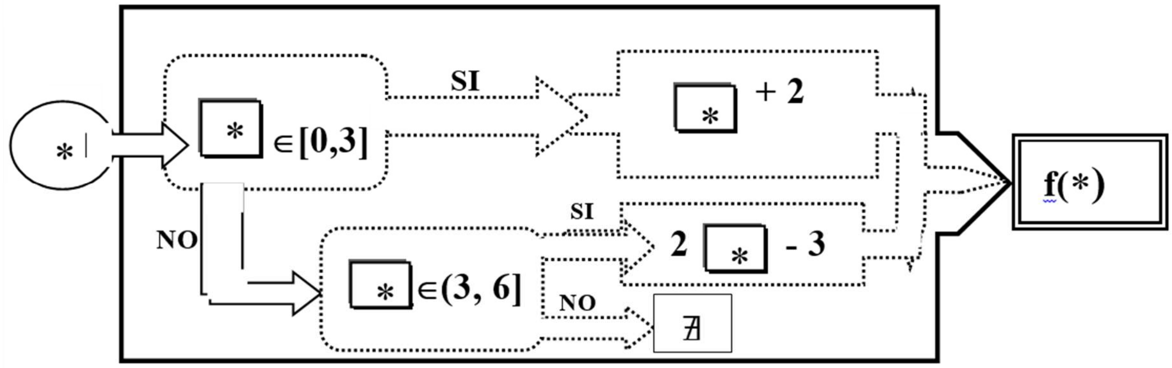
a) Analizar si "Q" procesa los siguientes valores; o sea, si los acepta como input. En caso que los acepte indicar cual es el output correspondiente.

$1/2$; $1/3$; π ; $\pi-3$; $\pi/2$; 90º ; sen 30º ; sen 60º; tg 45º; tg 0º ; cos 180º;
sen 90º; e ; e -2 , e/2 ; ln 1; ln e; ln e^2; ln$\sqrt{\mathbf{e}}$; log 0.1 ; log$\sqrt{\mathbf{10}}$

b) Indicar la ley de "Q" a través de una (ó más) fórmulas.

17.- El siguiente diagrama de máquina corresponde a la función *seccionalmente definida* **f.**

a)



f(2); f($\sqrt{\mathbf{2}}$); f($\sqrt{\mathbf{2}}$ +3); f($\pi/2$); f (10^{-8}); f(-2); f(π-5); f(π +2); f (e)

b) Indicar dominio natural de **f**.

c) Indicar l a ley de **f** a través de una (ó más) fórmulas.

18.- Dada $f(x)= x^2$ se pide encontrar y simplificar :

(a) f (2); **(b)** f (2+h); **(c)** f (2+h)- f (2); **(d)** [f (2+h)-f (2)] / h

(e) La expresión en (d) define una función a la que llamamos **CI** (cociente incremental) y cuya variable independiente es ´h´. Indicar Dn y ley de **CI** .

(f) ¿Qué puede decir de los valores de CI(h) para "h" infinitamente pequeños?

19.- Analizar cual de las siguientes ecuaciones determina una función "f" con fórmula " **y = f(x)** ".

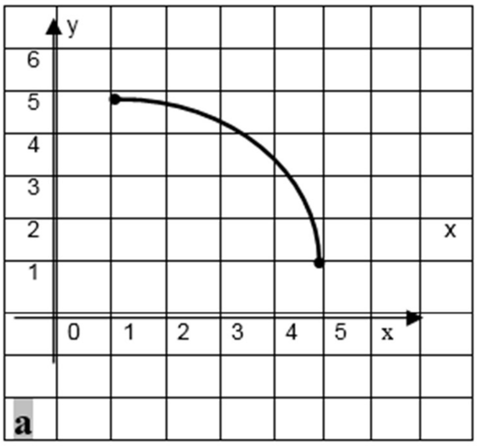
(a) $2x + 5y = 4$
(b) $4x^2 - 2y = 8$
(c) $4x - y^2 = 0$
(d) $x^2 + y^2 = 25$
(e) $x.y = 1$
(f) $x^2.y = 1$
(g) $x^2.y^2 = 1$
(h) $x.(y+1)= y$
i) $x^2.y + x\,y^2 = 1$
j) $y = 3$
k) $|\,y\,| = 2$
l) $x - 2 = 0$

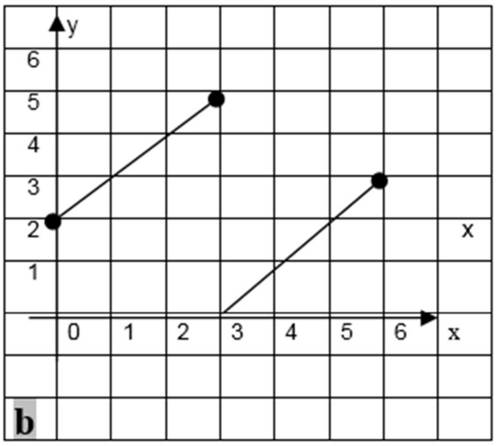
20.- *DEFINICION*: f se dice POSITIVA (fp) si y solo si $f(x) > 0$; $\forall\ x \in Df$

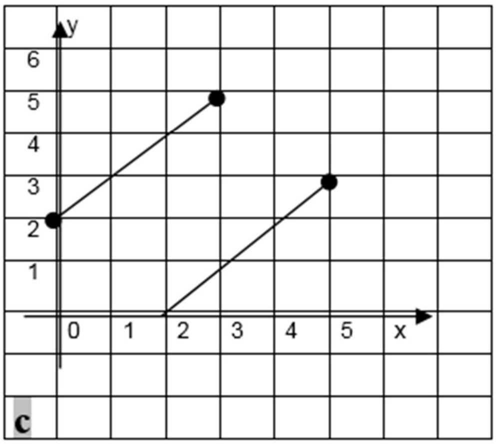
a) dar una definición equivalente de fp. en términos del gráfico de f.
b) definir función NEGATIVA (fn); NO POSITIVA (fnp) y NO NEGATIVA (fnn).
[diremos que una función tiene "SIGNO DEFINIDO" en su dominio si es POSITIVA en él (ó NEGATIVA, ó NO POSITIVA, ó NO NEGATIVA)].
En cada caso interpretar en términos del gráfico de la función
c) analizar si las siguientes funciones tienen "SIGNO DEFINIDO" en su dominio. Si lo tienen proceder a clasificarlas.

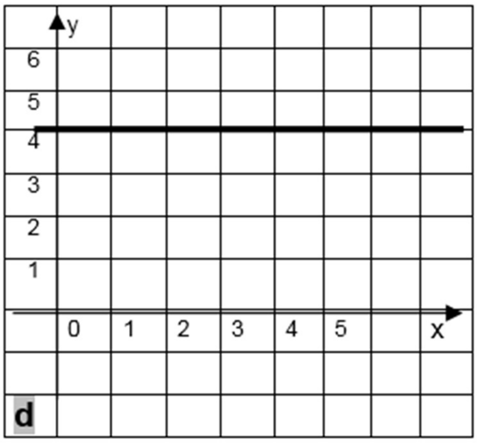
$f_1(x)= x^2$ $\quad$ $f_2\,(x)= x^2+1$ $\quad$ $f_3(x)= x^3$ $\quad$ $f_4(x)= |\,x\,|$;
$f_5(x)= -|\,x\,|$ $\quad$ $f_6(x)= \sqrt{\mathbf{x}}$ $\quad$ $f_7(x)= -\sqrt{\mathbf{x}}$ $\quad$ $f_8(x)= \sqrt{\mathbf{x}}+1$;
$g_1(x)=$ sen x $\quad$ $g_2(x)=$ senx - 1; $\quad$ $g_3(x)= |$ senx $|$ $\quad$ $g_4(x)=$ senx +2

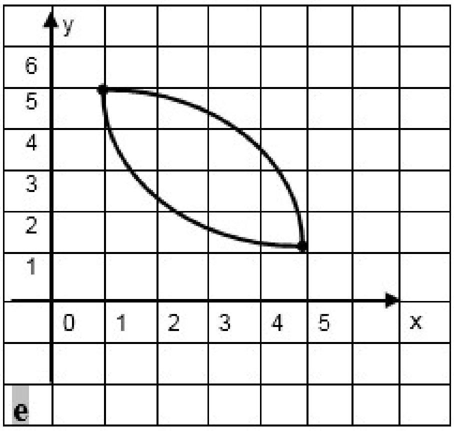
21.- Dadas las siguientes gráficas indicar cual de ellas define una función "f" con fórmula "**y = f(x)**". Si define función indicar dominio natural e imagen.



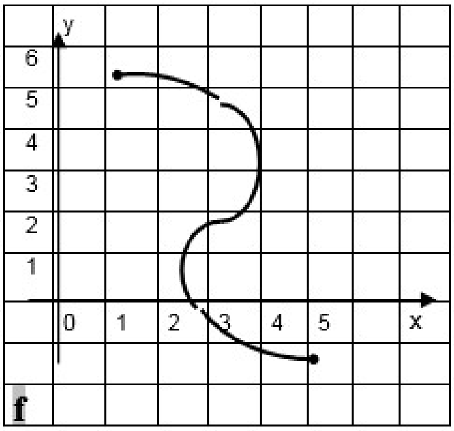




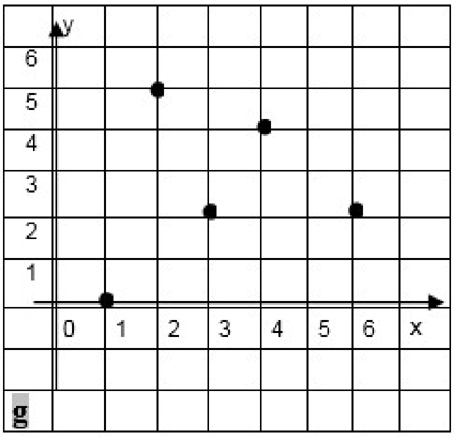



y
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
x

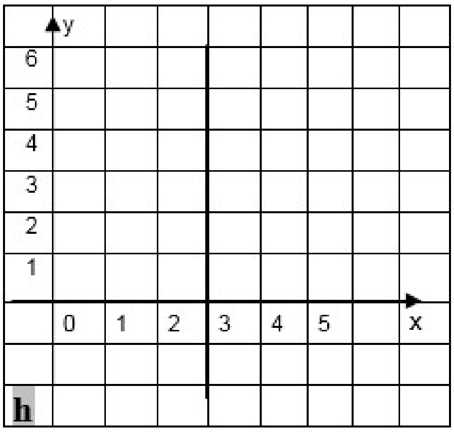
e


y
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
x

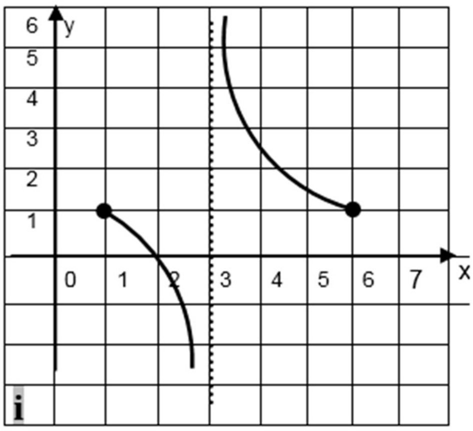
f


y
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
x

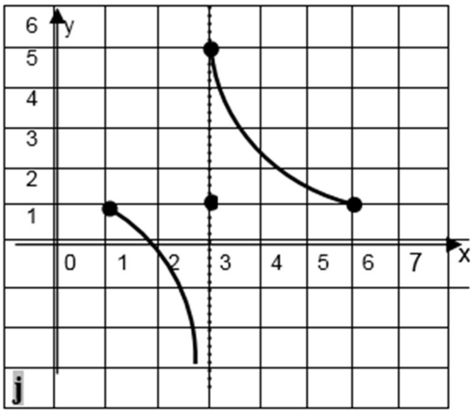
g


y
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
x

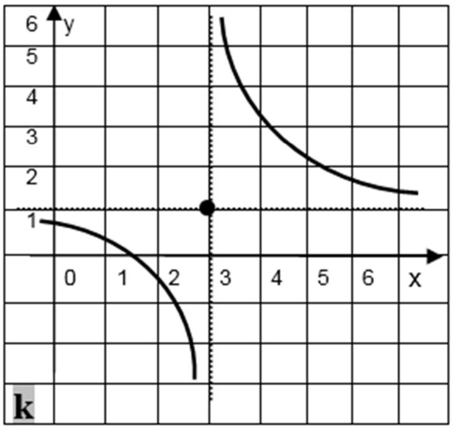
h


6
y
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

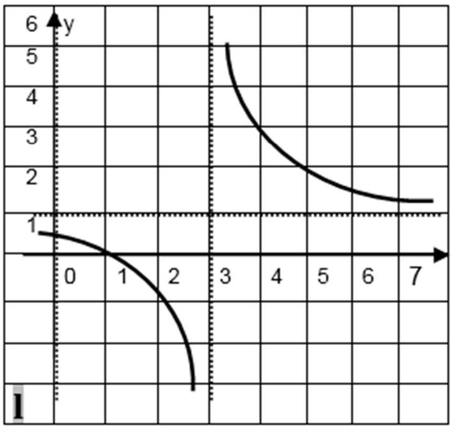
i


6
y
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
x

j


6
y
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
x

k

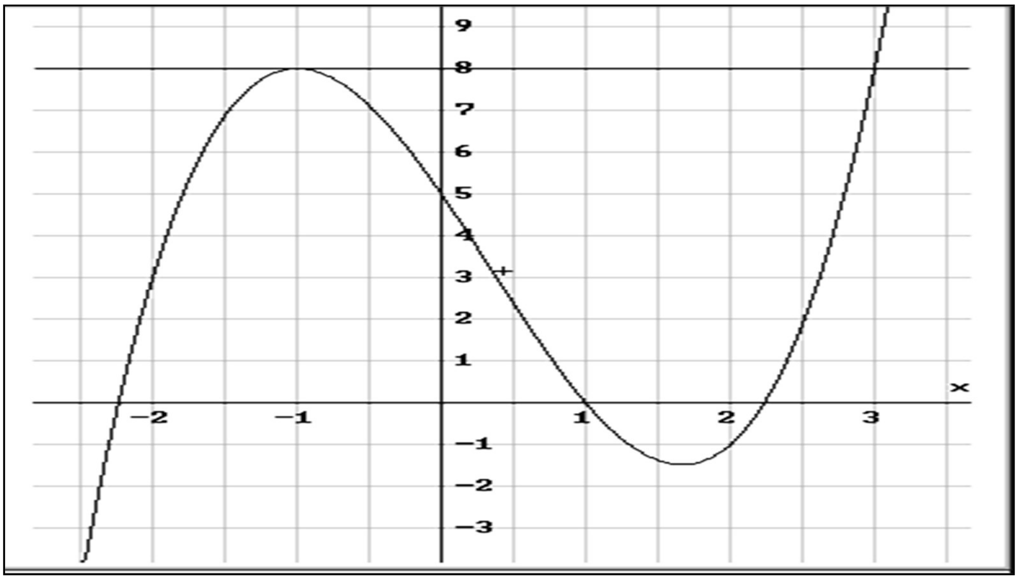

6
y
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7

l

22.- Para cada gráfico del ejercicio anterior que haya definido función, analizar:

a) Si **f** tiene signo definido en su dominio.
b) Si **f** es monótona en su dominio. Si lo es indicar el tipo de monotonía.
c) Si **f** es monótona en algún subintervalo de su dominio.
d) Si **f** alcanza un valor *´máximo´*. Si lo alcanza, en que punto(s) lo hace.
e) Si **f** alcanza un valor *´mínimo´*. Si lo alcanza, en que punto(s) lo hace.

23.- La gráfica que sigue corresponde a una función polinómica:



En relación a la misma, se pide:

i) indicar dominio e imagen ¿Alcanza la función un valor máximo?; ¿un mínimo?
ii) leer del gráfico las imágenes correspondientes a las siguientes abscisas: -1 ; 0 ; 1 ; 3
iii) leer del gráfico *cuantos* ceros ó raíces presenta este polinomio.
iv) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde el polinomio esté creciendo.
v) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde f(x) > 8.
vi) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde f(x) < 0.
vii) Indicar, leyendo del gráfico, un intervalo donde 0< f(x) < 8.
viii) Si x toma sólo valores en el [-2; 1], ¿alcanza un valor máximo?, ¿mínimo?, ¿cuáles?
ix) de los polinomios que se proponen a continuación descartar los que ´con seguridad´ no corresponden a la gráfica dada. En cada caso, justificar la elección.

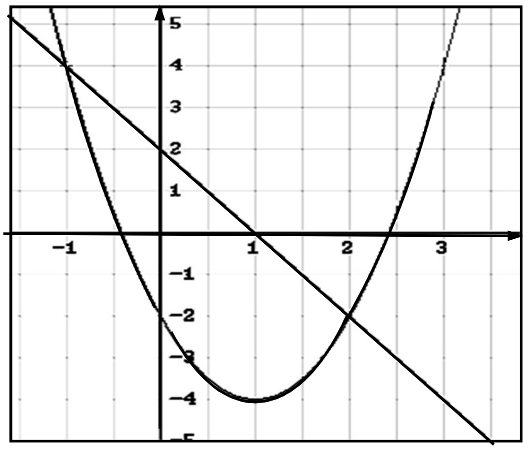
$p_1(x) = x^2 - 2x + 1$ $\qquad$ $p_3(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$

$p_2(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$ $\qquad$ $p_4(x) = -x^3 - 4x^2 + 5$

j) Discutir acerca de la posibilidad de que p_3 sea el polinomio graficado. Para ello, calcular las raíces de p_3, factorizar p_3 y usando la factorización, determinar los intervalos donde el polinomio es positivo ó negativo. Concluir.

Sugerencia: para establecer el signo de $p_3(x)$ en cada uno de los subintervalos determinados por los ceros del polinomio podemos acudir al uso de ***valores de prueba***.
Para ello, tomamos x* en uno de los subintervalos, reemplazamos x por x* en la expresión factorizada del polinomio, $p(x^*)=(x^*-x_1)(x^*-x_2)(x^*-x_3)$ y decidimos el signo de $p_3(x^*)$ a partir del signo de cada factor (x^*-x_i). (*calculado o estimado usando desigualdades*).
En el ´subintervalo´ el signo del polinomio es el signo de $p_3(x^*)$.

24.- Las funciones **f** y **g** son respectivamente, la recta y la parábola del gráfico adjunto.



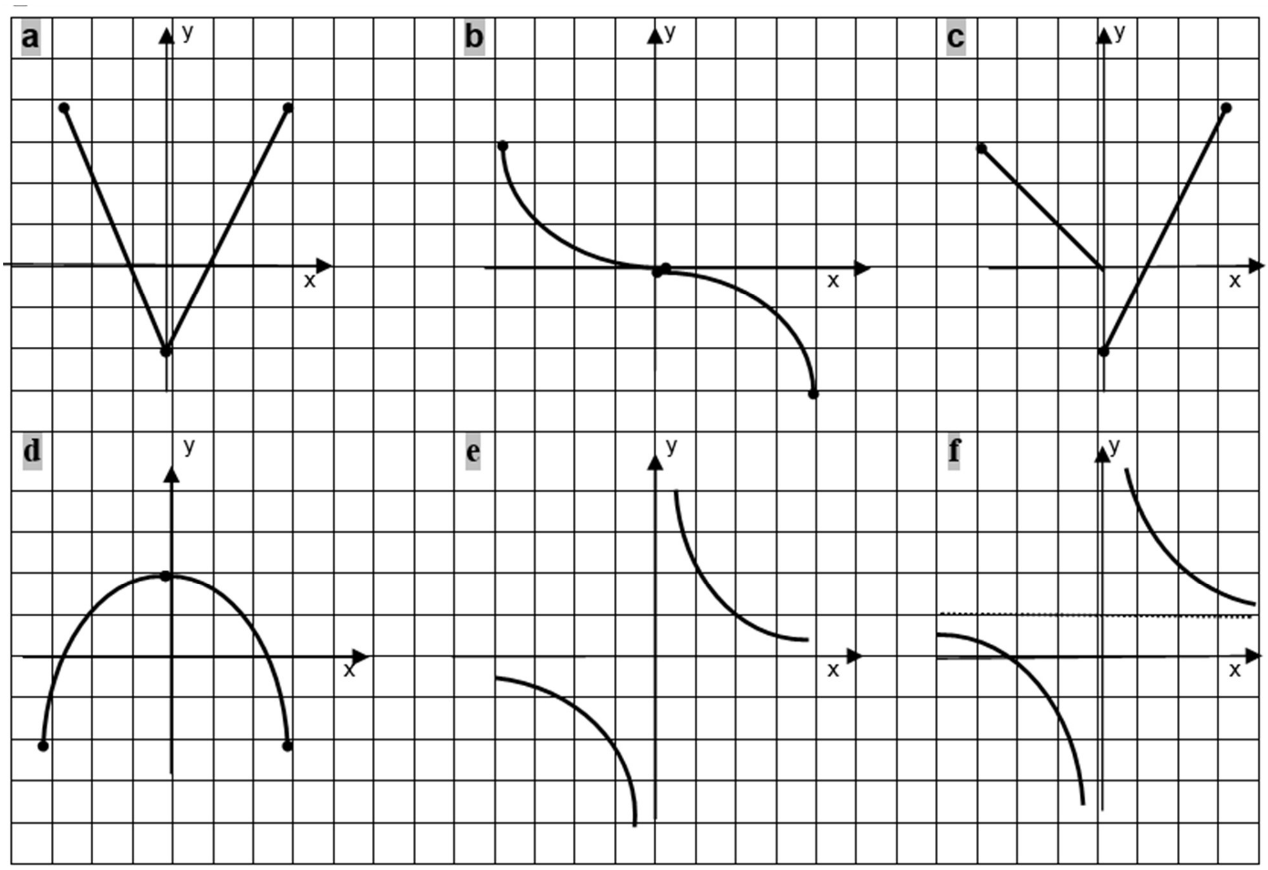
a) Leer del gráfico los puntos de intersección entre recta y parábola.

b) Si la función **h** se define como:
h = f – g

- indicar todos los ceros de **h**.
- indicar gráfica y analíticamente el conjunto **H** si **H** = { $x \in R$ / $h(x) \geq 0$ }.

25.- Para las funciones cuyos gráficos se proponen a continuación, se pide:

a) determinar y clasificar los intervalos de monotonía.
b) Analizar si la función es par o impar en su dominio.



26.- Determinar si **f** es par, impar ó ninguna de las dos cosas para:

a) $f(x) = x^2 - 4$
b) $f(x) = x^{-2}$
c) $f(x) = 3x$
d) $f(x) = 3x + 4$
e) $f(x) = \cos x$
f) $f(x) = \text{sen } x$
g) $f(x) = 3x^4 + 2x^2$
h) $f(x) = x^3 + x$
i) $f(x) = x^3 + x + 1$
j) $f(x) = 2 + |x|$
k) $f(x) = |2 + x|$
l) $f(x) = x^{-3}$

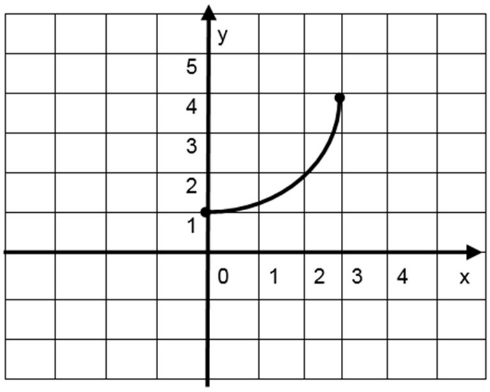
27.- Clasificar cada una de las siguiente funciones en FP (función polinómica); FR (función racional); FA (función algebraica); FT (función trascendente).

a) $f(x) = 2x + 5$
b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x^{-2}$
c) $f(x) = 2 \cos x - \text{sen } x$
d) $f(x) = x + x^{½}$
e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^3 - 4}$
g) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - \sqrt{2}$
h) $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - \sqrt{x}$
i) $f(x) = (x-2)(x-3)(x+1)$
j) $f(x) = \log(4x - 5)$
k) $f(x) = (x-2)(x-3)(x+1)^{-1}$

28.- Siendo **f** la función del gráfico adjunto se pide :

a) Dar dominio e imagen de f
b) Para las funciones que se indican a continuación dar dominio, imagen y gráfico usando la TABLA de transformaciones de la pag. 48.

$g(x) = - f(x)$
$h(x) = f(x) + 2$
$j(x) = f(x) - 3$
$p(x) = f(x - 1)$
$q(x) = f(x + 3)$
$r(x) = f(x + 2) - 2$
$s(x) = | f(x + 2) - 2 |$
$d(x) = 2 . f(x)$
$m(x) = ½ . f(x)$



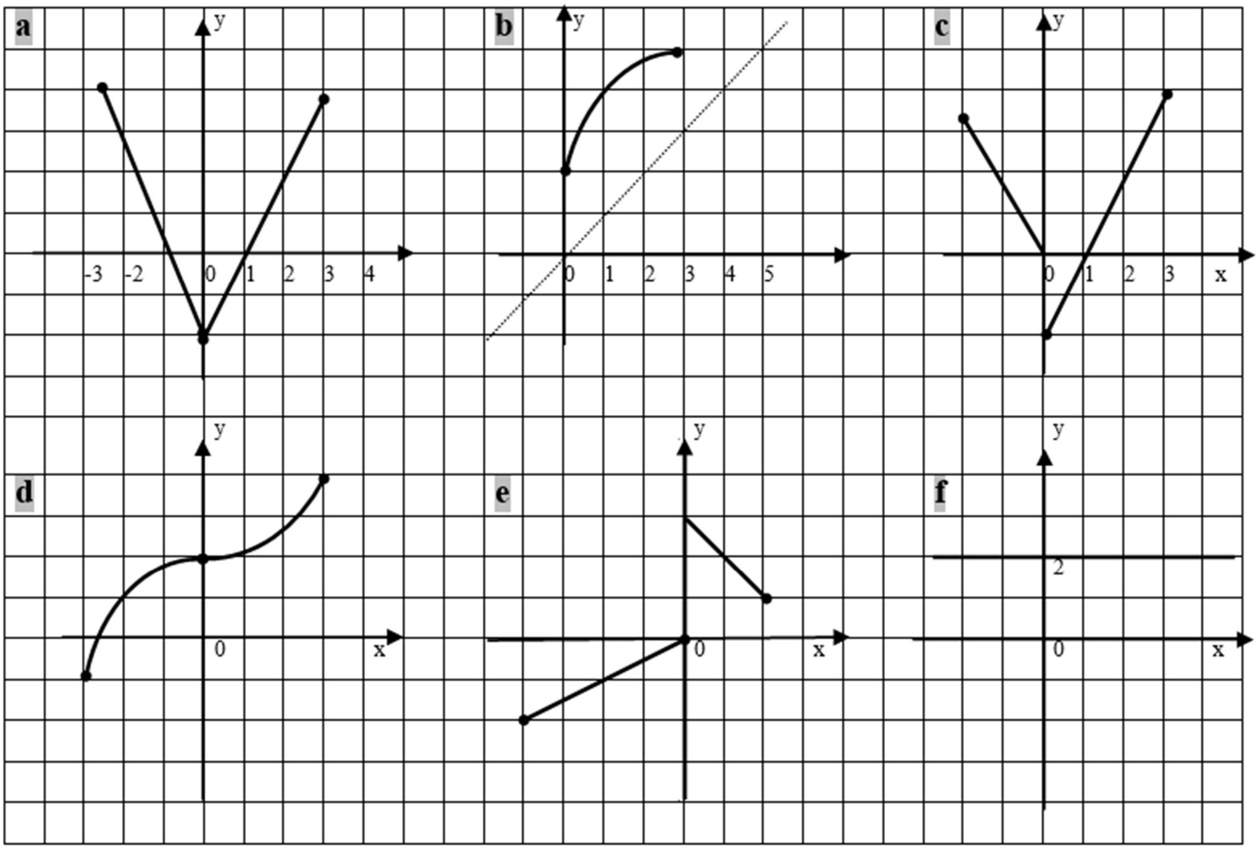
c) Escribir las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f si sobre ella se realizan las siguientes transformaciones:
Se desplaza 4 u. hacia abajo.
Se desplaza 5 u. a la derecha.
Se refleja respecto del eje x y luego se desplaza 2 u. hacia arriba.
Se refleja respecto del eje y.
Se alarga verticalmente un factor 3.
Se alarga horizontamente un factor 3.

29.- Para las funciones que indicamos a continuación, se pide:

a) determinar si las mismas *admiten inversa* (en todos los casos considerar codominio de **f** = Im **f** **)**. (Sugerencia : usar la prueba de la recta horizontal)

b) Indicar V ó F, justificando la respuesta:
i) si **f** es estrictamente creciente en D entonces **f** es inyectiva en D.
ii) si **f** es inyectiva en D entonces **f** es estrictamente monótona en D.
iii) Sea **g** inversa de **f** luego**,** si $f(1) = 4$ entonces $g(4) = 1$.
iv) Si $f(1) = 4$ y $g(4) = 1$ entonces **g** es la inversa de **f** .
v) Si **g** inversa de **f** entonces $g(f(x)) = x^{-1}$.
vi) Si **g** inversa de **f** entonces $(1, 4) \in$ graf f si y sólo si $(4,1) \in$ graf g.

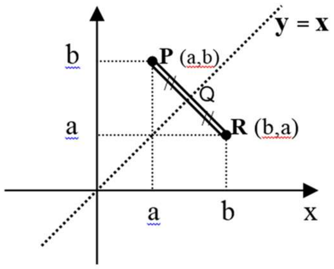
c) en el caso que exista **g** inversa de **f** determinar, leyendo del gráfico, dominio y codominio de **g.** Indicar luego en cada caso y leyendo del gráfico, g(2) .



d) Por definición de función inversa si **g** es la inversa de **f** entonces,

$(a,b) \in$ graf f $\Leftrightarrow$ $(b,a) \in$ graf g.

Verificar que (a,b) y (b,a) son simétricos respecto de la recta y=x. (d(P,Q) = d(Q,R))



ⓘ Conclusión: graf. g es simétrico del graf. f respecto de la recta y = x.

Para los gráficos dados se pide graficar, en caso que exista, **g** inversa de **f**

30.- I) Indicar la ley de las siguientes composiciones si el subíndice que acompaña a la función indica lo que se suma(S), resta(R), multiplica(M) ó divide (D) a "x"
(ej: $S_8(x) = x+8$):

a) $M_4 \circ S_2$
c) $R_6 \circ S_9$
e) $R_5 \circ S_5$
g) $D_3 \circ M_3$
b) $S_2 \circ M_4$
d) $M_3 \circ [R_6 \circ S_2]$
f) $S_5 \circ R_5$
h) $M_3 \circ D_3$

(II) Indicar la función g que en cada caso haga cierta la igualdad que se indica discutiendo previamente quien debe ser g. Verificar la afirmación.

a) $g \circ D_3 = id$
c) $g \circ [S_5 \circ M_2] = id$
e) $g \circ [S_5 \circ S_2] = id$
b) $g \circ R_8 = id$
d) $g \circ [D_2 \circ S_8] = id$
f) $g \circ [R_8 \circ [M_2 \circ S_4]] = id$

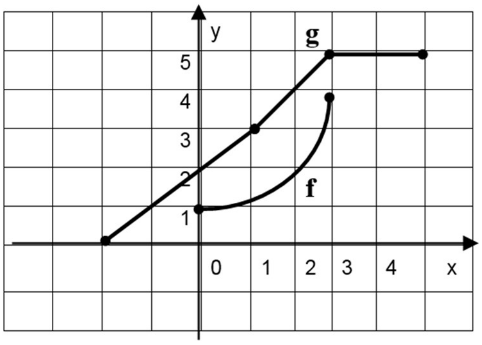
(III) Dadas las siguientes funciones expresarlas como composición de funciones algebraicas elementales (S; R; M ó D)

a) $p(x)= 3x +5$ b) $q(x) = \frac{4x+7}{5}$ c) $r(x) = 9/5. (x/2 + 4)$

31.- Usar las gráficas de **f** y **g** para evaluar cada expresión o bien, explicar por qué no está definida.

i) $g \circ f(0)$
j) $g \circ f(2)$
k) $g \circ f(3)$
l) $f \circ g(0)$
m) $f \circ g(1)$
n) $f \circ g(-2)$
o) $f \circ g(4)$

a) $g \circ g(-2)$
b) $g \circ g(-1)$
c) $g \circ g(0)$
d) $g \circ g(1)$
e) $g \circ g(2)$
f) $g \circ g(3)$
g) $g \circ g(4)$
h) $g \circ g(5)$



- Usar estas estimaciones para trazar una gráfica aproximada de $g \circ g$

32.- Indicar el dominio natural de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
b) $f(x) = x / (x+2)$
c) $f(x) = x / (x^2- 4)$
d) $f(x) = x / (x^2+1)$
e) $f(x) = \sqrt{x-2}$

e) $f(x) = (x-1) / (3x-3)$
f) $f(x) = \cos x$
g) $f(x) = 1/ \cos x$
h) $f(x) = \operatorname{tg} x$
i) $f(x) = \cos x + 1/x$
j) $f(x) = \operatorname{sen} (\cos x)$

m) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1/x$
n) $f(x) = (x+2) / (x^2 – 4)$
o) $f(x) = \sqrt{x-2} . \sqrt{x}$
p) $f(x) = \sqrt{(x-2). x}$
q) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

33.- Hallar, si existe, f(0); f(2); $f(\sqrt{2})$; f (a) ; f (a+2); f (a+2) –f(a); f (1/a) ; 1/f(a) para:

a) $f(x) = x^2 –1$ b) $f(x) = x . (x+2)$ c) $f(x) = x / (x-2)$ d) $f(x) = (x^2-2)^{-1}$

34.- Identificar y graficar las funciones cuyas gráficas sean *rectas, semirrectas, segmentos ó consecución de ellos*. En cada caso indicar dominio e imagen.

a) $f(x) = 2 x + 4$
b) $f(x) = 2 x^{-1} +4$
c) $f(x) = - x -2$
d) $f(x) = (x+1)^2$
e) $f(x) = 2x+4$; $D_f = R^+$
f) $f(x) = 2x+4$; $D_f = [-2,1]$
g) $f(x) = \frac{2x+4}{x}$

h) $f(x) = (x+1)^2 – x^2$
i) $f(x) = \frac{x^2 -4}{x-2}$
j) $f(x) = | x | - 2$
k) $f(x) = | x-2 |$
l) $f(x) = | x-2 | + x$

m) $f(x) = \frac{4x-8}{2}$
n) $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [- 4 ,0] \\ 2, & x \in (0 , 2] \end{cases}$

ñ) [x] = mayor entero que es menor ó igual que ´x´. (función *PARTE ENTERA*)

35.- Para cada una de las funciones que siguen se pide:

a) Graficar. Indicar Im f.
b) Determinar y clasificar intervalos de monotonía. (gráficamente)
c) Estudiar la existencia de simetrías (gráficamente). Si existe, clasificar la función.
d) Estudiar la existencia de inversa. Si existe dar dominio, codominio y ley de la misma. Graficar y analizar si conserva las propiedades de la función de partida.

i) $f(x) = 2x$

ii) $f(x) = 2x \;;\; D_f = [-2,2]$

iii) $f(x) = -2x$

iv) $f(x) = -2x + 4$

v) $f(x) = -2x + 4 \;;\; D_f = R^+$

vi) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

vii)

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [0,4] \\ -x+2, & x \in [-4,0) \end{cases}$$

viii)

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (0,4] \\ 1, & x = 0 \\ x, & x \in [-4,0) \end{cases}$$

ix)

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (0,4] \\ 0, & x = 0 \\ x-2, & x \in [-4,0) \end{cases}$$

x)

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (0,4] \\ 0, & x = 0 \\ 2, & x \in [-4,0) \end{cases}$$

36.- i) Para los puntos que se dan a continuación se pide: graficar en un mismo sistema coordenado la recta que determinan y obtener (si existe) la pendiente de tales rectas. Hallar luego (si existe), la ley de la función correspondiente.

Analizar si estas rectas presentan alguna particularidad y cómo se obtiene esta información si sólo se cuenta con la ley de la función. Escribir una proposición con la conclusión obtenida.

a) P (0 , 1) ; Q (2, 5)
b) P (0 , -1) ; Q (2, 3)

ii) Idem que el item (i) pero para los siguientes puntos:

c) P (0 , 2) ; Q (1, 3)
d) P (0 , 2) ; Q (-1, 3)
e) P (0 , 2) ; Q (3, 2)
f) P (0 , 2) ; Q (0, 4)
g) P (0 , 2) ; Q (4, 0)

iii) Idem que el item (i) pero para los siguientes puntos:

h) P (-2,- 4) ; Q (2, 4)
i) P (0 , 2) ; Q (4, 0)
j) P (2 , -1) ; Q (-6, 3)
k) P (0 , -3) ; Q (-6, 0)

Acorde a las conclusiones obtenidas en los items anteriores si
r_1) $y = 4x-5$ y r_2) $y = -0.5x+4$; se pide:

a) Dar dos rectas paralelas r_1.
b) Dar dos rectas perpendiculares a r_2.
c) Analizar si r_1 y r_2 son paralelas ó perpendiculares. Si no son paralelas hallar $r_1 \cap r_2$.
d) Analizar si las siguientes rectas intersecan a r_1. Si lo hacen, hallar dicha intersección.

(r6) $y = 2x - 3$
(r7) $y = -0{,}25 \,.\, x$
(r8) $y = -0{,}25.\, x - 5$

(r3) $y = 4x - 2$
(r4) $2x - ½\, y - 2.5 = 0$
(r5) $x + 2y + 1 = 0$

37.- Dar la ley de la función lineal **f** que verifica:

a) Su gráfica corta al eje x en el punto de abscisa x* = 3; al eje y en el punto de ordenada y*= 6.
b) Su gráfica es el eje x.
c) Su gráfica asciende dos unidades por cada unidad de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el origen.
d) Su gráfica asciende dos unidades por cada unidad de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
e) Su gráfica asciende 6 unidades por cada 2 unidades de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
f) Su gráfica desciende dos unidades por cada unidad de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
g) Su gráfica asciende una unidad por cada cuatro unidades de desplazamiento hacia la derecha y pasa por el punto (0,5).
h) Sus imágenes ´crecen´ a razón de 3 u. por cada cambio unitario en x.
i) f(5) = 3 y su gráfica es paralela al eje x.
j) f(0) = 3 y su gráfica es paralela a la de y = 4x –2.
k) Corta a la recta y = 4x-2 en el punto de abscisa x = 2 y es paralela a y = 5.

38.- El aire seco al moverse hacia arriba se enfría a razón de aproximadamente 1ºC por cada 100 m. Esto se da hasta unos 12 km. del suelo.

a) Si la temperatura al ras del suelo es de 20ºC, escribir una fórmula para la temperatura en función de la altura al suelo. Indicar la *función* correspondiente según los datos empíricos.
b) ¿Qué rango de temperaturas barre un avión desde que despega hasta estar a una altura de 5 km?
c) ¿cuál es la temperatura que se tiene en el punto límite de validez de la fórmula?
d) Hallar la función inversa. ¿Qué nos informa esta función? , ¿la pendiente?
e) Si los sensores de un avión registran una temperatura de 10ºC: ¿ a qué altura está el avión?

39.- Hallar la función lineal que permite obtener la temperatura de un cuerpo en grados Fahrenheit (F) conocida la temperatura del mismo en grados Celsius (C), si se sabe que el agua se congela a 0ºC (ó 32 ºF) y hierve a 100 ºC (ó 212 ºF).

a) Calcular a cuantos grados Fahrenheit equivalen 5 ºC.
b) ¿Qué *variación* en grados Fahrenheit corresponde a una *variación* de 5ºC?
c) Graficar la función; indicar cual es la pendiente y qué representa.
d) ¿Qué intervalo sobre la escala Fahrenheit corresponde al rango de temperaturas $20 \leq C \leq 30$?
e) Hallar y graficar la función inversa. ¿Qué expresa esta función? , ¿la pendiente?
f) La Sra. Amalita Gonzalez del Cerro compró un juego de ollas importadas. En el prospecto indica que las mismas no pueden someterse a temperaturas superiores a los 194 ºF. La Sra tiene un grave dilema, no sabe si en estas ollas tan lindas puede hervir agua: ¿la ayudamos?

40.- Presión, volumen y temperatura son tres parámetros que definen el estado de una masa gaseosa. Para hallar la relación que los vincula (*ecuación de estado*) se comienza por los casos más simples, por ejemplo, dejando fijo *uno de los parámetros*. Así si se trabaja en un recipiente deformable se puede mantener la *presión constante* y estudiar la relación entre volumen y temperatura. Con este objetivo se procede a variar la temperatura y medir el volumen resultante en cada caso. Los datos obtenidos se presentan en la siguiente tabla.

t (ºC)	0	50	100	150	200	250	300
V (cm^3)	20	23.65	27.30	30.98	34.60	38.25	42.00

a) ¿son t y V directamente proporcionales?, ¿tienen una relación lineal? Si es así hallar la ley de la función que expresa la relación "t-V".
b) Si la temperatura a la cual, y según la ley obtenida, se tendría ´cero´ volumen se la llama *´cero absoluto´*: ¿a cuántos ºC equivale el *´cero absoluto´*?
c) Si el recipiente usado para la experiencia puede, como máximo, contener 100 cm^3: ¿cuál es el dominio natural de esta función?
d) Calcular el volumen para: t_1 = -30ºC ; t_2 = 180ºC ; t_3 = 500ºC ; t_4 = 1500ºC .
e) Interpretar físicamente el significado de los coeficientes de la función que relaciona V y t.
f) Hallar la función inversa e indicar que nos informa esta función.

41.- Una compañía reembolsa a sus representantes $ 50 diarios por traslado y comida, más $5 por kilómetro recorrido. Si C representa el coste diario para la compañía en términos de ´x´, cantidad de kilómetros recorridos, completar la siguiente tabla y luego escribir una relación que exprese ´C´ en función de ´x´. Finalmente, graficar ´C ´.

x (kms)	C(x) ($)
$0 < x < 1$	50
$1 \leq x < 2$	55
$2 \leq x < 3$	
$3 \leq x < 4$	
$4 \leq x < 5$	
$5 \leq x < 6$	

42.- Un empleado dispone de dos opciones a puestos en una gran compañía (opción A y opción B). En ambos puestos el salario *por hora* (´w´) depende de un monto fijo más un plus por unidades producidas por hora. La relación que expresa el salario por hora (´w´) en términos de ´x´, cantidad de unidades producidas por hora es, en cada caso : $w_A(x) = 12,50 + 0.75\,x$ y $w_B(x) = 9,20 + 1.30\,x$

a) ¿Qué expresa la pendiente en ambos casos? Este sólo dato: ¿le permite concluir al empleado que puesto es el que más le conviene?
b) ¿Qué cantidad de unidades debería el empleado producir por hora para que le fuera indistinto tomar el puesto A que el B?
c) ¿En que rango debe encontrarse su rendimiento (cantidad de unidades por hora) para que le convenga tomar el puesto A?

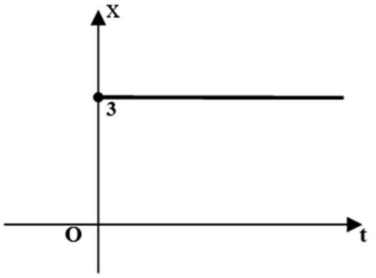
43.- El movimiento de un objeto que se desplaza en línea recta se puede expresar a través de una ecuación **x =f (t)**, donde ´x ´ representa el desplazamiento *(distancia dirigida ó medida con signo)* del objeto en cada instante ´t´ respecto de un punto fijo que se toma como punto de referencia *(origen)*. La función **f** que describe el movimiento se conoce como *función de posición* del objeto.

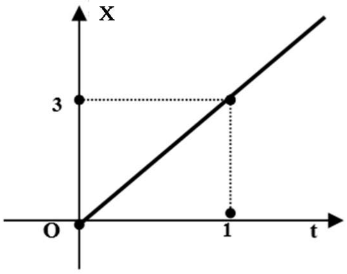
a) Un móvil m_1 que originariamente se encuentra en reposo comienza a desplazarse hacia arriba y a razón de 10 cm. cada dos segundos. Dar f_1, *función de posición* de m_1 con respecto a su punto de partida e indicar que representa ´físicamente´ la pendiente. Graficar en un sistema ´ t-x´.

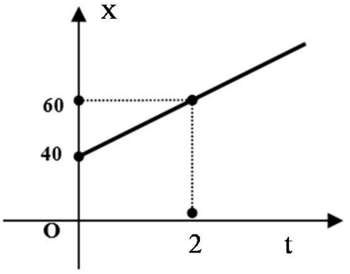
b) Un móvil m_2 que inicialmente se halla a 9 cm. por arriba de m_1, comienza a moverse en el mismo instante que éste y de igual manera. Dar f_2 , *función de posición* de m_2 con respecto al punto de partida de m_1. Graficar en el mismo sistema ´t-x´ en que se graficó f_1. A los 8 seg., ¿a qué distancia está m_2 de m_1? Justificar física y geométricamente la respuesta.

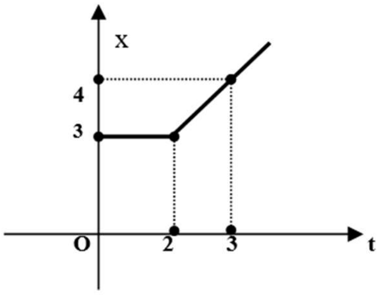
c) Un móvil m_3 que inicialmente se halla 3 cm. por debajo de m_1, comienza a moverse en el mismo instante que éste, también hacia arriba pero a razón de 6 cm por seg. Dar f_3 , *función de posición* de m_3 con respecto al punto de partida de m_1. Graficar en el mismo sistema ´t-x´ en que se graficó f_1. ¿Alcanza m_3 a m_1? , ¿en qué instante?, ¿a que distancia del punto de partida de m_1?, ¿cuántos cms. recorrió cada uno de los móviles hasta el momento del encuentro? A los 8 seg., ¿a qué distancia está m_3 de m_1?

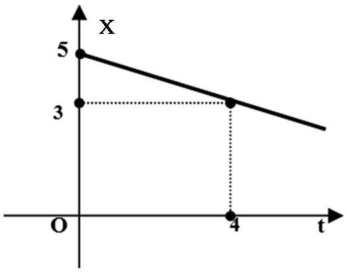
d) Los siguientes gráficos representan la *función de posición* (x) de un móvil con respecto al origen de coordenadas. En cada caso se pide expresar la función en forma verbal y a través de una ecuación.

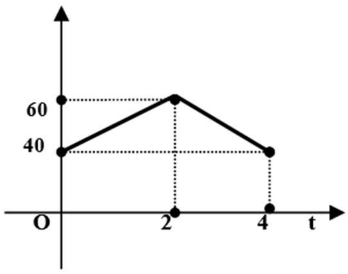












44.- Dada f (x) = 2x +3 con dominio en el (0;1].

a) extender f de modo que la nueva función así definida, que llamamos “p”, sea par. Luego graficar las siguientes funciones en un mismo sistema coordenado y teniendo en cuenta la tabla de transformación de funciones (parg. 48).

$F_1(x) = p(x)- 4$; $F_2(x) = p(x- 4)$; $F_3 (x)= - p(x)$; $F_4 (x)= - p(x)+3$; $F_5 (x) = | p(x) – 4|$

b) extender f de modo que la nueva función así definida (“i”) sea impar. Luego graficar las siguientes funciones en un mismo sistema coordenado y teniendo en cuenta la tabla de transformación de funciones (pag. 48).

$G_1(x) = i (x) +1$; $G_2(x) = |G_1(x)|$; $G_3 (x) = - i (x)$; $G_4 (x) = - | i (x)|$; $G_5 (x)= i (x) –p(x)$.

45.- Graficar las siguientes funciones y analizar sus propiedades. (usar transformaciones)

$y= |x|$; $y= |x| -2$; $y= |x-2|$; $y = |x+2| -1$; $y = - |x|$; $y = - |x| +3$; $y= |x| + x$;

$y= |x| + |x-2|$; $y= |x| + |-2x+2| +1$; $y= |x| + |x-3|+| 3x +3|$; $y = |x| - x + | 2x - 4|$

46.- Graficar en un mismo sistema coordenado y con dominio en [-1.5, 1.5] las siguientes funciones; analizar en cada caso las propiedades que presentan (monotonía, inyectividad, simetrías, signo definido).

a) $f(x) = x^n$ con $n= 2 , 4, 6$
b) $f(x) = x^n$ con $n= 1 , 3, 5$

47.- Para cada una de las siguientes funciones se pide:

i) Dominio, gráfico e imagen.
ii) Determinar propiedades: ceros, intervalos de monotonía, simetrías, signo.
iii) Hallar $Rp = \{ x \in D_f / f(x) >0 \}$
iv) Hallar $Rn = \{ x \in D_f / f(x) <0 \}$

a) $f(x) = x^2 -6x +5$
b) $f(x) = x^2 +2x +1$
c) $f(x) = x^2- 3x$
d) $f(x) = - x^2 -2$
e) $f(x) = -2 x^2 +x +1$
f) $f(x) = - x^2 + 3x - 4$

g) $f(x) = x^2 - 9$
h) $f(x) = x^2 + 9$
i) $f(x) = - x^2 + 9$
j) $f(x) = 3x - x^2$
k) $f(x) = (x^2 - 9) / (x-3)$
l) $f(x) = (x +2) . (x-3)$

m) $f(x) = (x+2) (4-x)$

q) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x , & x > 0 \\ -x^2-2x , & x \leq 0 \end{cases}$

o) $f(x) = \begin{cases} x +2 , & x < - 2 \\ 2 , & x = - 2 \\ x^2-4 , & x \in (-2 , 0] \end{cases}$

48.- Idem actividad (45) para las siguientes funciones.

a) $f(x) = | x^2 -6x +5|$
b) $f(x) = | x^2 -1| +1$
c) $f(x) = (x-1).| x |$
d) $f(x) = | - x^2 -2 |$
e) $f(x) = | x^2 -3x + 4 |$
f) $f(x) = | - x^2 +3x -4 |$

g) $f(x) = | x^2 - 9 |$
h) $f(x) = - | x^2 - 9 |$
i) $f(x) = |- x^2 + 9 | +1$
j) $f(x) = |x| + x^2$
k) $f(x) = (x^2 - 9) / |x-3|$
m) $f(x) = (x +2).|x-3|$

n) $f(x) = | x+2 | . (- x)$
o) $f(x) = x^2 - |2 x| +1$
r) $f(x)=\begin{cases} x . |x-1|, & x > 0 \\ x .|x |, & x \leq 0 \end{cases}$

49.- Para los polinomios que se indican a continuación se pide determinar los ceros y el conjunto $D^+ = \{x \in D_f / f(x) \geq 0 \}$.

(Se aconseja usar el método de los ´*valores de prueba*´ - pag. 106)

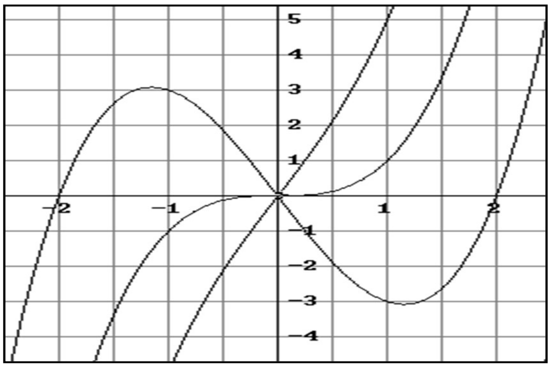
a) $f(x) = 3 (x-5) (x+7)$
b) $f(x) = x^3 -13 x +12$
c) $f(x) = -2 (x-1).(x+3)$
d) $f(x) = x^3 + x^2 -12 x$

e) $f(x) = x^4 + x^3 -12x^2$
f) $f(x) = x^3- 4 x^2 +5x -2$
g) $f(x) = x^4 + x^2 +6$
h) $f(x) = x^3 + 9x$

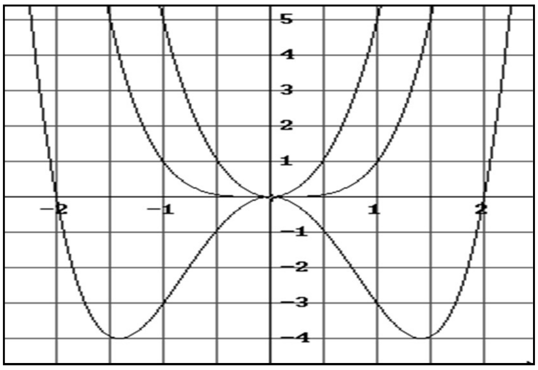
50.- Cada una de las leyes que siguen corresponde a una *familia de funciones.*
Para obtener *una función* de la familia basta dar un valor al parámetro ´k´.
En cada sistema a continuación se grafican 3 funciones de cada una de las familias.

a) Se pide analizar número y tipo de raíces de cada función y comportamiento de la misma para x muy grandes (+ ó -), según el grado del polinomio. Establecer luego a que familia y a que valor del parámetro corresponde cada gráfico.

i) $f(x) = x^3 + k\,x$; $k = -4, 0, 4$



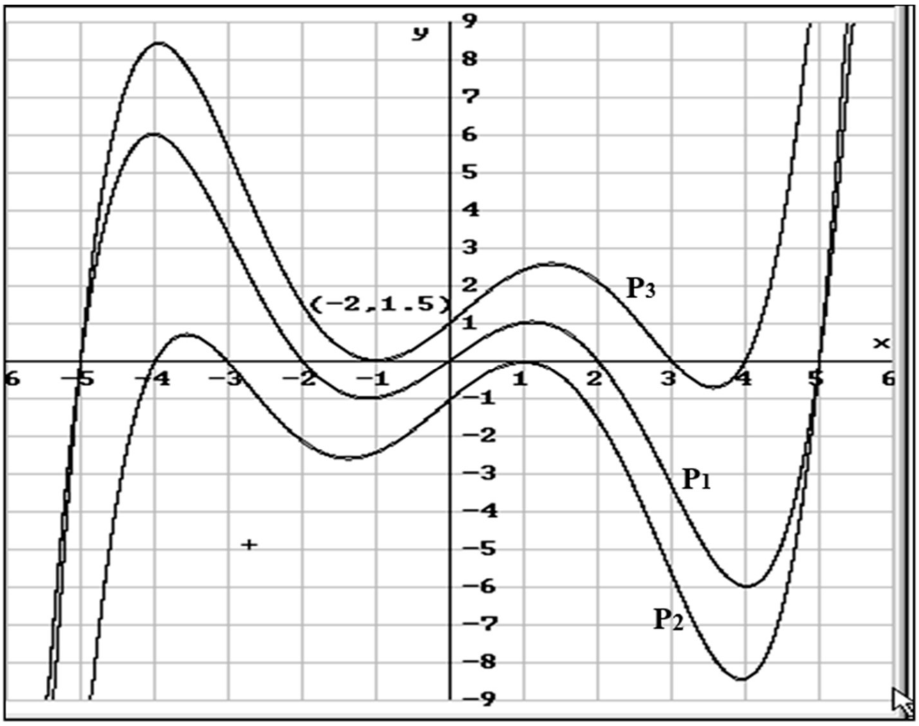
ii) $f(x) = x^4 + k\,x^2$; $k = -4, 0, 4$



b) Formular una conjetura o hipótesis relativa a la intersección de la gráfica con el eje x y el *carácter de la raíz.* (reales, complejos).

c) Formular una conjetura relativa a la multiplicidad de las raíces y el signo de la función en un entorno de las mismas, según esta sea par o impar.

51.- Las gráficas que se proponen a continuación corresponden a polinomios. Para cada una de ellas se pide: analizar si el grado del polinomio es *par o impar*, cual es el *menor grado* posible y proponer una factorización del mismo. Verificar.



52.- Graficar en un mismo sistema coordenado las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^{1/n}$ con n= 2 , 4, 6

b) $f(x) = x^{1/n}$ con n= 1 , 3, 5

53.- Graficar las funciones y analizar sus propiedades. (usar transformaciones)

$y_1 = \sqrt{\mathbf{x}} + 2$; $y_2 = -\sqrt{\mathbf{x}}$; $y_3 = \sqrt{\mathbf{x+2}}$;

$y_4 = \sqrt{\mathbf{x}} - 2$; $y_5 = |\sqrt{\mathbf{x}} - 2|$; $y_6 = \sqrt{|\mathbf{x}|}$

54.- Considerando en todos los casos Codominio f = Im f hallar, si existe, la función inversa *g* de cada una de las funciones que se indican a continuación. Si no existe restringir convenientemente el dominio y hallar g_r, *función inversa* de la función restringida "f_r". Graficar ambas.

a) $f(x) = x^2 - 4$
b) $f(x) = x^2 + 4$
c) $f(x) = x^3 - 8$
d) $f(x) = (x-1)^2$
e) $f(x) = (x-1)^2 + 2$
f) $f(x) = \sqrt{x+4}$
g) $f(x) = \sqrt{x} + 4$
(*) Verificar en cada caso que $f \circ g = id$

h) $f(x) = -(x-8)^{1/3}$
i) $f(x) = -\sqrt{x} + 2$
j) $y = \sqrt{1-x^2}$
k) $y = \sqrt{1-x^2} + 2$
l) $y = \sqrt{1-(x-3)^2}$

55.- Dada $f(x) = \sqrt{1+k.x^2}$ estudiar propiedades de esta función (dominio, imagen, simetrías, signo, existencia de inversa, considerando restricciones si fuera necesario) para $k>0$; $k=0$ y $k<0$.

56.- Para cada una de las funciones a continuación se pide:

i) Dominio, asíntotas (si existen) gráfico e imagen.
ii) Determinar propiedades: ceros, intervalos de monotonía, simetrías, signo.
iii) Hallar $R_p = \{x \in D_f \,/\, f(x)>0\}$ y $R_1 = \{x \in D_f \,/\, f(x) \le 1\}$ (gráfica y analíticamente)
iv) Hallar, si existe, la *función inversa*.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$
b) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$
j) $f(x) = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2x+1}{x}$
k) $f(x) = \dfrac{x^2 - x.(x-2)}{x-1}$
l) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x-1}{x^2-1}$
m) $f(x) = \left| \dfrac{2}{x-2} \right|$
n) $f(x) = \left| \dfrac{-1}{x} + 2 \right|$
o) $f(x) = \left| \dfrac{x+4}{x-2} \right|$

e) $f(x) = \left| \dfrac{-1}{x} \right| - 2$
f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$
g) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2-1}$
h) $f(x) = \left| \dfrac{2}{x-2} \right| + 2$
i) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} . \dfrac{x-3}{x-1}$
p) $f(x) = \dfrac{-1}{x} + 2$
q) $f(x) = \dfrac{4}{x-1} - 2$

c) $f(x) = \dfrac{6x+1}{6+3x}$
d) $f(x) = \dfrac{4x+2}{2x+1}$

57.- a) Dada $f(x) = 10^3 . \left(\dfrac{48-4x}{x+6} \right)$; se pide graficar f y hallar $S_{4000} = \{x \in R \,/\, f(x) \ge 4000\}$.

b) Al investigar el poder bactericida de un compuesto se observa que si "P" representa el número de bacterias presentes en la muestra "t" horas después de agregado el bactericida, entonces $P = 10^3.[\,48-4t \,/\, (t+6)]$. Se pide :

i) Número de bacterias al momento de agregar el bactericida (P_o).

ii) Intervalo de tiempo en que $P > P_o/2$. Tiempo en que $P = P_o/2$. Este tiempo se llama "t medio" y se indica $t_{1/2}$ (¿porqué ?) .

- iii) ¿Diría Ud. que para "$t = 2.\ t_{1/2}$" se eliminan todas las bacterias? Si así fuera, ¿qué tipo de relación habría entre $\Delta P = P_o - P$ y t ? .
- iv) *Calcule* el tiempo efectivamente requerido para eliminar todas las bacterias. ¿ Son $\Delta P = P_o - P$ y t , *directamente proporcionales* ? .
- v) En el prospecto dice que el compuesto conserva constante su poder bactericida por espacio de 12 hs. ¿Es esto cierto?,¿porqué? Relacionar los items anteriores.
- vi) Dar la *función* P que define la ecuación del bactericida. Su gráfica.

c) Para otro bactericida se halla que $p = 10^3. [\ 24 - 4t / (t+6)] + 4000$. Se pide:

- i) Número de bacterias al momento de agregar el bactericida (p_o).
- ii) Intervalo de tiempo en que $p \geq p_0/2$. Tiempo en que $p = p_0/2$
- iii) Tiempo requerido para que quede una única bacteria.
- iv) Tiempo requerido para eliminar todas las bacterias si el compuesto conservara su poder bactericida indefinidamente.
- v) En el prospecto dice que el compuesto conserva un poder bactericida *efectivo* por espacio de 4 días. ¿Cuántas bacterias alcanza a *eliminar* el bactericida?.
- vi) Dar la *función* p que corresponde al bactericida. Su gráfica.
- vii) ¿Cuál de los dos bactericidas usaría?

58.- Dadas las funciones $f(x) = 2^x$; $e(x) = e^x$; $h(x) = 3^x$, se pide:

- a) Establecer cuál es la relación de orden entre ´f´, ´e´ y ´h´ para los x´s / $x > 0$.
- b) Establecer cuál es la relación de orden entre ´f´, ´e´ y ´h´ para los x´s / $x < 0$.
- c) Graficar ´f´ , ´e´ y ´h´ en un mismo sistema coordenado.
- d) Graficar en un mismo sistema coordenado $y = f(x)$; $y = - f(x)$; $y = f(-x)$ e $y = 1/f(x)$.
- e) Graficar $y = f(kx)$ en un mismo sistema coordenado para $k>0$; $k=0$ y $k<0$.
- f) Dar gráfico e imagen de:

  - i) $y = 2^x + 1$
  - ii) $y = 2^{(x-2)}$
  - iii) $y = 2e^x$
  - iv) $y = -2e^x - 1$
  - v) $y = e^{2x} . e^3$
  - vi) $y = e^{-2x}$
  - vii) $y = 2^x / 3^x$
  - viii) $y = 5 - 3(1 + e^x)$
  - ix) $y = (e^{-x})^3$
  - x) $y = (e^{-x})^{-3}$

59.- Con base a la gráfica de $y = e^x$ escribir la ecuación de la gráfica que se obtiene de:

- a) Desplazarla dos unidades hacia abajo.
- b) Desplazarla dos unidades hacia la izquierda
- c) Reflejarla respecto del eje x.
- d) Reflejarla respecto del eje y.
- e) Reflejarla respecto del eje x y, a continuación , respecto del eje y.
- f) Reflejarla respecto de la recta $y = x$.

60.- Hallar la función exponencial de fórmula $\mathbf{y = k\, a^x}$ si se sabe que pasa por:

a) P (1,6) y Q(3,24) ; b) P (0,3) y Q(2, 3/4) ; c) P (0,-2) y Q(1,-6)

61.- i) Dar dominio, gráfico e imagen de:

a) $y = \log x + 10$
b) $y = \log (x + 10)$
c) $y = | \log (x + 10) |$
d) $y = | \log (x + 10) | -1$
e) $y = \mathbf{\ln \; e^{(x-3)}}$
f) $y = \mathbf{e^{\ln(x-3)}}$
g) $y = e^{\ln 5}$
h) $y = e^{x \ln 5}$
i) $y = e^{5 \ln x}$
j) $y = e^{- \ln x}$
k) $y = e^{-2 \ln x}$
l) $y = \ln (2.e^{x})$

ii) Hallar (si existen) las funciones inversas de las funciones del item anterior . En todos los casos considerar codominio = imagen.

iii) Si $f(x) = e^{x}$ graficar en un mismo sistema f ; f^{-1} y 1/f ; concluir

luego acerca de si f^{-1} y 1/f guardan alguna relación entre sí.

iv) Si $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = \ln x$ indicar quienes son $f\circ g$ y $g\circ f$ y si $f\circ g = g\circ f$.

v) Resolver las siguientes ecuaciones para la incógnita ´x´ :

$e^{x-5} = 1$; $2^{x-5} = 3$; $2^{x} = e^{ax}$; $e^{ax} = 2\, e^{bx}$ $(a \neq b)$;

$\log (x-2) = 2$; $\log x^3 = 9$; $\log x + \log (x-3) = 1$.

vi) Cuando se habla de *´crecimiento exponencial´* lo que se quiere expresar es que el crecimiento es *muy rápido*. Para constatar esto halle el menor entero ´x´ para el que $e^{x} > 10^6$.

62.- Para pensar:

a) dadas f y g tales que $f(x) \approx g(x)$ $\forall x$;
¿ qué se puede decir de f(x)/g(x) ? ¿Y si g(x) es mucho mayor que f(x)?

b) la siguiente tabla presenta las razones entre **ln x** y $\sqrt{\mathbf{x}}$;
¿ qué información nos da esta tabla?

x	5	10	100	500	1.000	10.000	100.000
$\ln x / \sqrt{\mathbf{x}}$	0,72	0,73	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

63.- a) Se conoce que en una *disolución acuosa* de cualquier especie química la concentración de hidronios $[H_3O^+]$ y de oxidrilos $[OH^-]$ no son independientes una de otra., sino que satisfacen la *fórmula básica* :$[H_3O^+] . [OH^-] = 10^{-14}$; no siendo necesariamente $[H_3O^+] = [OH^-]$.

Esto permite distinguir tres tipos de soluciones:

NEUTRAS: $[H_3O^+] = [OH^-] =$ ....

ACIDAS: $[H_3O^+] > [OH^-]$; o sea $[H_3O^+] >$ ....

BASICAS ó ALCALINAS: $[H_3O^+] < [OH^-]$; o sea $[H_3O^+] <$ ....

(*) Completar con un *número* la línea de puntos, según la *fórmula básica* y trabajando *algebraicamente* con ella.

b) Experimentalmente se ha podido establecer que el rango de variación tanto para $[H_3O^+]$ como para $[OH^-]$ es el intervalo $[10^{-14} ; 1]$. Para poder citar y trabajar estas cantidades exponenciales en forma más simple y práctica, Sorensen definió la función "p" como *"menos el logaritmo decimal de........"*.

Así: $pH = - \log [H_3O^+]$ y $pOH = - \log [OH^-]$.

(*) Indicar si los siguientes valores pueden ser concentraciones de H_3O^+ en una solución acuosa: 5.10^{-14}; $0.5.10^{-14}$; 35.10^{-7} ; 7.10^{-18} ; 0.3 ; $0.02 .10^{-2}$.
En caso que lo sean hallar su pH.

(*) Hallar (¡matemáticamente!) el rango de variación pH y pOH y determinar para que rango de pH la solución es ácida (básica) .
Demostrar que $pH + pOH = 14$

(*) Calcular la concentración de $[H_3O^+]$ en una solución de $pH = 8.5$

(*) Hallar una expresión para calcular pH si $[H_3O^+] = a .10^{-14}$.

64.- El número de bacterias (y) en un cultivo en función del tiempo ´t´ está dado por: $y = P_o\, e^{0.25\, t}$.

a) Discutir si esta ecuación define *función* y, si lo hace, discutir la siguiente afirmación $Im\, f = [\, P_o ; +\infty)$ (¡considerar las restricciones propias del *modelo*!!).
b) Hallar cantidad de bacterias en el instante $t= 0$.
c) Hallar cantidad de bacterias en el instante $t= 2$, si inicialmente hay 2000 bacterias.
d) Hallar instante ´t´ en que la cantidad de bacterias es el doble de la inicial.
e) Hallar instante ´t´ en que la cantidad de bacterias es la mitad de la inicial.

65.- MODELO EMPÍRICO: *si no se conoce la relación que liga a dos magnitudes involucradas en un fenómeno natural se puede, a partir de* ***datos empíricos****, construir un* ***modelo matemático*** *del mismo; o sea, dar una función que dentro de ciertos márgenes de razonabilidad describa ´matemáticamente´ la relación entre las variables intervinientes. Básicamente se trata entonces de dar la curva que mejor ´* ***se ajuste´*** *a los datos, en el sentido de que sea la que mejor ´capture´ la tendencia básica de los puntos experimentales.*

Con el objetivo de hallar una *función* que informe sobre la masa presente ´m´ de un isótopo de sodio, ^{24}Na, después de ´t horas´ y a partir de una cantidad inicial dada, se realiza una experiencia en la que se va determinando y registrando la cantidad de masa al cabo de ciertos intervalos de tiempo. Los resultados de tal experiencia se presentan en la siguiente tabla:

t (hs.)	0	15	30	45	60	..	*n* . 15	..¿ t ?
m (g)	5	½ m(0)	½ m(15)	½ m(30)	½ m(45)	..	¿.....?	..¿--?
m (g)	5	2,5	1,25					
m (g)	5	½ .5				..		..

a) Graficar los puntos. En el caso que Δm y Δt fueran directamente proporcionales, ¿qué tipo de curva ajustaría estos puntos ?; ¿qué tipo de modelo sería este?.¿Son *directamente proporcionales*?

b) Tomando como referencia los puntos *datos* (30; m(30)) y (60; m(60)) dar *un modelo lineal* para la relación masa-tiempo del isótopo de sodio estudiado. ¿Proporciona este modelo un ´buen ajuste´ de los datos experimentales?. Otro modelo lineal, ¿ajustaría mejor ?, ¿ porqué ? .

c) Completar el último renglón de la tabla y concluir una ley no lineal para la función buscada. Nota: para poder inducir la ley pedida, al completar la tabla deberá dejar la expresión *tal cual va quedando*, *no realizar* las operaciones que quedan en cada caso. Verificar luego la ley obtenida calculando con ella alguno de los valores de la tabla . Graficar la función y escribir en una oración qué pasa con el isótopo de sodio a medida que transcurre el tiempo; con qué *particularidad* pasa.

Calcular la masa a las 10 hs, 25 hs ; 50 hs . (en este caso Ud. está ´*interpolando*´ valores) .

Calcular la masa a las 75 hs , 80 hs ; 100 hs . (en este caso Ud. está ´*extrapolando*´ valores)

(*) Interpolar : estimar un valor entre valores observados.
Extrapolar : predecir un valor fuera de la región de las observaciones.

(*) Observación: este segundo modelo, ´**modelo exponencial**´, ajusta los datos experimentales mucho mejor que cualquier modelo lineal. Más aún, es el modelo que mejor ajusta.

Experimentalmente se comprueba que el modelo matemático que mejor describe procesos de descomposición de sustancias químicas es el **modelo exponencial**.

66.- El radio se descompone según la fórmula $\mathbf{y = k_o\, e^{-0{,}038\, t}}$ donde k_o es la cantidad inicial e ´y´ es la cantidad que queda al cabo de ´t´ siglos.

a) Hallar el tiempo de ´*vida media*´ ($t_{1/2}$) del radio; o sea, el tiempo requerido para que se descomponga la mitad de la cantidad presente.

b) Si k_o=10 mg , indicar cuanto tiempo transcurrirá para que queden: 5 ; 2,5 ; 1,25 y 0 (mg.)

c) Graficar la función e indicar sobre la gráfica los puntos obtenidos en el item (b).

d) Demostrar que la expresión general para “$t_{1/2}$” en una fórmula del tipo

$$y = \alpha \,.\, e^{\beta t}\text{, es: } t_{1/2} = \frac{-\ \ln 2}{\beta}.$$

Discutir para que *tipo de exponencial* es válida esta expresión.

67.- Hallar la expresión que permita calcular la cantidad (y) de sustancia radiactiva que queda al cabo de ´t´ horas si se sabe que: es de tipo exponencial, al comienzo se tienen 10 mg de la sustancia y se desintegra de tal forma que se reduce a la mitad cada tres horas.

68.-

Hallar la función inversa de la función encontrada en la **Actividad (67)** y explicar qué informa la misma.

Graficar ambas funciones.

Hallar una función para la cantidad ´que se desintegra´. Hallar su inversa. Graficarlas.

69.- Para cada una de las siguientes funciones se pide:

i) Dominio, gráfico e imagen.
ii) Determinar propiedades: ceros, intervalos de monotonía, simetrías, signo
iii) Hallar $R_p = \{ x \in D_f \,/\, f(x) > 0 \}$
iv) Dar un dominio y codominio donde la función resulte biyectiva y luego hallar la función inversa.

a) $f(x) = 2 \text{ sen } x$
b) $f(x) = \text{sen } (2x)$
c) $f(x) = \text{sen } (0,5\, x)$
d) $f(x) = \text{sen } x + 1$
e) $f(x) = 0,5 \text{ sen } x + 1$
f) $f(x) = \text{sen } (x + \pi/2)$

g) $f(x) = 2 \cos x$
h) $f(x) = -2 \cos x$
i) $f(x) = \cos^2 x$
j) $f(x) = | \text{sen } x |$
k) $f(x) = - | \text{sen } x |$
l) $f(x) = - | \text{sen } x | + 0,5$

p) $f(x) = | \text{sen } x | + \text{sen } x$

q) $f(x) = \begin{cases} \text{tg } x \ , & 0 < x < \pi/2 \\ | \text{tg } x |, & -\pi/2 < x \leq 0 \end{cases}$

r) $f(x) = \begin{cases} 3 \text{ sen } x \ , & x > \pi/2 \\ 0 \ , & x = \pi/2 \\ -3 \text{ sen } x \ , & x < \pi/2 \end{cases}$

70.- Dadas $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$;
indicar ley y dominio de : f+g ; f /g ; $f \circ g$; $g \circ f$

71.- Dadas f y g hallar (si existen) ley y dominio de **$f \circ g$** y **$g \circ f$**

a) $f(x) = \text{sen } x$; $D = [0; 2\pi]$ $g(x) = \sqrt{x}$
b) $f(x) = \log (2x-8)$ $g(x) = x^2 + 3x$
c) $f(x) = 1/ x$ $g(x) = \cos x$
d) $f(x) = \text{arc sen } x$ $g(x) = x - 2$
e) $f(x) = \ln x$ $g(x) = x^2 - 4$
f) $f(x) = \ln x$ $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
g) $f(x) = \sqrt{\ln x}$ $g(x) = x+2$

72.- Hallar *f*; *g* y *h* tal que : **F = *g* ∘ *f*** y **G = *h* ∘ *g* ∘ *f*.**

a) $F(x) = (x - 9)^5$
b) $F(x) = \text{sen } (x^{½})$
c) $F(x) = 1 / x\text{-}3$
d) $F(x) = \ln^2 x$
e) $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$
f) $F(x) = \sqrt{\ln x}$
g) $F(x) = e^{\cos x}$.

h) $G(x) = \text{sen } \sqrt{x^2 - 4}$
i) $G(x) = \ln (x^2 + 4)^3$
j) $G(x) = \text{arc sen } (\cos x^2)$
k) $G(x) = \cos (1/ (x\text{–}2))$
l) $G(x) = 1 / \cos^2 x$
m) $G(x) = 1/ \sqrt{x^2 - 4}$
n) $G(x) = e^{\cos (\ln x)}$

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS

73.- En un estanque en calma, se deja caer una piedra produciendo ondas en forma de circunferencias concéntricas. El radio (en pies) de la onda externa viene dado por $r = r(t)$ con $r(t) = 0{,}6.\ t$, donde ´t´ es el tiempo en segundos transcurrido desde que la piedra toca el agua. Si con A se indica el área del círculo en función del radio ´r´ obtener e interpretar la función "$A \circ r$" .

74.- Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 96 Pies /seg., entonces su altura después de ´t´ segundos es $y = 96\,t - 16\,t^2$ (en pies). Determinar la altura máxima que alcanza la pelota y en qué instante toca el suelo.

75.- La siguiente función da el tiempo ´ t ´ en que se disuelven ´m´ gramos de soluto al poner 20 g. del mismo en contacto con el solvente:

$$\mathbf{t = 3.ln(\frac{40}{40 - 2\,m})} \quad ; \quad [\,t\,] = \text{hs.} \ ; \ [m] = g$$

Se pide:

a) dominio natural de la función que comprende esta ecuación. (*¡cuidado!: $t \geq 0$*)
b) ¿En qué tiempo se disuelven 10 g. (18 g) ?; ¿cuántos g. de soluto se disuelven en 9 hs. (15 hs) ?
c) hallar la función inversa e informar acerca de lo que permite calcular esta función.

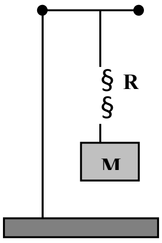
76.- Se coloca un recipiente con agua sobre el fuego. En un principio la siguiente ecuación da la temperatura ´Q´ del agua en cada instante ´ t ´: $Q = 20 + 10\ t$; [Q]= ºC ; [t] = minutos.

El agua se deja hervir 2 minutos y luego se retira del fuego. En ese preciso instante comienza a enfriarse según la ley: $\mathbf{Q = 10 + \frac{90}{t + \alpha}}$. Considerando que todo el proceso es un proceso ´continuo´, es decir, que no se observan ´saltos´ de temperatura, se pide:

a) Determinar la temperatura del agua en el instante que se empieza a calentar y el instante ´t´ en que el agua comienza a hervir.
b) Calcular el valor de la constante "α" teniendo en cuenta la ´continuidad´. del proceso.
c) Dar la función que describe todo el proceso desde que se coloca el recipiente sobre el fuego. Graficar esta función.
d) Hallar (si existe) el instante t* en que la temperatura del agua sería igual a la inicial.
e) Hallar (si existe) el instante t** en que el agua se congelaría si no se altera ninguna de las condiciones del proceso.
f) ¿Qué sucede con la temperatura para tiempos ´muy grandes´ ?; ¿qué interpretación física puedo dar a este resultado?.

77.- Si de un resorte ´R´ se suspende una masa (M), el mismo comienza a oscilar con un período ´p´ que se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\mathbf{p} = 2\pi \, . \sqrt{\frac{\mathbf{F} \, . \, \omega + \mathbf{M}}{\kappa}}$$



F = cte universal (F>0)
ω = masa del resorte
κ = cte del resorte (κ >0)
p = tiempo requerido para una oscilación ´completa´.

a) Analizar si esta ecuación define función.
b) Si hacemos T= p^2, expresar T como función de M (T=*f*(M)) e identificar el *tipo de función* de que se trata. Indicar dominio natural y hacer un bosquejo del gráfico de *f*
c) Dado un resorte de masa ω = 2 g se realiza la siguiente experiencia: se suspende un cuerpo de masa M y se lo deja realizar 100 oscilaciones completas. Se mide el tiempo ´ t_{100}´ que tarda en realizar las 100 oscilaciones. Con este dato se obtiene ´p´, período de oscilación para la masa M. Con p se obtiene T.
¿Cuántas veces hay que realizar la experiencia para poder graficar T=*f*(M)?. ¿Porqué?

M	nro oscilacions	t (seg)	p	T	(M ; *f*(M))
10 g	100	67, 5			
20 g	100	73, 5			

d) Graficar T versus M. Hallar la ley de *f*.
e) Hallar κ , constante del resorte.

78.- *El método de ´fechado con radiocarbono´ se basa en el hecho de que el isótopo radioactivo del carbono* ^{14}C *tiene una vida media conocida de cerca de 5700 años. La materia orgánica viva mantiene un nivel constante de* ^{14}C *al ´respirar´ . Así, el porcentaje de este isótopo presente en los organismos vivos es el mismo porcentaje que el existente en el aire. Pero, al morir un organismo, éste deja de metabolizar carbono y comienza el proceso de decaimiento radioactivo; o sea, se comienza a agotar su contenido en* ^{14}C. *Dado que la fracción de* ^{14}C *en el aire es prácticamente constante a través del tiempo se puede entonces determinar la antigüedad de una muestra con sólo medir su contenido en* ^{14}C *y compararlo con el contenido de una muestra actual.*

El carbono extraído de un antiguo cráneo recién desenterrado contiene el 63 % de ^{14}C con respecto del carbono extraído de un hueso actual. ¿Qué antigüedad tiene el cráneo? (Recordar: $\mathbf{y = y_o \, . \, e^{\beta t}}$ con y = cantidad de sustancia que queda al cabo de ´t´ años , y tener en cuenta que los datos que se dan son ´vida media´ y que, $y = 63\% \, y_o$)

79.- La población de cierta especie en un ambiente limitado es :

$$P = \frac{100.000}{100 + 900 \; e^{-t}} \, . \text{ (´t´ se mide en años)}$$

a) ¿ Cuál es la población inicial (t=0) ?
b) ¿Cuánto tarda en llegar a 900 ? ¿En llegar a 1000?
c) Verificar que P(t) < 1000; $\forall$ t y que P(t) $\approx$ 1000 para t *´muy grandes´*. ¿Qué se puede concluir de estos dos datos?

80.- La EPE (Empresa Provincial de la Energía) ha decidido tomar nuevos empleados. Los aspirantes deben rendir una prueba de selección donde se les da el siguiente problema:

Encontrar la función que permite calcular el importe de la factura de luz según los kilowats (kw) consumidos en un bimestre, para casas de familia, si el mismo resulta de la suma de los montos que se indican a continuación: (datos al 1/4/93)

a) un "monto fijo bimestral" , (MFB), de $11,66.
b) un "monto por consumo de kw", (MC), que se calcula a partir de la TABLA I
c) un monto por "Tasa de Alumbrado Público", (TAP); según TABLA II
d) un monto en concepto de IVA: 18 % de [MFB + MC + TAP]
e) monto por otros impuestos: 3,6 % de [MFB + MC + TAP]

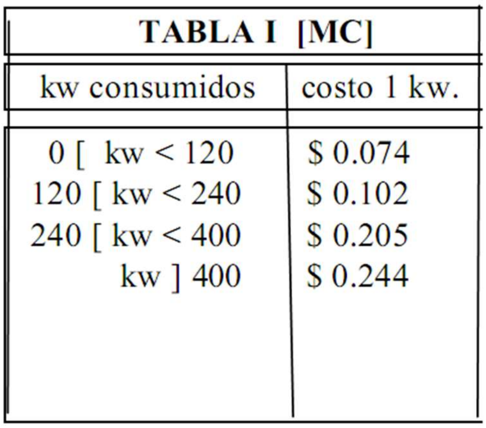


TABLA I [MC]

kw consumidos	costo 1 kw.
0 [kw < 120	$ 0.074
120 [kw < 240	$ 0.102
240 [kw < 400	$ 0.205
kw] 400	$ 0.244

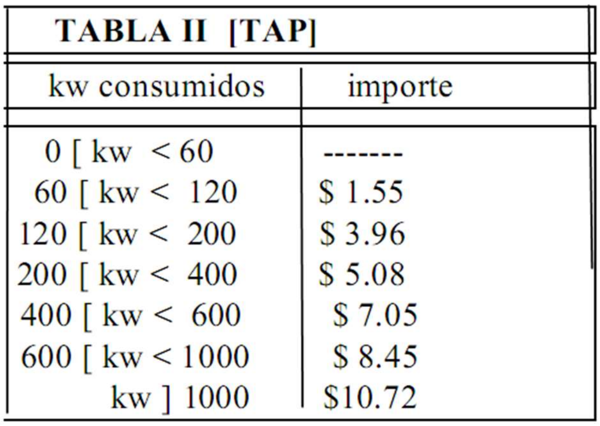


TABLA II [TAP]

kw consumidos	importe
0 [kw < 60	-------
60 [kw < 120	$ 1.55
120 [kw < 200	$ 3.96
200 [kw < 400	$ 5.08
400 [kw < 600	$ 7.05
600 [kw < 1000	$ 8.45
kw] 1000	$10.72

2— Límite y Continuidad

2.1 Límite de una función en un punto

Dada una función **y =f(x)** y un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}$, en este párrafo planteamos y contestamos el siguiente interrogante:

¿ cómo se comporta f(x) cuando x *se acerca* a x_0 ?

pregunta que simbolizamos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ldots . \ ?\ldots .$$

Ejemplo 1: $f(x) = x+3$; $x_0 = 1$

- ¿cómo se comporta f(x) cuando "x" se *acerca* a 1?

$$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$$

- Por simple inspección de la ley vemos que, si x se *acerca* a **1** entonces f(x)=x+3 se *acerca* a **4**.

luego escribimos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

Ejemplo 2: $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$; $x_0 = 1$

- f (1) no existe; luego, tiene aún más sentido la pregunta: *¿ cómo se comporta f(x) cuando x se acerca a 1?*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$$

En este caso no podemos ver, por simple inspección, qué pasa con f(x) cuando x se acerca a **1**.

¿Qué hacemos?: calculamos valores y tratamos de detectar un comportamiento tendencial *para los f(x).*

x	**f(x)**
0	3
0.3	3.3
0.6	3.6
0.9	3.9
0.99	3.99
0.999	3.999
.....	....
$\downarrow$ **1**	$\downarrow$ **4**

x	**f(x)**
2	5
1.6	4.6
1.3	4.3
1.1	4.1
1.01	4.01
1.001	4.001
.....	.....
$\downarrow$ **1**	$\downarrow$ **4**

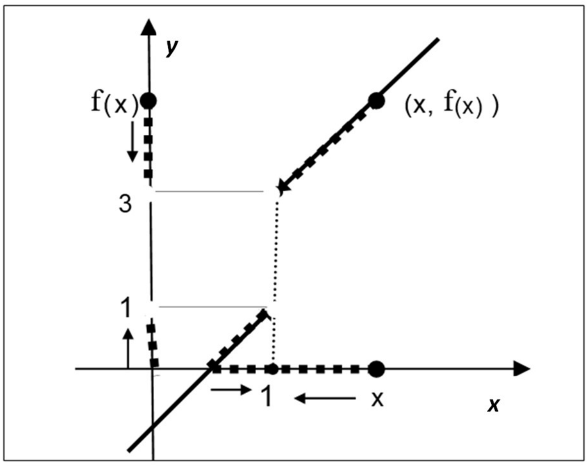
Parece que, si **x** se *acerca a* **1** entonces **f (x)** se *acerca* a **4.** → $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$

Ejemplo 3:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \ ; & x < 1 \\ 2x + 1 \ ; & x > 1 \end{cases}$$

- f (1) no existe; luego, nuevamente tiene sentido la pregunta: → $\lim_{x \to 1} f(x) = \ ?$

- ¿qué hacemos en este caso?:



Graficamos f y tratamos de detectar un comportamiento tendencial para los f(x). Así vemos que si:

$x \to 1 \ (x<1)$; entonces $f(x) \to 1$
$x \to 1 \ (x>1)$; entonces $f(x) \to 3$

- Del gráfico observamos que cuando *x* → 1; *f(x) no tiene un comportamiento ´definido´;* no se acerca *´a un único número´.*

- La gráfica presenta un **<u>salto</u>** en x=1*;* de allí que para x → 1 el *comportamiento* de f(x) es distinto según los x se acerquen a 1 por la *izquierda* o lo hagan por la *derecha.*

- En este caso decimos que: $\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$ (no existe el limite de f cuando x tiende a 1)

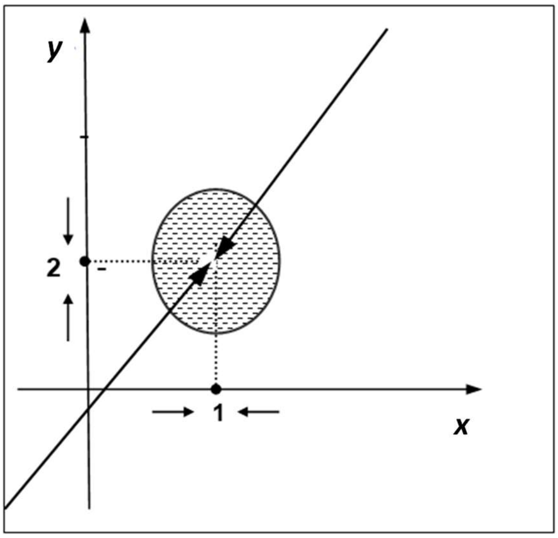
Ejemplo 4:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 0.1 \ ; & x < 1 \\ 2x + 0.1 \ ; & x > 1 \end{cases}$$

- f (1) no existe; luego, nos preguntamos: *¿ cómo se comporta f(x) cuando x se acerca a 1?*

lim f(x) = ?
x→1

- ¿qué hacemos en este caso?: Graficamos f y observamos el comportamiento tendencial de los f(x). Así apreciamos que, si x → 1 entonces f(x) se acerca a 2.



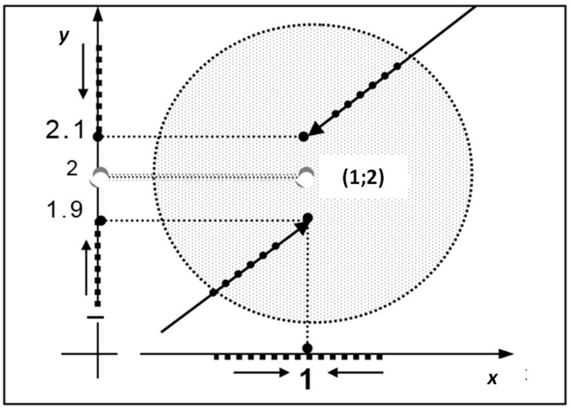
* ¿ Tendrá f un comportamiento definido, tal cual parece a simple vista ?, ¿ o existirá, como en el ej. 3, un salto que impida a los f(x) acercarse a un único número?.

* Dicho de otra manera: ¿ podrán los f(x) acercarse a 2 tanto como quieran ?

* Para contestar este interrogante graficamos

- HACEMOS un ZOOM con CENTRO en **(1; 2)**

- ¿qué observamos ahora?, que:
  si x → 1 (x <1); entonces f (x) → 1.9
  si x → 1 (x >1); entonces f (x) → 2.1



- *conclusión:* cuando x → 1; *f(x) no tiene un comportamiento ´definido´;* no se acerca *´a un único número´.*

- En este caso también tenemos un salto en x=1, de allí que el comportamiento de f (x) sea distinto según el lado por el cual x tienda a 1. La diferencia con el caso anterior está en que aquí , al trabajar con escalas usuales, el salto puede pasar desapercibido. Luego:

∄ **lim f(x)** (no existe el limite de f cuando x tiende a 1)
x→1

OBSERVACIONES:

1. Los ejemplos analizados muestran que la simple proximidad de f(x) a un cierto número no basta para que tal número sea límite de la función. Resulta evidente que para que ello ocurra debe pasar algo más: que los f(x) se aproximen tanto como quieran a dicho número; que no exista ninguna ´barrera´ que les impida llegar a él.
2. Así, con la expresión "f(x) tiene comportamiento definido"; a partir de ahora entendemos, " f (x) se acerca a un único número y lo hace tanto como quiera."

3. Llegado a este punto surgen dudas acerca de los ejemplos 1 y 2; en ambos casos vimos que si $x \to 1$ entonces $f(x) \to 4$ y concluimos que el límite era 4. Pero, ¿no pasará aquí lo mismo que en el último ejemplo y, como en este caso, el salto es tan pequeño que no lo pudimos apreciar en razón del método usado?.
   Así, si hacemos un "zoom" en el gráfico de "f " alrededor del punto (1;4) (*);
   ¿no aparecerá un salto y tendremos en consecuencia que el límite *no existe* ?.

(*) *Cabe aclarar aquí que si al aplicar el zoom no visualizamos un "salto" podemos continuar ampliando la imagen a través de seguir aplicando el zoom. Si tal fuera el caso, ¿qué pasa si no visualizamos un salto aún después de varias ampliaciones?; ¿significa esto que no existe salto ?.*
En circunstancias como estas debemos extremar los cuidados ya que pudiera ser que el salto fuera infinitamente pequeño e imposible de capturar con un dispositivo graficador. A lo sumo podrá aumentar nuestra confianza de que el salto no existe, pero nunca, por este camino, alcanzaremos la certeza de ello. Que no existe salto o, equivalentemente, que existe límite, sólo podremos asegurarlo si podemos demostrar este supuesto.
Pero: ¿cómo demostramos un límite ?. Para ello necesitamos precisar la definición de límite.

RESUMEN:

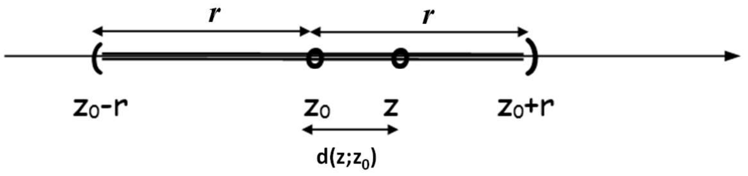
• $\lim\limits_{x \to xo} f(x) =$	¿qué comportamiento tiene f(x) cuando x se *acerca* a x_0 ?
• $\lim\limits_{x \to xo} f(x) = \mathbf{L}$	cuando x se *acerca* a x_0 , f(x) tiene un comportamiento definido; se acerca *tanto como quiera* al único número **L.**
• $\nexists \lim\limits_{x \to xo} f(x)$	cuando x se *acerca* a x_0 , f(x) **no** tiene un comportamiento definido; **no** se acerca, *tanto como quiera*, a un único número.

DEFINICIÓN (´coloquial´ de límite de una función en un punto)

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to x o} f(x) = L}$	$\lim\limits_{x \to xo} f(x) = \mathbf{L}$ ⇔ cuando x se acerca a x_0 , f (x) se acerca al único número **L** ; tanto como quiera, sin importar lo que pasa en x_0.

➢ En lo que sigue procedemos a ´traducir´ esta definición al lenguaje ´matemático´. Para ello necesitamos definir el concepto de: entorno de un punto.

DEFINICIÓN:

E (z₀ ; r) Entorno de z_0 de radio r	$\mathbf{E\,(z_0 : r) = \{ z \in \Re \;/\; d(z;\, z_0) < r \}}$ 

DEFINICIÓN:

E* (z₀ ; r) Entorno reducido de z_0 de radio r	Es el conjunto obtenido cuando a un entorno se le quita *el centro.* $\mathbf{E^*(z_0 ; r) = E(z_0 ; r) - \{ z_0 \}}$. $\mathbf{E^*(z_0 ; r) = \{ z \in \Re \;/\; 0 < d(z;\, z_0) < r \}}$

Observaciones:

1) $\mathbf{E\,(z_0;\,r)} = (z_0 - r\ ;\ z_0 + r)$ (intervalo simétrico con centro en z_0).

Esta igualdad se prueba fácilmente a partir de la definición de distancia entre números reales, $d(z, \mathbf{z_0}) = |\ z - \mathbf{z_0}\ |$, y propiedades del valor absoluto (Apéndice A).

2) Si analizamos el concepto dado vemos que este se corresponde con la acepción vulgar de la palabra ´entorno´; o sea, representa el conjunto de todo aquello que está ´próximo´ a alguien o algo (en nuestro caso a z_0). Es fácil de aceptar así que:

z *"cerca"* de z_0 ≈ $d(z, \mathbf{z_0}) < \mathbf{r}$ ≈ $z \in \mathbf{E\,(z_0;\,r)}$ (para r *convenientemente pequeño*)

Resumiendo:

$$z \text{ "cerca" de } z_0 \approx \begin{cases} d(z, \mathbf{z_0}) < \mathbf{r} & (\text{ para "r" } \textit{conveniente}) \\ |z - \mathbf{z_0}\ | < \mathbf{r} & (\text{ para "r" } \textit{conveniente}) \\ z \in \mathbf{E\,(z_0;\,r)} & (\text{ para "r" } \textit{conveniente}) \\ z \in \mathbf{(z_0 - r\ ;\ z_0 + r)} & (\text{ para "r" } \textit{conveniente}) \end{cases}$$

3) Existen entonces distintas forma de expresar ´matemáticamente´ la expresión coloquial ´z cerca de z_0 ´. Podemos proceder así a traducir la definición de límite de su ´forma coloquial´ a su ´forma matemática´.

➢ *Traducción de la definición coloquial a la matemática (topológica)*

$\lim\limits_{x \to xo} \mathbf{f(x)} = \mathbf{L} \iff$

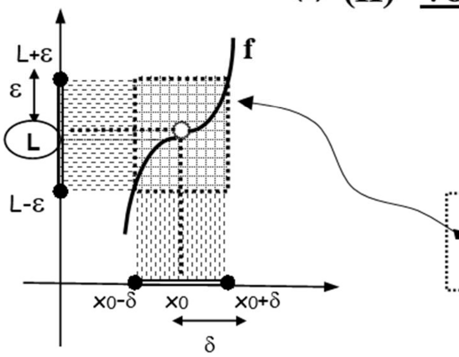
cuando x se acerca a x_0 , (1)
f (x) se acerca al único número **L**; (2)
<u>tanto como quiera</u>, (3)
sin importar lo que pasa en x_0. (4)

Lenguaje coloquial	lenguaje "matemático"
(1) y (4) x *cerca* de x_0 $x \neq x_0$	$x \in \mathbf{E^*\,(x_0\,;\delta)}$ (para δ *conveniente*)
(2) f(x) *cerca* de **L**	$f(x) \in \mathbf{E(L;\,\varepsilon\ )}$ (para ε *conveniente*)
(3) <u>tanto como quiera</u> (esto significa que por más chico que tomemos el entorno de L, o sea, <u>por más chico que tomemos ε</u>, siempre encontraremos en él algún f (x) proveniente de un x próximo a x_0)	$\forall\varepsilon\ ,\ \exists\ \delta$ tal que, si $x \in \mathbf{E^*\,(x_0;\delta)}$ entonces, $f\,(x) \in \mathbf{E(L;\,\varepsilon\ )}$

➢ Luego, concluimos las siguientes **DEFINICIONES FORMALES**:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff$ **(I)** $\underline{\forall \varepsilon > 0}$; $\exists\, \delta > 0$ tal que si $x \in E^*(x_0; \delta)$ entonces $f(x) \in E(L;\varepsilon)$

$\iff$ **(II)** $\underline{\forall \varepsilon > 0}$; $\exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$



Para **x** ∈ **E*(x₀;δ)**, el gráfico de f debe estar dentro de este rectángulo

Observaciones:

1) las definiciones ´coloquial´, (I) y (II) de límite de una función en un punto son definiciones equivalentes; o sea, dicen "*lo mismo*" aunque de distintas formas.
2) La **definición (II)** (llamada definición **"ε, δ"**) se obtiene de *calcular* las distancias indicadas en los respectivos entornos:

- $\mathbf{E^*(x_0; \delta)} = \{x \in \Re \,/\, 0 < d(x; x_0) < \delta\} = \{x \in \Re \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta\}$
- $\mathbf{E(L; \varepsilon)} = \{y \in \Re \,/\, d(y; L) < \varepsilon\} = \{y \in \Re \,/\, |y - L| < \varepsilon\}$

➢ ***Verificación de límite de una función en un punto.***

La definición rigurosa del concepto de límite permite ahora <u>verificar límites</u>; o sea, supuesto que L es el límite de una función, <u>demostrar</u> que esto es efectivamente así.
L puede ´intuirse´ a partir de una tabla de valores, del análisis de un gráfico, etc.

Ejemplo 1: $f(x) = 2x+3 \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 5$ (intuitivamente, si x está cerca de 1, f (x) está cerca de 5)

- <u>Si</u> $\forall \varepsilon > 0$ <u>encontramos</u> $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 1| < \delta$ entonces $|f(x) - 5| < \varepsilon$; entonces habremos verificado la definición y $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

<u>Prueba</u>: $|\mathbf{f(x) - 5}| = |(2x+3) - 5| = 2.|\mathbf{x-1}| \rightarrow$

- observamos que si:
  $2.|x-1| < \varepsilon$ entonces $|f(x)-5| < \varepsilon$
- y, si:
  $|x-1| < \boldsymbol{\varepsilon/2}$ entonces $2.|x-1| < \varepsilon$

Luego, para $\delta = \varepsilon\,\mathbf{/2}$ resulta que:

$$\mathbf{0 < |x - 1| < \delta} \Rightarrow |x - 1| < \varepsilon/2 \Rightarrow 2.|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{|f(x) - 5| < \varepsilon}.$$

o sea, para cada ε hallamos un δ ($\delta = \varepsilon\,\mathbf{/2}$) para el cual se cumple la definición.
Luego, verificamos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$.

Ejemplo 2: $f(x) = mx+h \rightarrow \lim\limits_{x\to xo} f(x) = f(x_0)$

Por definición: $\lim\limits_{x\to xo} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon >0;\ \exists\, \delta >0 \ /\ 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)- f(x_0)| < \varepsilon$

<u>Prueba</u>: $\mathbf{|f(x) - f(x_0)| = |m|.|x-x_0|}$

Si tomamos $\delta = \varepsilon/|m|$:

$\mathbf{0 < |x -x_0| < \delta} \Rightarrow |x -x_0| < \varepsilon/|m| \Rightarrow |m|.\,|x -x_0| < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$

Dado ε encontramos δ ($\delta = \varepsilon/|m|$). Luego verificamos que $\lim\limits_{x\to xo} f(x)= f(x_o)$

Ejemplo 3: $f(x)= \dfrac{x^2 + 2x -3}{x-1}$; $\mathbf{x_0} =1$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \mathbf{?}$

En la pag. 127 tratamos esta función y, a través de una tabla de valores, observamos que si x→ 1 entonces los f(x) → 4. <u>Luego</u>: ¿$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \mathbf{4}$?

El límite es 4 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon \mathbf{>0};\ \exists\, \delta \mathbf{>0}$ tal que $0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x) - \mathbf{4}|<\varepsilon$

En este caso, antes de hacer la verificación, observamos que:

$$f(x) = \frac{x^2 +2x -3}{x-1} = \frac{(x+3).\,(x-1)}{x-1} \underset{\boxed{\mathbf{x \neq 1}}}{=} (x+3)$$

Si ahora consideramos la función lineal h(x)=x+3, podemos aplicar la siguiente propiedad para evaluar el límite pedido:

<u>Propiedad básica del límite (PBL)</u>

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f(x) = h(x);\ \forall x \neq x0 \\ \text{y } \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$$

Como la función f satisface la propiedad mencionada, mediante su uso es posible evaluar el límite de f en el punto $x_0 =1$, resultando que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \underset{\boxed{\text{PBL}}}{=} \lim_{x\to 1} h(x) \underset{\boxed{\text{Ejemplo 2}}}{=} h(1) = 4$$ [<u>obs</u>: hemos verificado de *otra forma*]

Observación: La "verificación" de un límite aplicando la definición generalmente es muy difícil. Luego, para simplificar el trabajo, conviene buscar otros caminos que, siendo correctos, sean más simples (como en el ejemplo 3). Para ello necesitamos conocer "propiedades" del límite.

➢ *PROPIEDADES del límite de una función en un punto.*

Sean f y g dos funciones tales que; $\lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{f(x) = A}$ y $\lim\limits_{x \to x_o} \mathbf{g(x) = B}$.

<u>TEOREMA 1</u>: $\lim\limits_{x \to x_o} [\ \mathbf{f(x) + g(x)}\ ] = \mathbf{A + B}$.

<u>TEOREMA 2</u>: $\lim\limits_{x \to x_o} [\ \mathbf{f(x).\ g(x)}\ ] = \mathbf{A\ .\ B}$.

<u>TEOREMA 3</u>: $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$; [siempre que $\mathbf{B \neq 0}$]

Observación:
La demostración de estos teoremas (que aquí omitimos) se hace usando la definición de límite. Una vez demostrados en general podemos aplicarlos a cualquier caso particular.

Ejemplo 4: dada $h(x) = x^2$ hallar $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$

En este caso h se puede pensar como el producto de " f . f " con f (x) = x (lineal). Luego, como ya sabemos calcular el límite para una función lineal, si acudimos al teorema 2 tenemos una forma muy simple de calcular *rigurosamente* el límite pedido.

$$\lim_{x \to 3} h(x) = \lim_{x \to 3} [f(x)\ .f(x)] = f(3)\ .f(3) = (3)\ .\ (3) = \mathbf{9}$$

Teorema 2 y ejemplo 2

<u>Nota</u>: en este caso tenemos que h(3) = 9 ; o sea, que $\lim\limits_{x \to 3} h(x) = h(3)$

Este hecho también lo verificamos en el caso de la función lineal; o sea, estamos viendo que si la función <u>existe en el punto</u> el límite resulta ser <u>el valor de la función en el punto</u>.
Nos preguntamos: *¿<u>será esto siempre así</u>?*. Vemos más ejemplos y concluimos.

Ejemplo 5:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 \ ; & x \neq 1 \\ 1 \ ; & x = 1 \end{cases}$$

- si h(x) = x+3 $\forall$**x**, entonces f(x)= h(x) $\forall$ **x** ≠1 y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} h(x) = h(1) = 4$

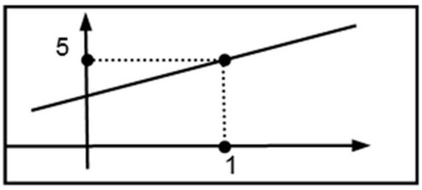
Luego, en este caso L = 4 y f (1)=1; o sea, L ≠ f (1).

Ejemplo 6: f (x) = [x]. Aquí, $\nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y f(1) = 1.

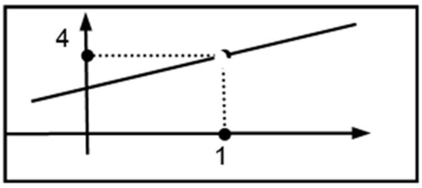
♦ *Estudio general de la relación entre L y $f(x_0)$.*

Repasamos los ejemplos vistos hasta ahora:

Ejemplo 1: $f(x) = 2x+3 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

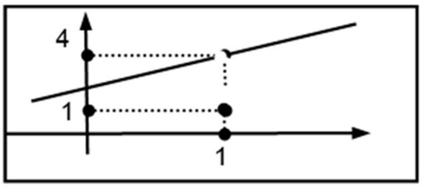


Ejemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$

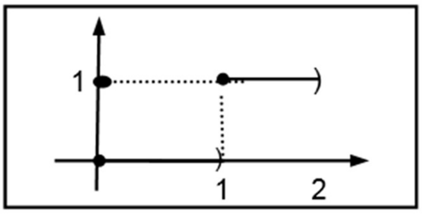


Ejemplo 5:

$$f(x) = \begin{cases} x+3\ ; & x \neq 1 \\ 1\ ; & x = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 4$$



Ejemplo 6: $f(x) = [\,x\,] \rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$



RESUMIENDO:

	Ej. 1	Ej. 3	Ej. 5	Ej. 6
f(1)	**5**	**$\nexists$**	**1**	**1**
L	**5**	**4**	**4**	**$\nexists$**
¿$f(x_0)$= L?	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
OBSERVACIONES	**GRÁFICO CONTINUO**	$\exists$ lim *no implica* $\exists$ $f(x_0)$	$\exists$ lim *no implica* $L = f(x_0)$	$\exists$ $f(x_0)$ *no implica* $\exists$ lim
		El grafico presenta *"saltos"* ó *"agujeros"*		

<u>CONCLUSIONES</u>:
Vemos entonces que el límite y el valor de la función en el punto coinciden "solo en un caso": cuando el gráfico de f es una curva que no presenta "*saltos*" ni "*agujeros*"; o sea, cuando es una curva "*continua*".
A partir de ahora llamamos *funciones continuas* a las funciones cuyo gráfico sea una *curva continua*. En lo que sigue, y a los efectos de poder estudiar analíticamente la continuidad de una función en un punto, definimos rigurosamente este concepto.

2.2 Continuidad

DEFINICIÓN:

Continuidad de una función en un punto	f continua en x_0 $\Leftrightarrow$ 1) $\exists$ f(x_0) 2) $\exists \lim\limits_{x \to xo} f(x)$ 3) $\lim\limits_{x \to xo} f(x) = f(x_0)$ *Equivalentemente*: f continua en x_0 $\Leftrightarrow$ cuando x se acerca a x_0, f(x) se acerca tanto como se quiera a **f(x_0)**.

DEFINICIÓN:

Continuidad de f en un dominio D	f continua en D $\Leftrightarrow$ f continua en x_0 ; $\forall$ $x_o \in$ D.

Observaciones:

a) en relación al gráfico de una función podemos decir que:
- f continua en x_o si graf. f no presenta saltos ni agujeros en x_o.
- f continua en D si graf. f no presenta saltos ni agujeros en D.

b) la condición 3 comprende las otras dos (*); luego, podemos decir:

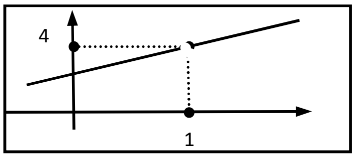
$$\text{f continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to xo} f(x) = f(x_0)$$

(*) ¿porqué damos tres condiciones?, simplemente porque tener presentadas así las condiciones para la continuidad facilita el correspondiente análisis, lo hace más operativo pues apenas detectamos una condición que no se cumple, sin necesidad de revisar las otras, podemos concluir que la función no es continua en ese punto. Por ejemplo, basta que no exista la función en el punto para que no sea continua en dicho punto.

Ejemplo: para f(x) = mx+h, demostramos que $\forall$ x_o, $\lim\limits_{x \to xo} f(x) = f(x_0)$ (ej. 2, pag.133).

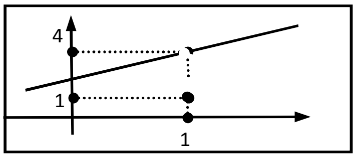
Luego, <u>la función lineal es continua en todos los reales</u>.

Para los ejemplos vistos en la página anterior, tenemos:



Ejemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x-1}$; <u>*f no es continua en* x_o=1</u>

- f no está definida en x_o=1 $\Rightarrow$ no cumple la *condición 1*; (aún cuando el límite exista ; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$, ej. 3, pag.133).

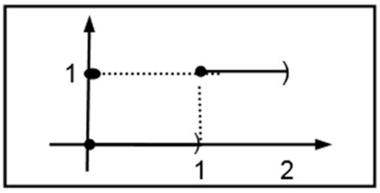


Ejemplo 5:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 \,;\; x \neq 1 \\ 1; \qquad x = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

- f está definida en x_o=1 $\Rightarrow$ cumple la *condición 1*
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$ $\Rightarrow$ cumple la *condición 2*
- $f(1) = 2 \neq \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ $\Rightarrow$ no cumple la *condición 3* $\Rightarrow$ <u>*no es continua en* x_o=1</u>

Ejemplo 6: $f(x) = [\,x\,]$ → $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$



- f está definida en $x_o = 1$ ⇒ cumple la *condición 1*
- $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ⇒ no cumple la *condición 2*

⇒ <u>*no es continua en* $x_o = 1$</u>

<u>Notas</u>:

1- de los ejemplos propuestos observamos que existen distintas causas para la ´discontinuidad´ en un punto y que la ´importancia´ de las mismas se ´refleja´ en el gráfico de la función. Esencialmente, cuando <u>el límite existe</u>, la gráfica presenta una ´perforación´ en el punto mientras que, cuando <u>el límite no existe</u>, la gráfica presenta un ´salto´. Esto permite clasificar las discontinuidades evitables y no evitables, cuestión que vemos al final de este capítulo.

2- en la búsqueda de hechos o propiedades que permitan el cálculo del límite de una función en un punto <u>en forma precisa y sin tener que acudir a la definición para verificar</u>, la continuidad aparece como una propiedad muy útil a tal fin ya que, <u>conocida la continuidad en el punto</u>, el límite es, simplemente, el valor de la función en el punto. Tenemos así que para una categoría muy importante de funciones, las funciones continuas, la obtención de límites se reduce a un simple cálculo: el de la función en el punto.

Pero ¡cuidado!, antes de proceder a calcular de esta forma, debemos estar absolutamente seguros de la continuidad de la función en el punto.

... En esta instancia y tal como vienen las cosas, surge un problema: dada una función f y un punto, ¿cómo averiguamos la continuidad de f en el punto?

Entre otras acciones, <u>calculando el límite de f en el punto</u>.

Y entramos así en un círculo vicioso: la continuidad ayuda en el cálculo del límite pero, para decidir la continuidad, tenemos que calcular un límite.

... ¿Cómo resolvemos este problema?: buscando una forma alternativa de decidir la continuidad.

... y, para esto, necesitamos conocer más acerca de las funciones continuas.

♦ *Propiedades de las funciones continuas*

Sean f y g dos funciones continuas en x_0, luego:

<u>TEOREMA 4</u>: $\lim\limits_{x\to xo} [\, f(x)+g(x)\,] = f(x_0)+ g(x_0)$ (→ la suma de continuas es continua).

<u>TEOREMA 5</u>: $\lim\limits_{x\to xo} [\, f(x).g(x)\,] = f(x_0)\,.g(x_0)$ (→ el producto de continuas es continuo)

<u>TEOREMA 6</u>: $\lim\limits_{x\to xo} [\, f(x)/g(x)\,] = f(x_0)/g(x_0)$ (→ el cociente de continuas en x_0, es continuo en x_o siempre que $g(x_0) \neq 0$)

<u>TEOREMA 4</u>: (Demostramos el teorema 4, el resto queda como ejercicio).

Por hipótesis, f continua en x_0 ⇒ $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_0)$

Por hipótesis, g continua en x_0 ⇒ $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = g(x_0)$

$$\lim_{x\to x_o} [\, f(x) + g(x)] \overset{teor.1}{=} \lim_{x\to x_o} f(x) + \lim_{x\to x_o} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

<u>*Conclusión*</u>: f + g es continua en x_o.

TEOREMA 7: (composición de continuas es continua)

$$\left.\begin{array}{l} -\ \ f \text{ continua en } x_0 \\ -\ \ g \text{ continua en } u_0 = f(x_0) \\ -\ \ \exists \ gof(x),\ \forall\ x \in E(x_0;\ \delta) \end{array}\right\} \Rightarrow gof \text{ es continua en } x_0$$

Demostración (intuitiva):

» $x \to x_0 \ \Rightarrow\ f(x) \to f(x_0)$ (1) ; (por la continuidad de f en x_0)

» $u \to u_0 \ \Rightarrow\ g(u) \to g(u_0)$ (2) ; (por la continuidad de g en u_0)

» si hacemos $u = f(x)$ entonces:

$$x \to x_0 \ \overset{(1)}{\Rightarrow}\ \underbrace{f(x)}_{u} \to \underbrace{f(x_o)}_{u_o} \ \overset{(2)}{\Rightarrow}\ g(\underbrace{f(x)}_{u}) \to g(\underbrace{f(x_o)}_{u_o}) = g\,{}_o f(x_0)\ ;$$

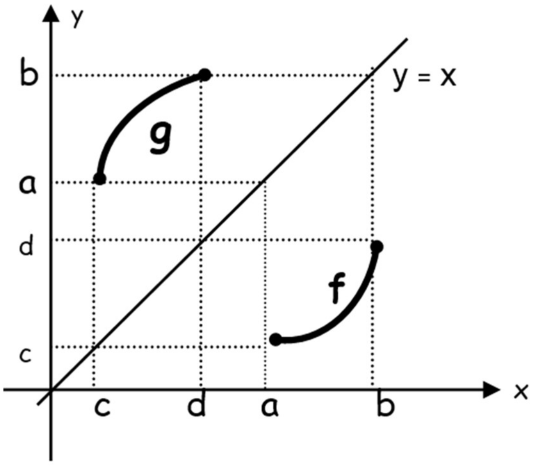
O sea: $\lim_{x \to x_o} gof(x) = gof(x_0)$

Conclusión: gof es continua en x_o.

TEOREMA 8: (inversa de continua es continua)

$$\left.\begin{array}{l} -\ \ f \text{ biyectiva en } (a;\ b) \\ -\ \ f \text{ continua en } (a;\ b) \\ -\ \ \operatorname{Im} f = (\ c\ ;\ d\ ) \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ (inversa de f) es continua en } (c;d)$$

Justificación (gráfico-intuitiva):



» Si f es continua en (a;b) , su gráfico no presenta saltos ni agujeros;

» el gráfico de g es simétrico del de f respecto de la recta y=x ;

» luego, el gráfico de g no presenta ni saltos y agujeros.

» *Conclusión*: g es continua en su dominio (c;d).

Observaciones:

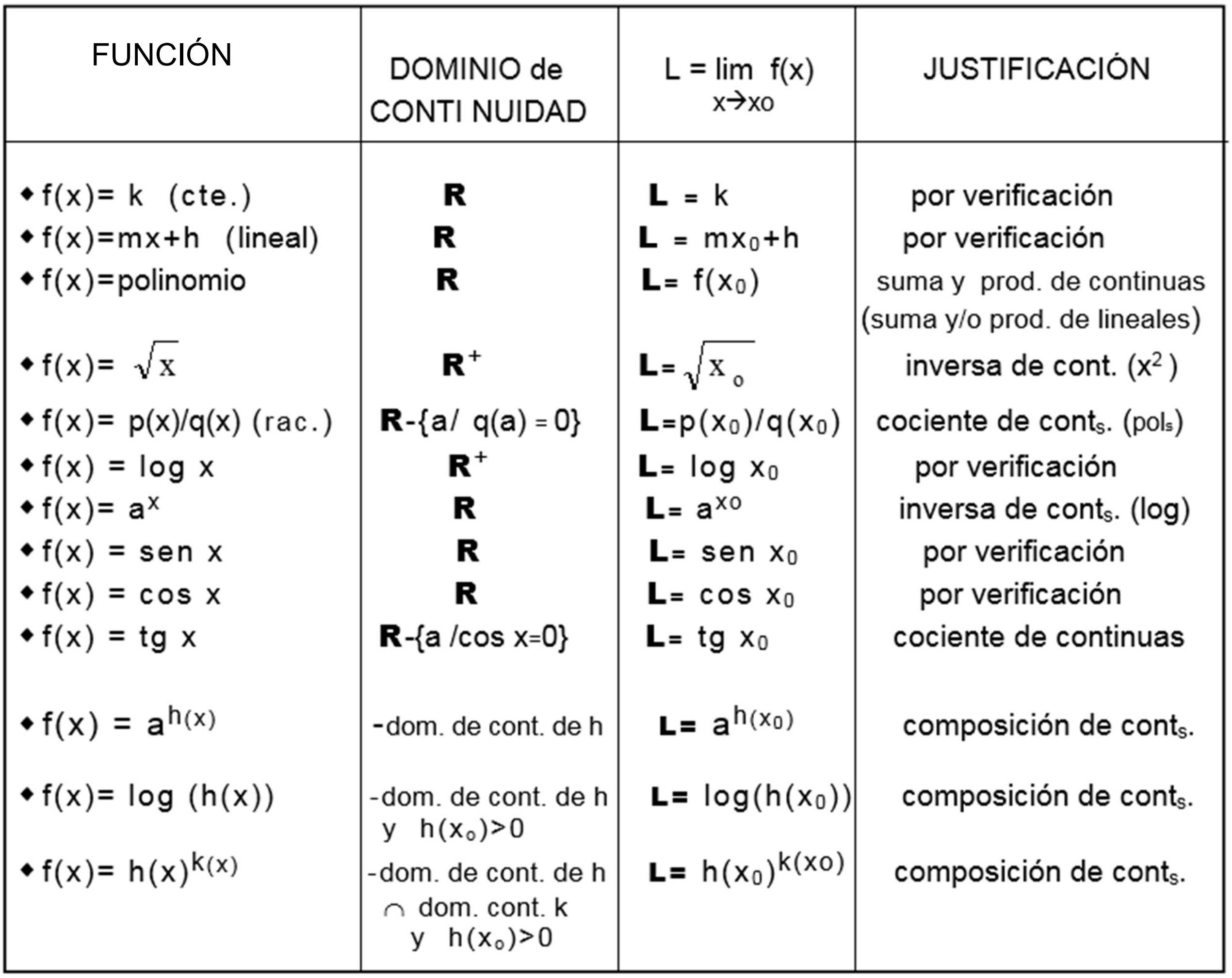
Según establecimos ya en otro párrafo, si conocemos que una función es continua en un punto el cálculo del límite se reduce a una operación muy simple: *calculo del valor de la función en el punto.*

También aclaramos que debíamos tener cuidado, que antes de aplicar este método debíamos estar seguro que la función fuera continua en el punto; el problema que esto representaba.

A este respecto los teoremas 4 a 8 muestran distintas propiedades de las funciones continuas cuya importancia radica, esencialmente, en que permiten decidir acerca de la continuidad de una función en un punto sin necesidad de acudir a la definición de límite en cada caso.

A continuación, y a los efectos de usar luego esta información en el cálculo de límites, establecemos que funciones son continuas, donde y porqué.

FUNCIONES CONTINUAS



FUNCIÓN	DOMINIO de CONTI NUIDAD	$L = \lim\limits_{x \to xo} f(x)$	JUSTIFICACIÓN
◆ $f(x)= k$ (cte.)	**R**	**L** $= k$	por verificación
◆ $f(x)=mx+h$ (lineal)	**R**	**L** $= mx_0+h$	por verificación
◆ $f(x)=$polinomio	**R**	**L**$= f(x_0)$	suma y prod. de continuas (suma y/o prod. de lineales)
◆ $f(x)= \sqrt{x}$	$\mathbf{R}^+$	**L**$= \sqrt{x_o}$	inversa de cont. (x^2)
◆ $f(x)= p(x)/q(x)$ (rac.)	**R**-{a/ q(a) = 0}	**L**$=p(x_0)/q(x_0)$	cociente de cont$_S$. (pol$_s$)
◆ $f(x) = \log x$	$\mathbf{R}^+$	**L**$= \log x_0$	por verificación
◆ $f(x)= a^x$	**R**	**L**$= a^{xo}$	inversa de cont$_S$. (log)
◆ $f(x) = \operatorname{sen} x$	**R**	**L**$= \operatorname{sen} x_0$	por verificación
◆ $f(x) = \cos x$	**R**	**L**$= \cos x_0$	por verificación
◆ $f(x) = \operatorname{tg} x$	**R**-{a /cos x=0}	**L**$= \operatorname{tg} x_0$	cociente de continuas
◆ $f(x) = a^{h(x)}$	-dom. de cont. de h	**L**$= a^{h(x_0)}$	composición de cont$_S$.
◆ $f(x)= \log (h(x))$	-dom. de cont. de h y $h(x_o)>0$	**L**$= \log(h(x_0))$	composición de cont$_S$.
◆ $f(x)= h(x)^{k(x)}$	-dom. de cont. de h $\cap$ dom. cont. k y $h(x_o)>0$	**L**$= h(x_0)^{k(xo)}$	composición de cont$_S$.

<u>NOTA</u>: $f(x) = h(x)^{k(x)}$ es una composición de funciones pues:

$$f(x) = h(x)^{k(x)} = e^{\ln(h(x)^{k(x)})} = e^{k(x).\ln(h(x))} = e^{p(x)} \quad \text{con} \quad p(x) = k(x).\ \ln(h(x))$$

2.3 Cálculo de Límite, otros casos

2.3.1 Limites laterales:

En el caso de una función definida con distintas leyes a ambos lados de un punto, para calcular el límite en dicho punto estudiamos el comportamiento de la función en cada lado por separado. Para ello definimos los LIMITES LATERALES.

DEFINICIÓN 1: límite lateral ´por derecha´.

$\lim_{x\to x_o^+} f(x) = L$ ⇔

Cuando $x \to x_0$ $(x>x_0)$; entonces f(x) se acerca a L y tanto como quiera.

⇔

$\forall\varepsilon > \mathbf{0}$; $\exists\ \delta > \mathbf{0}$ tal que si $x_o < x < x_o+\delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

DEFINICIÓN 2: límite lateral ´por izquierda´.

$\lim_{x\to x_o^-} f(x) = L$ ⇔

Cuando $x \to x_0$ $(x<x_0)$; entonces f(x) se acerca a L y tanto como quiera.

⇔

$\forall\varepsilon > \mathbf{0}$; $\exists\ \delta > \mathbf{0}$ tal que si $x_o-\delta < x < x_o$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

TEOREMA 9:

El límite ordinario existe si y sólo si existen los laterales y son todos iguales.

O sea: $\lim_{x\to x_o} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_o^+} f(x) = \lim_{x\to x_o^-} f(x) = L\,.$

Demostración: ejercicio

2.3.2 Otras propiedades del Límite

TEOREMA 10: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0} (\,f(x) - L\,) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |\,f(x) - L\,| = 0$ (s/d)

Corolario: $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |\,f(x)\,| = 0$

TEOREMA 11: (teorema de conservación del signo)

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $L \neq 0$, entonces existe un entorno reducido de x_0 en el cual el signo de f(x) es igual al signo de L.

Demostración: la dividimos en dos partes según $L > 0$ ó $L < 0$.

* 1er caso: $\mathbf{L > 0}$

Por hipótesis $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$; luego,

dado $\varepsilon > 0$, *cualquiera que este sea*, siempre podemos hallar $\delta > 0$, tal que :

$\forall x$ tal que $x \in E^*(x_o,\delta)$ resulta $|\,f(x) - L\,| < \varepsilon$;

o sea, $\forall x$ tal que $x \in E^*(x_o,\delta)$ resulta $\underbrace{\mathbf{L - \varepsilon < f(x)}}_{(*)} < L + \varepsilon$

Si tomamos $\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{L}$ (posible pues $\mathbf{L > 0}$) y lo reemplazamos en (*), tenemos:

$\forall x$ tal que $x \in E^*(x_o,\delta)$ resulta $\mathbf{L - \tfrac{1}{2} L < f(x)} \Rightarrow \mathbf{\tfrac{1}{2} L < f(x)}$

Conclusión: $\mathbf{L} > 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}\mathbf{L} > 0$. Luego, $\mathbf{f(x) > \tfrac{1}{2} L} \Rightarrow \mathbf{f(x) > 0}$

Como **L** >0, hemos probado así que, $\forall x \in E^*(x_o,\delta)$, f(x) tiene el mismo signo que **L**.

* 2do caso: $\mathbf{L < 0}$ (ejercicio)

TEOREMA 12: (propiedad de monotonía)- (s/d)

$$\left.\begin{array}{l} -\ \ f(x) \le g(x)\ ;\ \forall\ x \in E^*(x_0;\ \delta) \\ -\ \ \exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \\ -\ \ \exists\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow\ \lim_{x\to x_0} f(x) \ \le\ \lim_{x\to x_0} g(x)$$

TEOREMA 13: (teorema de "encaje" de límites, ó teorema "sandwich") -(s/d)

$$\left.\begin{array}{l} -\ \ f(x) \le g(x) \le h(x)\ ;\ \forall\ x \in E^*(x_0;\ \delta) \\ -\ \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow\ \exists\ \lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

2.3.3 Límites de cociente de funciones. Casos especiales

En el teorema 3; estudiamos el límite del cociente de dos funciones en el caso que ambas tienen límite y el del denominador es distinto de cero.

En este párrafo estudiamos los otros casos, particularmente que pasa cuando el límite del denominador es cero.

$$\left.\begin{array}{l} \blacklozenge\ \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \\ \\ \blacklozenge\ \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \end{array}\right| \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = ?}$$

CASO 1 $\quad A \ne 0;\ \ B \ne 0 \Rightarrow$ [Teor. 3] $\quad \boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}}$

CASO 2 $\quad A \ne 0;\ \ B = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?}$ → (más adelante, en ´límites infinitos´)

CASO 3 $\quad A = 0;\ \ B = 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = ?}$ → problema de INDETERMINACION

¿Qué es una indeterminación?:

Es un problema para el cual no se puede asegurar "a priori" el carácter del límite Este puede existir como no existir, ser nulo como no, su carácter se encuentra absolutamente ligado a las peculiaridades de las funciones intervinientes, (cosa que no sucede, por ej., en el CASO 1, donde el límite siempre existe más allá de las particularidades de cada función).
O sea, son problemas para los que no es posible enunciar resultados de carácter *general*, donde cada caso tiene que ser estudiado en particular, teniendo en cuenta las propiedades presentadas por "f" y "g".

Ejemplo 1

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacklozenge\ f(x) = x^2 - 4 \\ \blacklozenge\ g(x) = x - 2 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \blacklozenge\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0 \\ \blacklozenge\ \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \ ?}$$

- trabajamos algebraicamente la función hasta ´romper la indeterminación´; o sea, hasta llegar a una función cuyo límite podamos calcular.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2).(x+2)}{x-2} \underset{x\neq 2}{=} (x+2) = \text{h}(x)$
- h(x) = x+2 lineal $\Rightarrow$ continua en todo su dominio $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} h(x) = h(x_o)$
- como, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \text{h}(x),\ \forall\ x \neq 2 \quad \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 2} h(x) = h(2) = 4}$

Ejemplo 2

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacklozenge\ f(x) = x \\ \blacklozenge\ g(x) = |\, x\, | \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \blacklozenge\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \\ \blacklozenge\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ ?}$$

- trabajamos algebraicamente la función hasta ´romper la indeterminación´; o sea, hasta llegar a una función cuyo límite podamos calcular.
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{|x|} = h(x) = \begin{cases} 1 & ,si\ \ x > 0 \\ -1 & ,si\ \ x < 0 \end{cases}$
- h es una función seccionalmente definida, luego podemos calcular el límite a través del cálculo de los límites laterales.
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{array}\right] - \boxed{\underset{teor.9}{\Rightarrow}\ \nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}}$

Conclusión los ejemplos muestran que una indeterminación del tipo 0/0, al ser ´rota´, puede derivar en dos tipos de situaciones: una en la que el límite existe (ej. 1) y otra, en que el límite no existe (ej. 2)

¿CÓMO RESOLVEMOS un PROBLEMA de INDETERMINACIÓN?

- *<u>Si es posible</u>, trabajamos algebraicamente la función f/g hasta "romper" la indeterminación; o sea, hasta llegar a una <u>nueva función "h"</u> cuyo límite se conozca o se pueda calcular y tal que f/g = h , por lo menos, en un entorno reducido del punto.*
- *¿y si el trabajo algebraico, <u>no es posible</u>? …………*

En el caso que no se pueda realizar el trabajo algebraico no queda otro camino que acudir a propiedades de los límites (teoremas), de las funciones, a gráficos, tablas, etc.
Tal es el caso de sen x/x.

<u>Caso especial</u>: $\dfrac{sen\ x}{x}$

- ♦ f(x) = sen x
- ♦ g(x) = x

→

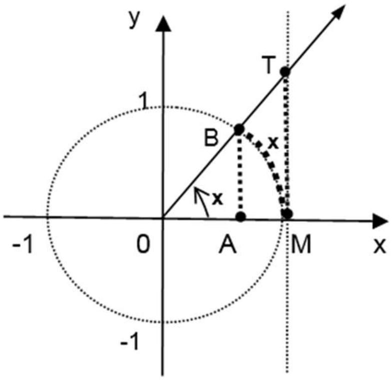
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

→

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = ?$$

Para esta función no podemos realizar ningún trabajo algebraico que permita plantear el problema en una forma equivalente y más simple. Para investigarla tenemos distintos caminos, optamos por el que permite obtener la conclusión con absoluta certeza.
Para ello estudiamos el comportamiento de la función en un entorno del cero acudiendo a resultados de la trigonometría y propiedades de límite, analizando por separado que sucede cuando nos acercamos a cero por derecha (1) y por izquierda (2).

(1) $0 < x < \pi/2$



$$|\overline{AB}| \le long.\ \overset{\frown}{MB} \le |\overline{MT}|$$

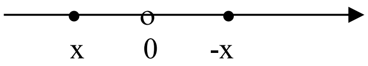
$$\text{sen } x \le x \le \text{tg } x \quad \text{(dividiendo por sen x)}$$

$$1 \le \frac{x}{\text{sen } x} \le \frac{1}{\cos x} \quad \text{(invirtiendo la desig.)}$$

$$\begin{array}{ccccc} \cos x & \le & \dfrac{\text{sen } x}{x} & \le & 1 \\ \Big\Downarrow{\scriptstyle x\to 0^+} & & \Big\Downarrow{\scriptstyle x\to 0^+} & & \Big\Downarrow{\scriptstyle x\to 0^+} \\ 1 & & \text{(por teor. 13)} & & 1 \\ & & \textcircled{1} & & \end{array}$$

<u>Conclusión 1</u>: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$

(2) **- π /2 < x < 0** ⇒ 0 < (-x) < π /2



En esta instancia, y siendo imposible ´simplificar la expresión´ acudimos a otro recurso algebraico válido para el cálculo de límite: el *´cambio de variable´*. Este proceso permite ´cambiar´ la expresión dada por otra cuyo límite sí sabemos o podemos calcular: Así:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{sen\ x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-\,sen\ x}{-\,x} \underset{sen\ impar}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{sen(-x)}{-\,x} \underset{\substack{-x=u\\ x\to 0^-\\ u\to 0^+}}{=} \lim_{u\to 0^+}\frac{sen\ u}{u} \underset{(1)}{=} 1$$

Conclusión 2: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{sen\ x}{x} = 1$

Conclusión final: *los límites laterales son iguales, luego:* $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1}$

Observaciones:

1) Hemos concluido que el límite es "1", o sea que si **x ≈ 0** entonces $\dfrac{sen\ x}{x} \approx \mathbf{1}$.

Esto último nos dice que para **x ≈ 0**, resulta **sen x ≈ x**, y este dato es <u>muy importante</u>; ya que indica que en las proximidades del cero *el valor del seno de un ángulo y el valor del ángulo* (¡en radianes!) son prácticamente iguales. Este hecho facilita enormemente la resolución de problemas donde intervienen ángulos muy pequeños, ya que a raíz de esto podemos sustituir el seno del ángulo por el ángulo, sin introducir un error importante.

2) Cada vez que tengamos un problema de esta naturaleza, "sen(*argumento*)/*argumento* ", donde el ´argumento del seno´ se hace cada vez más pequeño (→ 0), podemos aplicar el resultado anterior y asegurar que el cociente tiende a 1. O sea:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{sen\ (f(x))}{f(x)} = ? \\ y\ \ \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{sen(f(x))}{f(x)} = 1 \quad (*)}$$

(*) La demostración de este resultado queda como ejercicio. El mismo se prueba fácilmente acudiendo al recurso del ´cambio de variable´, haciendo *f(x) = u.*

Ejemplo I: $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{sen\ (x-2)}{x-2} = 1$ pues aquí, $\boldsymbol{f(x) = x\text{-}2}$ y $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

3) debemos tener cuidado y no hacer uso indiscriminado de los resultados que vamos obteniendo: los mismos valen, <u>*bajo ciertas condiciones*</u>. Así, para aplicar (#) debemos estar seguros de que estamos ante una indeterminación del tipo 0/0.

Ejemplo II: $$\lim_{x\to b} \frac{sen\ (x^2-9)}{x^2-9} = ?$$

Aquí, el procedimiento a aplicar para el cálculo del límite, <u>*depende del valor de ´b´*</u>

→ si **b = 3** (ó b = -3) tenemos una indeterminación del tipo 0/0, aplicamos (#)

$$\lim_{x\to 3} \frac{sen\ (x^2-9)}{x^2-9} = 1$$

→ si **b ≠ 3** y **b ≠ - 3** ; entonces estamos ante el cociente de dos funciones continuas donde el denominador no se anula en el punto; luego, el límite es el valor de la función en el punto.

$$\lim_{x\to 4} \frac{sen\ (x^2-9)}{x^2-9} = \frac{sen\ 7}{7} = \mathbf{0.0938551}$$

4) Como senx/x, existen otros casos donde presentada una indeterminación el trabajo algebraico no es posible o no alcanza para *romper* la misma, donde hay que acudir a más de un teorema o resultado previo para obtener el límite propuesto. La ventaja es que una vez demostrado en general, luego lo podemos aplicar a cada caso particular sin tener que demostrar cada vez (como en el ejemplo I).

Concluimos así el análisis del límite de un cociente de funciones en el CASO 3, falta todavía considerar el CASO 2; o sea, el caso donde el límite del denominador es cero pero no sucede lo propio con el del numerador.

<u>CASO 2</u>:

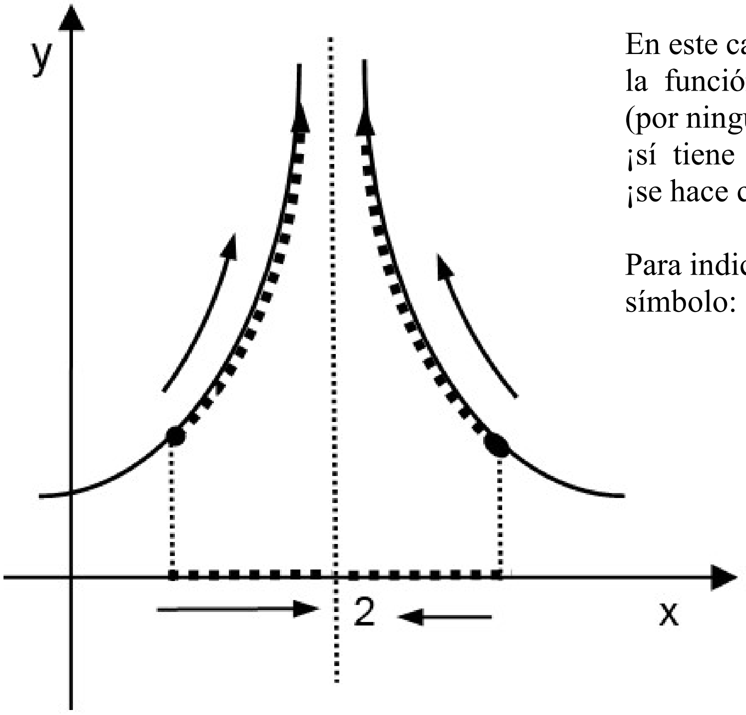
$$\boxed{\begin{array}{l} \blacklozenge\ \lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0 \\ \blacklozenge\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = ?}$$

Nos preguntamos: ¿qué comportamiento tendrá la función en casos como estos?. ¿Tendrá un comportamiento "definido" , o no?. Vemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

$$\boxed{\begin{array}{l} \blacklozenge\ f(x) = 4 \\ \blacklozenge\ g(x) = |\ x-2\ | \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \blacklozenge\ \lim_{x\to 2} f(x) = 4 \\ \blacklozenge\ \lim_{x\to 2} g(x) = 0 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = ?}$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4}{|\ x-2\ |} = h(x)$ → *(función "conocida" , luego podemos graficar y analizar el comportamiento de h(x) cuando x → 2).*



En este caso observamos que para x→2, la función no se acerca a número alguno, (por ningún lado) pero, ¡sí tiene comportamiento *"definido"* ! : ¡se hace cada vez más grande !

Para indicar esto usamos el siguiente símbolo:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = +\infty$$

Ejemplo 2:

- ♦ $f(x) = 1$
- ♦ $g(x) = x$

$\longrightarrow$

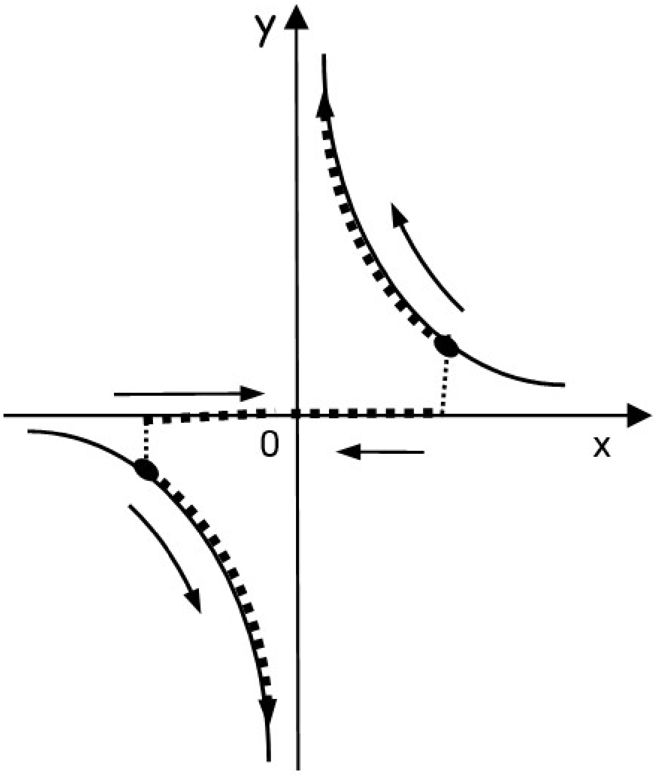
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$\longrightarrow$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ ?$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} = h(x)$$

→ *(función "conocida", luego podemos graficar y analizar el comportamiento de h(x) cuando x → 0).*



En este caso observamos que para x→0, la función no se acerca a número alguno, (por ningún lado) y, ¡tampoco tiene comportamiento *"definido"*!

Su comportamiento a derecha e izquierda del punto límite (origen) es *distinto*.

Luego, le caben las generales de la ley y, como ya vimos, en este caso decimos que el límite *no existe*:

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

2.4 Límites Infinitos para $x \to x_0$

DEFINICIÓN 1 (´coloquial´ de límite infinito positivo de una función en un punto)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ cuando x se acerca a x_0 , (1) f(x) se hace cada vez más grande ; (2) y <u>tan grande como quiera</u>, (3) sin importar lo que pasa en x_0. (4)

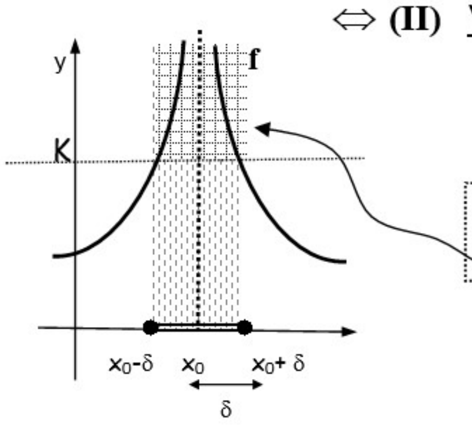
- En lo que sigue procedemos a ´traducir´ esta definición al lenguaje ´matemático´.

Lenguaje coloquial	Lenguaje "matemático"
(1) y (4) x *cerca* de x_0 $x \neq x_0$	$x \in$ **E* (x_0 ;δ)** (para δ *conveniente)*
(2) f(x) cada vez más grande	$f(x) > \mathbf{K}$ (para cualquier K que se considere)
(3) <u>tan grande como quiera</u> (esto significa que por más grande que tomemos K, siempre encontraremos algún f(x) proveniente de un x próximo a x_0 que supere este valor)	dado **K** , ∃ δ tal que , si $x \in$ **E* (x_0 ;δ)** entonces, $f(x) > \mathbf{K}$

- Luego, concluimos las siguientes **DEFINICIONES FORMALES**:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ **(I)** $\underline{\forall K}$; $\exists\, \delta > 0$ tal que si $x \in$ **E* (x_0; δ)** entonces $f(x) > K$

$\Leftrightarrow$ **(II)** $\underline{\forall K}$; $\exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > K$



Para $x \in$ **E*(x_0; δ)**, el gráfico de f debe estar por encima de la recta y = K

DEFINICIÓN 2 (´coloquial´ de límite infinito negativo de una función en un punto)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ cuando x se acerca a x_0, (1)

f(x) se hace cada vez más ´negativa´ ; (2)

y <u>tan ´negativa´ como quiera</u>, (3)

sin importar lo que pasa en x_0. (4)

Observación: la expresión *´más negativa´*, la usamos aquí a los efectos de indicar que f(x) es *´negativa´* y *´grande en valor absoluto´ (*tan grande como quiera*)* . Usamos esta expresión pues otras expresiones que podríamos dar, como por ejemplo, - *f(x) se hace tan chica como quiera* – podrían dar lugar a confusión ya que generalmente cuando pensamos en un número ´chico´, pensamos en un número cercano al cero.

Ejercicio: graficar $f(x) = \dfrac{-4}{|x-2|}$ e indicar $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Ejercicio: dar las definiciones formales correspondientes a la DEFINICIÓN 2 . Graficar. Tener en cuenta que esta definición está diciendo que para cualquier K que tomemos (en particular para cualquier K< 0) existe un entorno reducido de x_o tal que para todo $x \in E^*(x_0; \delta)$, el graf. f está <u>por debajo</u> de la recta y = K .

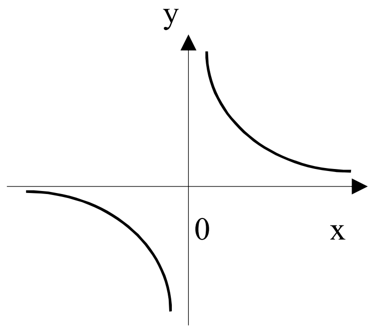
<u>*Observaciones*</u>:

1) Los límites laterales pueden también ser $+\infty$ ó $-\infty$ y en este caso el teorema 9 sigue siendo válido: "*si los límites laterales son distintos el límite ordinario no existe".*

Ejemplo: f(x) = 1/x ; $\nexists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\Big\}$ limites laterales distintos



2) Una función es:

- <u>acotada superiormente</u> en D si existe **K** tal que $f(x) \le K$; <u>$\forall x \in D$</u>
- <u>acotada inferiormente</u> en D si existe **K** tal que $f(x) \ge K$; <u>$\forall x \in D$</u>.

Luego, que f *"no sea acotada superiormente"* es una condición necesaria para que el límite de f sea $+\infty$, y que f *"no sea acotada inferiormente"* es una condición necesario para que el límite de f sea $-\infty$. En ninguno de los casos es una condición suficiente.

RESUMEN

$\lim\limits_{x \to xo} \mathbf{f(x)} =$
- $L \in R$ ($f(x) \approx L$, en un entorno reducido de x_0)
- $+\infty$ (f no acotada superiormente; en un entorno reducido de x_0)
- $-\infty$ (f no acotada inferiormente.; en un entorno reducido de x_0)
- $\nexists$ (límites laterales distintos)

2.5 Límites para x → ±∞

En este párrafo nos interesa estudiar el comportamiento de la función cuando x toma valores cada vez más grande ó cada vez más 'negativos' (negativos y grandes en valor absoluto). Como en el caso anterior también en esta instancia ideamos símbolos que nos permiten expresar que es lo que estamos buscando y cual es la respuesta.
Tenemos así:

(I) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$ Usamos este símbolo para expresar el siguiente interrogante
¿qué comportamiento tiene f(x) para x cada vez más grandes?

(II) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$ Usamos este símbolo para expresar el siguiente interrogante
¿qué comportamiento tiene f(x) para x cada vez más ´negativas´?

Para cada una de estas preguntas existen cuatro respuestas posibles. Ellas son:

(I) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{f(x)} =$
- **a)** $L \in R$ ($f(x) \approx L$, para x muy grandes)
- **b)** $+\infty$ (f no acotada sup.; para x cada vez más grandes)
- **c)** $-\infty$ (f no acotada inf.; para x cada vez más grandes)
- **d)** $\nexists$ (f no tiene un comportamiento definido, p/ x→+∞)

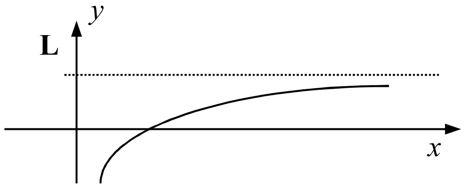
(II) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{f(x)} =$
- **a)** $L \in R$ ($f(x) \approx L$, para x muy "negativos")
- **b)** $+\infty$ (f no acotada sup.; para x cada vez más "negativos")
- **c)** $-\infty$ (f no acotada inf.; para x cada vez más "negativos")
- **d)** $\nexists$ (f no tiene un comportamiento definido, p/ x→-∞)

En lo que sigue mostramos el significado de alguna de los resultados posibles al preguntarnos acerca del comportamiento de una función cuando la variable crece o decrece infinitamente (las demás quedan como ejercicio):

(Ia) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

cuando x se hace cada vez más grande; (1)
f(x) se acerca al único número L (2)
<u>tanto como quiera</u>. (3)

◆ "traducimos" al lenguaje "matemático".

Lenguaje coloquial	Lenguaje "matemático"
(1) x *cada vez más grande*	$x > M$ (para M *convenientemente grande)*
(2) f(x) *cerca* de **L**	$f(x) \in \mathbf{E(L;\varepsilon)}$ (para ε dado)
(3) <u>tanto como quiera</u>. (esto significa que por más chico que tomemos el entorno de L; o sea, por más chico que tomemos ε, siempre encontraremos en el entorno algún f(x) proveniente de un convenientemente ´grande´)	$\forall\varepsilon$, $\exists$ **M** tal que...... si $x > M$ entonces $f(x) \in \mathbf{E\ (L;\ \varepsilon)}$ 

LUEGO, concluimos las siguientes **DEFINICIONES FORMALES**:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{f(x)} = \mathbf{L} \Leftrightarrow$ **(I)** $\underline{\forall \varepsilon > \mathbf{0}}$ **;** $\exists M$ tal que $x > M \Rightarrow f(x) \in \mathbf{E\,(L;\, \varepsilon)}$

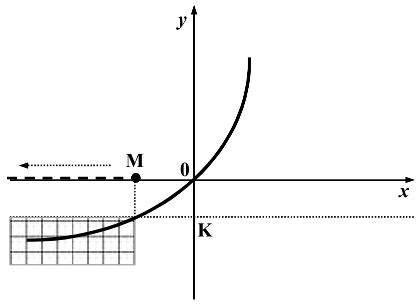
$\Leftrightarrow$ **(II)** $\underline{\forall \varepsilon > \mathbf{0}}$ **;** $\exists M$ tal que $x > M \Rightarrow |f(x) - \mathbf{L}| < \varepsilon$

Observación: en este caso la recta y = L es una asíntota de la gráfica de f en la región del eje real correspondiente a valores de x ´muy grandes´.

IIc) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{f(x)} = -\infty \Leftrightarrow$

cuando x se hace cada vez más "negativo"; (1)
f(x) hace cada vez más "negativo" (2)
y, tanto como quiera. (3)

◆ "Traducimos" al lenguaje "matemático".

Lenguaje coloquial	Lenguaje "matemático"
(1) x *cada vez más "negativo"*	x < M (para M *conveniente ´negativo´)*
(2) f(x) *cada vez más "negativo"*	f(x) **< K** (para **K** dado)
(3) tanto como quiera. (esto significa que por más ´negativo´ que tomemos K, siempre encontraremos x convenientemente ´negativa´ tal que f(x) sea menor que K.) (Equivalentemente: f no es acotada inferiormente en la región del eje real correspondiente a valores de x muy ´negativos´ .)	∀ **K ,** ∃ M tal que...... 

Observación: en este caso la función no es acotada inferiormente en la región del eje real correspondiente a valores de x ´muy negativos´.

LUEGO, concluimos la siguiente **DEFINICIÓN FORMAL**:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{f(x)} = \mathbf{-}\,\infty \Leftrightarrow$ $\underline{\forall \mathbf{K}}$ **;** $\exists M$ tal que si $x < M$ entonces $f(x) < K$

Id) $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{f(x)} \nexists \Leftrightarrow$ cuando x se hace cada vez más grande
los f(x) *no tienen un comportamiento definido*

Ejemplo: f (x)= sen x

$\mathbf{lim}_{x \to +\infty}$ sen x ∄ ; cuando x se hace cada vez más grande sen x
no tiene un comportamiento definido (oscila entre 1 y -1)

➢ ***Propiedades del límite para x → ∞*** (usamos ∞ por ± ∞)

En el caso de funciones con límite *finito* para x → ∞ , valen los teoremas 1 ; 2 y 3
Sean f y g dos funciones tales que; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \mathbf{B}$.

TEOREMA 1: $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) + g(x)] = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

TEOREMA 2: $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) . g(x)] = \mathbf{A} . \mathbf{B}$.

TEOREMA 3: $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) / g(x)] = \mathbf{A} / \mathbf{B}$; [siempre que $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$]

2.6 Casos Generales de Indeterminación

A partir de ahora con la letra p nos referimos indistintamente a un punto x_0 ó ± ∞ .
En lo que sigue p y las funciones f, g ; h y k verifican las siguiente condiciones:

- $\lim\limits_{x\to p} \mathbf{f(x)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to p} \mathbf{g(x)} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to p} \mathbf{h(x)} = \mathbf{0}$; $\lim\limits_{x\to p} \mathbf{k(x)} = \mathbf{L}$ (L≠0)
- Bajo estas condiciones: ¿qué pasa con los siguientes límites?

Límite	**Resultado**
◆ $\lim\limits_{x\to p} [f(x) + g(x)] =$	+ ∞
◆ $\lim\limits_{x\to p} [f(x) - g(x)] =$	INDETERMINACIÓN [∞ - ∞]
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ f(x)/g(x)\ ] =$	INDETERMINACIÓN [∞ /∞]
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ f(x).g(x)\ ] =$	+ ∞
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ h(x).f(x)\ ] =$	INDETERMINACIÓN [0 . ∞]
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ f(x)^{g(x)}\ ] =$	+ ∞
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ h(x)^{f(x)}\ ] =$	0
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ f(x)^{h(x)}\ ] =$	INDETERMINACIÓN [∞^0]
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ h(x)^{h(x)}\ ] =$	INDETERMINACIÓN [0^0]
◆ $\lim\limits_{x\to p} [\ k(x)^{f(x)}\ ] =$	0 [para 0 < L < 1] <u>INDETERMINACIÓN</u> [**para L=1**] + ∞ [para L > 1]

***Ejemplo**:* ***Indeterminación del tipo** 1^{∞}* : $f(x) = (1 + 1/x)^{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+1/x\right)}_{1}{}^{x}\right]=\overset{+\infty}{\nearrow}\xrightarrow{\text{el resultado de este límite es el número}} e$$

En general tenemos

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to p}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}= \\ \\ y\ \ \lim_{x\to p} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\ \lim_{x\to p}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

NOTA: la demostración o prueba de los límites de la forma $f(x)^{g(x)}$, la hacemos a partir de la siguiente propiedad del logaritmo y su inversa la exponencial:

$$a^{b} = e^{\ln a^{b}} = e^{b.\ln a}$$

2.7 Propiedades de Funciones Continuas y Discontinuas

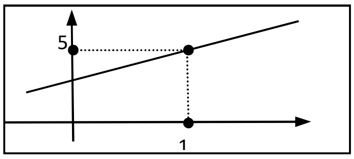
2.7.1 Discontinuidad en un Punto

DEFINICIÓN

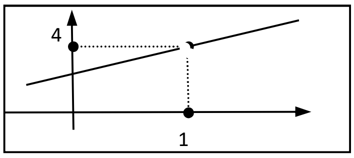
Discontinuidad	f *discontinua* en x_0 ⇔ f no es continua en x_0.

♦ ***Estudio general de las discontinuidades.***

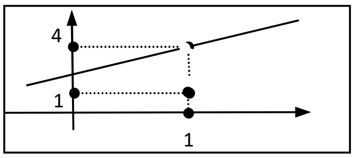
Ejemplo 1: $f(x) = 2x+3$ → $\lim_{x\to1} f(x) = 5$



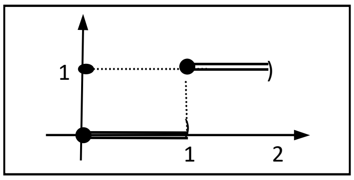
Ejemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ → $\lim_{x\to1} f(x) = 4$



Ejemplo 5: $f(x) = \begin{cases} x+3\ ;\ x\neq 1 \\ 1\ \ ;\ x=1\end{cases}$ → $\lim_{x\to1} f(x) = 4$



Ejemplo 6: $f(x) = [\,x\,]$ → $\nexists \lim_{x\to1} f(x)$



RESUMIENDO:

	Ej. 1	Ej. 3	Ej. 5	Ej. 6
f(1)	**5**	**∄**	**1**	**1**
L	**5**	**4**	**4**	**∄**
¿ $f(x_0)$= L?	**SI**	**NO**	**NO**	**NO**
¿ f continua en x_o?	**SI** continua	**NO** discontinua	**NO** discontinua	**NO** discontinua
gráfico	*continuo*	*´agujereado´*	*´agujereado´*	*´salto´*

- Si nos fijamos en las discontinuidades presentadas en los ejemplos, vemos que no revisten la misma "gravedad". Podemos decir que la discontinuidad del ej. 6 ("salto") es "irremediable", mientras que las de los ejs. 3 y 5 son "evitables"; una *pequeña modificación de la función* la puede transformar en continua. Así redefiniendo f de tal manera que f(1)=L, las funciones se "continuizan" (se salva la discontinuidad).
- ¿qué permite "continuizar" una función?: el hecho de que existe límite.

- ***Tipos de discontinuidades***

EVITABLES	→	si existe límite para $x \to x_0$	(Ejs 3 y 5)
INEVITABLES	→	no existe límite para $x \to x_0$	(Ej 6)

2.7.2 Propiedades de las funciones continuas

Acotación de funciones y continuidad:
Retomamos el concepto de función acotada a los efectos de ampliar el mismo e investigar la relación entre este concepto y la continuidad. Recordamos que:

- f acotada superiormente en D si existe K tal que $f(x) \leq K$; $\forall\, x \in D$
- f acotada inferiormente en D si existe K tal que $f(x) \geq K$; $\forall\, x \in D$.
- f acotada en D si existen K_1 y K_2 tal que $K_1 \leq f(x) \leq K_2$; $\forall\, x \in D$, ó, equivalentemente si existe K tal que $| f(x) | \leq K$; $\forall\, x \in D$

De las definiciones se desprende que una función es acotada (superior y/o inferior) si y solo si su imagen es un conjunto acotado (superior y/o inferior). Luego, para analizar el carácter de una función en este sentido, basta con analizar su conjunto imagen.

Así, son ejemplo de funciones:

- *acotadas*: seno (Im sen: [-1,1]); coseno (Im cos: [-1,1]);
  arc tg. (Im arc tg: $(-\pi/2; \pi/2)$)
- *acotadas superiormente*: $-x^2$ (Im f: $(-\infty, 0]$); sen x ; $-e^x$ (Im f: $(-\infty, 0)$);
- *acotada inferiormente*: e^x (Im f: $(0, +\infty)$; x^2 (Im f: $[0, +\infty)$; sen x.

Observaciones:

Tanto el seno como el arc tg son funciones acotadas, pues su conjunto imagen también lo es; pero no presentan el mismo "tipo" de acotación. Así:

Im sen = $[-1 ; 1]$ (intervalo cerrado) ; Im arc tg = $(-\pi/2; \pi/2)$ (intervalo abierto)

- cotas superiores de *Im sen* : $5 ; \pi ; 3/2 ; 1.3 ;$ **1** (menor cota superior)
- cotas superiores de *Im arc tg*: $5 ; \pi ; 5/2 ; 1.6 ;$ **π/2** (menor cota superior)

Si un conjunto es acotado (o acotado superiormente) tiene infinitas cotas superiores y, entre todas ellas existe una que es la ***menor*** de todas**.** El carácter de esta cota depende del conjunto imagen, si es cerrado o abierto, ya que como puede verse de los ejemplos la *menor cota superior* coincide con el *extremo superior del intervalo imagen* . Luego, y en relación al valor de la función en este punto, puede darse que la misma esté definida en él (si el intervalo imagen es cerrado superiormente) o no (intervalo abierto).

Así; Im sen = $[-1 ; 1]$ $\Rightarrow$ existe $x^* \in Df$ tal que sen $x^* = \mathbf{1}$ (menor cota sup.) ($x^*=\pi/2$)
Im arctg = $(-\pi/2; \pi/2)$ $\Rightarrow$ no existe $x^* \in Df$ tal que arctg $x^* =$ **π/2** (menor cota sup.)

Observamos lo mismo en el caso de una función acotada inferiormente; en cuyo caso existe la ***mayor cota inferior*** en la cual, la función puede o no estar definida. Para distinguir estas situaciones introducimos nuevos conceptos

DEFINICIÓN

supremo ***ínfimo***	◆ Supremo de f (*sup. f*): menor cota superior del conjunto Im f. ◆ Infimo de f (*inf. f*): mayor cota inferior del conjunto Im f.

DEFINICIÓN

máximo	◆ si existe x* tal que *sup f* = f(x*) entonces al supremo de f se le da el nombre de ´máximo de f´, que se indica: *max f.*
mínimo	◆ si existe x** tal que *inf f* = f(x**) entonces al ínfimo de f se le da el nombre de ´mínimo de f´, que se indica: *min f.*

<u>*Equivalentemente*</u>:

- El ´*max f* ´ es el mayor valor de la función en todo su dominio; o sea,
  $M = máx f \Leftrightarrow$ existe $x^* \in Df$ tal que $M = f(x^*)$ y $f(x^*) \geq f(x); \forall x \in Df$
- El ´*min f* ´ es el menor valor de la función en todo su dominio,
  $m = mín. f \Leftrightarrow$ existe $x^{**} \in Df$ tal que $m = f(x^{**})$ y $f(x^{**}) \leq f(x) ; \forall x \in Df$

Vemos a continuación otras propiedades importantes de las funciones continuas, particularmente aquellas que tienen que ver con la acotación de la función.

TEOREMA 14: f continua en [a; b] $\Rightarrow$ f es *acotada* en [a; b] (s/d)
O sea, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es una función acotada en ese intervalo.

▪ Por otro lado una función acotada en cierto domino tiene, cuanto menos, supremo e ínfimo. Si bien este dato es importante en sí mismo, mucho más útil es saber si la función tiene máximo y/ó mínimo. Luego, ¿existirán propiedades de la función que permitan decidir cuando una función tiene máximo y mínimo?

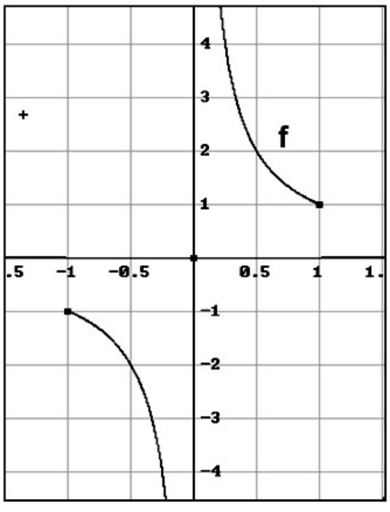
TEOREMA 15: (de Weiertrass) (s/d)
Si f es continua en [a; b] entonces existen máximo y mínimo absolutos de f en [a; b].

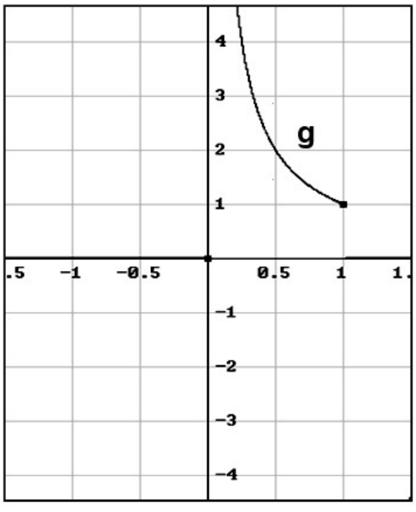
Observaciones:
1) Tenemos así que la continuidad en un cerrado y acotado es *condición suficiente* para que la función alcance un valor máximo y un valor mínimo en ese dominio.
2) El intervalo debe ser cerrado y acotado, la continuidad sola no garantiza la existencia de extremos absolutos. Así por ejemplo, *f(x) = log x* con Df = (0,1] es continua pero no tiene mínimo en ese dominio (no está acotada inferiormente).
3) La función debe ser continua, un dominio cerrado y acotado no garantiza la existencia de extremos. Así por ejemplo, dada

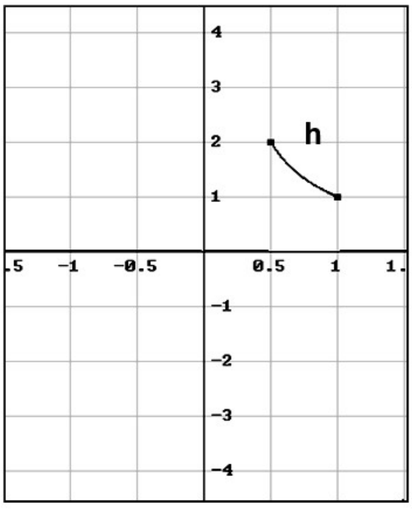
$$f(x) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{x}\,; \ -1 \leq x \leq 1; x \neq 0 \\ 0; \ x = 0 \end{cases}$$

no tiene máximo ni mínimo, pues no es acotada en un entorno del cero.
4) Observamos también cómo, si modificamos el dominio, funciones con la misma ley pueden pasar de continua a discontinua y viceversa. O sea, comprobamos nuevamente la importancia del dominio en la definición del concepto de función, como influye en el carácter o propiedades de la misma y comprendemos la atención prestada a este punto en el capítulo 1, donde insistimos en que una función es más que la ley de correspondencia, que el dominio es parte constitutiva del concepto, con peso propio.

- *f* con Df = [-1,1] siendo $f(x) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{x}\,; \ -1 \leq x \leq 1; x \neq 0 \\ 0; \ x = 0 \end{cases}$; no tiene máximo ni mínimo.
- *g* con Dg =[0,1] siendo $g(x) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{x}\,; \ 0 < x \leq 1 \\ 0; \ x = 0 \end{cases}$; no tiene máximo, sí tiene mínimo: *min.g* = g(0) = 0.
- *h(x) = 1/x,* con Dh =[½ , 1]; tiene máximo: *max. h* = h(½) = 2 y tiene mínimo: *min. h* = h (1) = 1

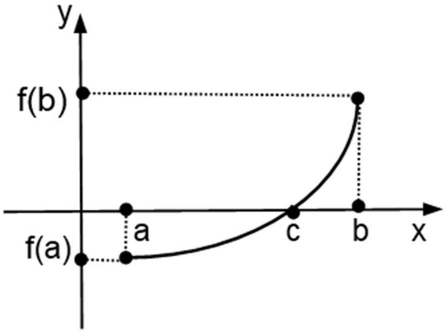






TEOREMA 16: (de Bolzano) (s/d)

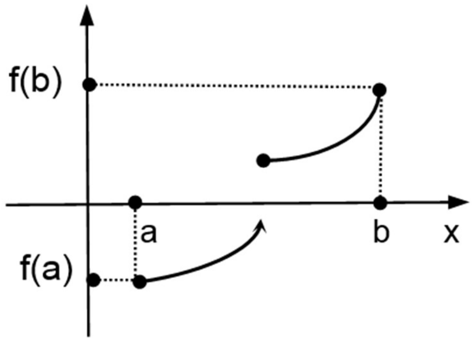
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ f \text{ continua en } [a;\, b] \\[1ex] \bullet\ \ \text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b) \\[1ex] \qquad (\, f(a) \,.f(b) < 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ c \in (a;\, b) \ \text{ tal que } \ f(c) = 0$$

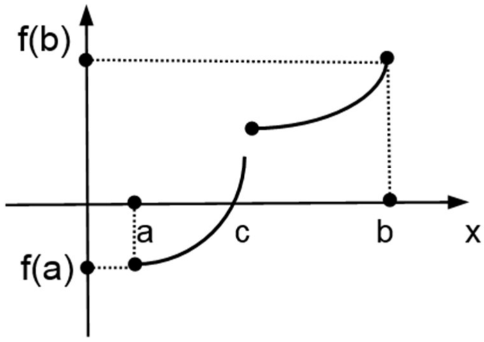


Observaciones:

1) Si una función f es continua en [a;b] y, por ejemplo, f(a)< 0 y f(b)>0 entonces para pasar del punto (a, f(a)) al punto (b, f(b)) la graf f debe, *necesariamente,* cortar al eje x; o sea, cada vez que una función continua en un intervalo tenga signo distinto en los extremos del mismo estamos en condiciones de asegurar que la función tiene al menos un cero en ese intervalo.

2) Para una función f discontinua en un intervalo el hecho de que tenga signo distinto en los extremos del mismo no permite asegurar nada respecto de la existencia de ceros.





3) este teorema facilita la detección de ceros de una función y resulta particularmente útil cuando las fórmulas o métodos de cálculo que conocemos a este efecto (resolverte de la ecuación de 2do grado, Ruffini para ceros de polinomios, etc), no pueden ser aplicadas.

Así por ejemplo dado $p(x) = 25 \cdot x^3 + 35 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 5{,}6$, tenemos que:

- p es continuo en todo los reales; luego, es continuo en cualquier intervalo cerrado.
- $p(-2) = -57{,}6$ y $p(-1) = 8{,}4$; p continuo en $[-2, -1]$

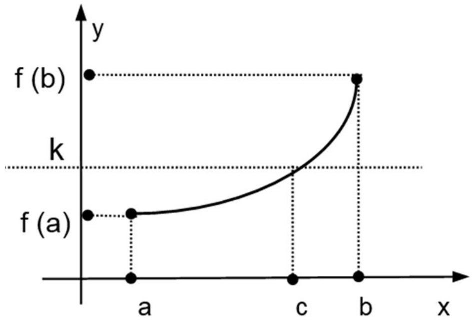
Luego, p presenta una raíz o cero en el [-2, -1].

Ejercicio : - Demostrar que p tiene otra raíz real en el [-1 , 0] .
- ¿tiene p otra raíz? ; ¿real o compleja?; ¿en qué intervalo?
- p (-1,5) = -5,225. Este dato, ¿Qué información proporciona?

TEOREMA 17 : (del valor *intermedio*)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continua en } [a; b],\quad f(a) \neq f(b) \\ \bullet\ k \in R \text{ un número entre } f(a) \text{ y } f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a; b) \text{ tal que } f(c) = k$$

Demostración:



Suponemos f(a) < f(b).
En tal caso, para k tenemos: f(a) < k < f(b)
Definimos g(x) = f(x) – k

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g \text{ continua en } [a; b] \\ \bullet\ g(a) = f(a) - k < 0 \\ \bullet\ g(b) = f(b) - k > 0 \end{array}\right\} \overset{\text{BOLZANO}}{\Rightarrow} \exists\ \mathbf{c \in (a; b)} \text{ tal que } g(c) = 0$$

pero, $g(c) = f(c) - k \Rightarrow f(c) - k = 0 \Rightarrow \mathbf{f(c) = k}$

Corolario:

Dada f continua en [a,b] con m y M, mínimo y máximo absolutos de f en [a,b] , entonces f toma todos los valores comprendidos entre m y M; es decir, Imf = [m , M].

➢ ***Comportamiento de f en un entorno de un punto de continuidad.***

Dijimos que las 3 condiciones que caracterizan la continuidad en un punto pueden ser resumidas en una sola: f continua en $x_o \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Dicho de otra forma, f continua en x_o , si y sólo si para x suficientemente próximo a x_o, f(x) resulta próximo a $f(x_o)$; o sea, si para x suficientemente próximo a x_o, f(x) difiere de $f(x_o)$ en una cantidad ´infinitesimal´
En el siguiente teorema esta idea ($x \approx x_0$ entonces $f(x) \approx f(x_0)$) se formula a través de una expresión algebraica, hecho este que resulta de gran utilidad a la hora de ´operar algebraicamente´ con el concepto de límite, hacer demostraciones.

TEOREMA 18: (de escritura fuera del límite)

$\lim\limits_{x \to xo} f(x) = L \Rightarrow f(x) - L = \varepsilon(x)$, con ε infinitésimo para $x \to x_0$ (*)

(*) decimos que ε es un <u>infinitésimo</u> para $x \to x_0$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to xo} \varepsilon(x) = 0$

demostración:
si $\varepsilon(x) = f(x) - L$, y aplicamos límite a ambos lados:

$$\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = \lim_{x \to xo} (f(x) - L)$$

$$\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = \lim_{x \to xo} f(x) - \lim_{x \to xo} L \quad \text{(por teor. 1 de límite)}$$

$$\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = L - L$$

$$\lim_{x \to xo} \varepsilon(x) = 0$$

Luego, f (x) – L es un infinitésimo para $x \to x_0$ y podemos escribir, $f(x) = L + \varepsilon(x)$

Corolario: si f es continua en x_0 entonces:

$$f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x), \text{ con } \varepsilon \text{ un infinitésimo para } x \rightarrow x_0 \quad (f(x) \approx f(x_0))$$

Observación:

Los *infinitésimos* juegan un rol muy importante en la teoría del cálculo diferencial a la vez que proporcionan una herramienta muy útil para el análisis del comportamiento de una función. A esto último también contribuyen los *infinitos.*
En lo que sigue definimos y analizamos la utilidad de estos conceptos.

2.8 Infinitésimo e infinitos.

2.8.1 Infinitésimos

DEFINICIÓN: *f es un infinitésimo para* $x \rightarrow p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = 0$

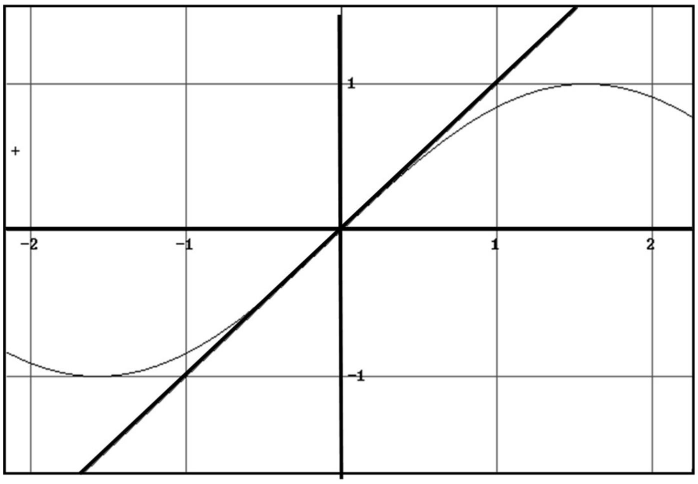
Usamos la letra p para referirnos indistintamente a un nro, $+\infty$ ó $-\infty$.
Una función cuyo límite es cero para $x \rightarrow p$, es una función cuyos valores se hacen ´infinitamente pequeños´ al desplazarse x en el sentido indicado, de allí que le damos el nombre de infinitésimo.
Ejercicio:
Para las funciones a continuación te pedimos que analices si existe ´p´ tal que la misma resulte un infinitésimo para $x \rightarrow$ p.

$$\text{sen } x \ ; \quad x^2 - 2x + 1 \ ; \quad 1/x \ ; \quad \ln x \ ; \quad e^x$$

- ***Comparación de infinitésimos.***

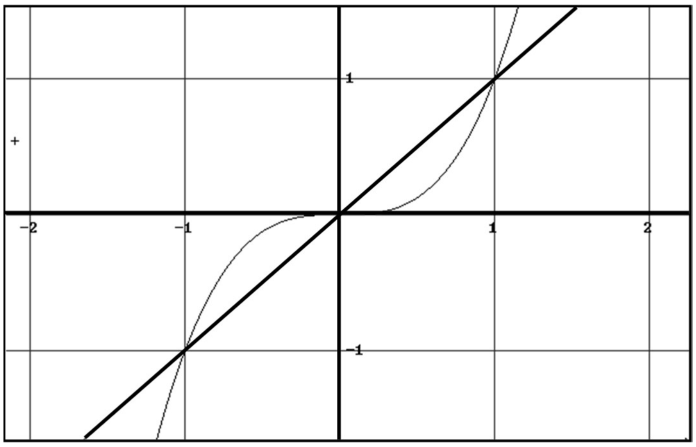
El cociente de dos infinitésimos es una forma indeterminada (0/0), siendo por lo tanto imposible establecer, a priori, sin efectuar el límite, cual puede ser el resultado del mismo. Sin embargo una vez calculado, su valor proporciona una información muy rica en cuanto al comportamiento de uno de los infinitésimos con respecto al otro.

Por ejemplo vimos que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{senx}}{x} = 1$, y que este resultado nos dice que en un entorno del origen, sen x ≈ x; o dicho de otra manera, que sen x se aproxima a cero prácticamente con la misma rapidez con que lo hace x´s.



Si hacemos el gráfico de los infinitésimos x^3 y x vemos que no sucede lo mismo, que x^3 tiende a cero mucho más rápido que x.
¿Qué sucede en este caso con el límite?

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0$$



O sea, vemos que el límite del cociente entre dos infinitésimos brinda una herramienta para ´***comparar***´ el comportamiento de uno de ellos con respecto al otro.

- Siendo f y g dos infinitésimos para x→ p, decimos que:

1) f y g son infinitésimos equivalentes si: $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

2) f y g son infinitésimos del mismo orden si: $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L\neq 0$

3) f es un infinitésimo de orden superior a g si: $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

4) g es un infinitésimo de orden superior a f si: $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

5) f y g no son comparables si: $\nexists\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$

Actividad:

a) analizar que informan (3) y (4) acerca del comportamiento de g con respecto a f.

b) La identidad, Id (x) = x , es infinitésimo para x→0 el cual recibe el nombre de ´infinitésimo fundamental´, pues es el que normalmente se usa para ´comparar´ con otro cuya rapidez de convergencia a cero se quiere estimar.
Te pedimos que, entre los infinitésimos para x→0 indicados a continuación, establezcas cuales resultan equivalentes al infinitésimo fundamental:

sen x ; $x.\,e^x$; tg x ; $x - x^3$; $2x - x^3$; $x^2 - x^3$; x. sen 1/x ; x. cox(tg^2x).

2.8.2 Infinitos

DEFINICIÓN: *f es un infinito para x→p* $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x) = \infty$

Usamos la letra p para referirnos indistintamente a un nro, + ∞ ó - ∞ .
Usamos el símbolo ∞ para referirnos indistintamente a + ∞ ó - ∞ .

Una función cuyo límite es + ∞ ó - ∞ para x→p, es una función cuyos valores se hacen ´infinitamente grandes´ (en valor absoluto) al desplazarse x en el sentido indicado, de allí que le damos el nombre de infinito.

Ejercicio:

Para las funciones a continuación te pedimos que analices si existe ´p´ tal que la misma resulte un infinito para x→ p.

sen x ; x^2 -2x +1 ; $1/x^2$; ln x ; e^x

Al igual que los infinitésimos, los infinitos se pueden ´comparar´ y establecer así con que rapidez van creciendo sus valores.

- ***Comparación de infinitos.***

Siendo f y g dos infinitos para x→ p, decimos que:

1) f y g son infinitos equivalentes si: $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

2) f y g son infinitos del mismo orden si: $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$

3) f es un infinito de orden superior a g si: $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

4) g es un infinito de orden superior a f si: $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

5) f y g no son comparables si: $\nexists \lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

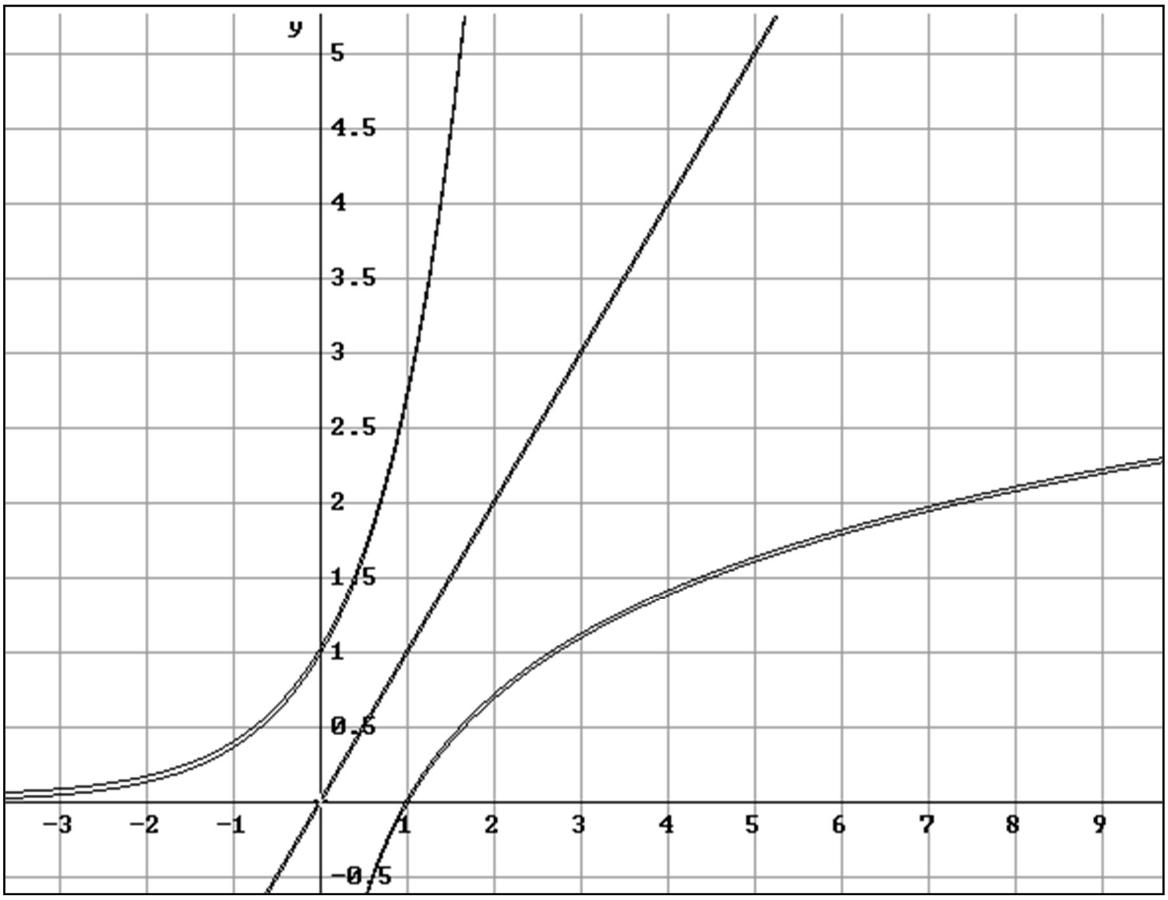
Actividad:

a) analizar que informan (1), (3) y (4) acerca del comportamiento de g con respecto a f.

b) La identidad, Id (x) = x , es infinito para x→ ∞ el cual recibe el nombre de ´infinito fundamental´, pues es el que normalmente se usa para ´comparar´ con otro cuya ´rapidez de crecimiento´ se quiere estimar.
Te pedimos que, entre los infinitos para x→ ∞ indicados a continuación, establezcas cuales resultan equivalentes al infinito fundamental:

$4x-2$; $x + 1000$, $x^3 + x$; $x^2 - x^3$; $x.^2 \text{ sen } 1/x$;
$\sqrt{x}$; $x.^2 \text{ sen } 1/x$; e^x ; $\ln x$.

(para las dos últimas funciones decidir por ´comparación´ de ´gráficos´)



2.9 Actividades: límite y continuidad.

1) Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$, se pide :

a) Explicar, en palabras, que dice esta expresión acerca del comportamiento de f

b) En un sistema coordenado x-y marcar sobre el eje x un entorno cualquiera de $x_o=3$. Señalar luego una región del plano en la que con seguridad se puedan encontrar imágenes de x por f, para los x´s antes marcados. Identificar una región del plano la cual contenga parte del graf f.

c) Graficar , si es posible, una función que se comporte según lo que indica este límite y tal que $f(3) = 2$.

d) Si $g(x) = f(x) + 2$: ¿cuanto vale $\lim_{x\to 3} g(x)$?

e) Si $h(x) = f(x) + \mu$ y $\lim_{x\to 3} h(x) = 10$, ¿cuánto vale μ?

f) Si $k(x) = f(x) + \omega$ y $\lim_{x\to 3} k(x) = 0$, ¿cuánto vale ω?

2) Un artesano debe cortar cierta cantidad de piezas cuadradas de una plancha de metal de 5 cm. de ancho. Para ello realiza marcas sobre la misma, las cuales, debido a errores propios del sistema que emplea, no resultan todas de igual longitud; es decir, no todas las piezas quedan con un largo exacto de 5 cm.

a) ¿Qué área (A_o) deberían tener *exactamente* los cuadrados ?

b) Si indicamos con x el largo *real* de cada corte, expresar A (*área real de la pieza*) en función de x , $A = f(x)$.

c) Si la obra que el artesano desea realizar soporta una diferencia de ± 1 cm^2 en el área de cada pieza, ¿ cuál es el rango, en cm., en que puede variar la longitud del corte de modo que la pieza sirva, aún cuando no resulte *exactamente cuadrada*?

Sugerencias:

- i) Hallar el intervalo de valores admisibles para A. (¿con que otro nombre, que no sea el de ´intervalo´, podemos nombrar este conjunto?)
- ii) En un sistema coordenado x-A graficar el conjunto obtenido en (i).
- iii) En el mismo sistema graficar A como función de x.
- iv) Obtener, gráfica y analíticamente, los valores admisibles para x según las condiciones de trabajo planteadas.

d) En términos de la definición ε–δ de $\lim_{x\to 5} A(x) = L$, ¿quién es L en este caso? ; ¿Quién es ε?; ¿cuál es el δ que le corresponde?

3) Para los valores de a, c y ε y las funciones que se indican a continuación, determinar gráficamente, de ser posible, un E*(a, r) tal que:
´si $x \in E^*(a,r)$ entonces $f(x) \in E(c, \varepsilon)$´

a) $f(x) = x+2$; $a = 2$; $c = 4$, $\varepsilon = ½$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \,;\, x \neq 2 \\ 1 \,;\, x=2 \end{cases}$; $a = 2$; $c = 4$, $\varepsilon = ½$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $a = 2$; $c = 4$, $\varepsilon = ½$

d) $f(x) = \begin{cases} x \;;\; x < 2 \\ x+2 \;;\; x > 2 \end{cases}$; $a = 2$; $c = 3$, $\varepsilon = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} x \;;\; x < 2 \\ x+2 \;;\; x > 2 \end{cases}$; $a = 2$; $c = 3$, $\varepsilon = ½$

4) Estimar a partir del gráfico de f si existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Indicar el valor (si existe).

a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$

c) $f(x) = e^x + 1$

d) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x+1 \;;\; x < 0 \\ -3 \;;\; x = 0 \\ e^x \;;\; x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = 2^{|x|}$

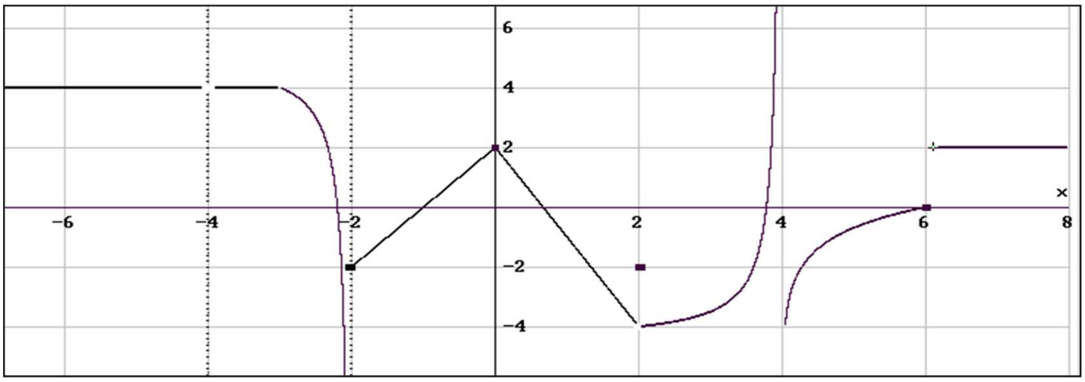
g) $f(x) = 2^{\frac{|x|}{x}}$

h) $f(x) = (2x-1)^2 - 2x^2 + 2x - 5$

i) $f(x) = \ln(x+1)$

j) $f(x) = \begin{cases} x+3 \;;\; x > 0 \\ 2x \;;\; x < 0 \end{cases}$

5) Dado el gráfico de f , se pide:
Indicar el domino y analizar la existencia de límite de la función para x → a, para a = -4, -3 , -2, -1, 0 , 2 , 4 , 6. Si existe el límite, indicar su valor.



6) Dada f con dominio en el [0;5] y $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ se pide indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) ó falsas (F) justificando las respuestas con alguna propiedad, teorema o definición si es verdadera y con un contraejemplo en caso de no lo sea.

a) f es continua en $x_o = 2$.

b) f es continua en [0;5] .

c) Si $x = 2+\Delta x$ con $\Delta x \approx 0$ entonces $f(x) \approx f(2)$.

d) Si $p(x) = f(x) + 3$ entonces $\lim\limits_{x\to 2} p(x) = f(2) + 3$.

e) Si $q(x) = f^2(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to 2} q(x) = f^2(2)$.

f) Si $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ entonces g es continua en $x_o = 2$.

g) Si $h(x) = \sqrt{f(x)}$ entonces h es continua en $x_o = 2$.

h) Si $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;5]$ entonces $h(x) = \sqrt{f(x)}$ es continua en $x_o = 2$ y

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} f(x)} = \sqrt{f(2)}$$

i) Si $f(x) > 0$, $\forall x \in [0;5]$ entonces $k(x) = \ln\ (f(x))$ es continua en $x_o = 2$ y

$$\lim_{x\to 2} k(x) = \lim_{x\to 2} \ln(f(x)) = \ln\left[\lim_{x\to 2} f(x)\right] = \ln[f(2)]$$

7) Indicar V ó F, justificando con algún teorema, definición, propiedad ó contraejemplo:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \lfloor 3x^2 - x + 2 \rfloor = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + \pi}{x + 5} = \dfrac{4 + \pi}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \log(x+1) = 1$

d) $\lim\limits_{x\to x_o} \log(x+1) = \log(x_o + 1)$

h) $\lim\limits_{x\to 25} \sqrt{x} = 5$

i) $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

j) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^2}{\log x} = 100$

k) $\lim\limits_{x\to -10} \dfrac{x^3}{\log x} = -1000$

8) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \lfloor 3x^3 - 2x - 1 \rfloor =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 3}{x - 2} =$

c) $\lim\limits_{x\to \pi} \cos(9x - \pi) =$

d) $\lim\limits_{x\to 3\pi/2} \dfrac{\cos x + 1}{\operatorname{sen} x} =$

i) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 31)^{1/3} =$

j) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x + 3}{x^3 - 1} =$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{3x + 1} =$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(ax) + 1 =$

e) $\lim\limits_{z\to 0} (\,2\,\text{sen}\, z + z^2\,) =$

f) $\lim\limits_{x\to 1} (2x+3)^{4x-5} =$

g) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\text{sen}(3z)+a}{2+z} =$

n) $\lim\limits_{x\to 5} \ln\left(\dfrac{4x-10}{x}\right) =$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(2x^2+3a^4+1\right) =$

p) $\lim\limits_{a\to 0} \ln\left(2x^2+3a^4+1\right) =$

9) Dadas las funciones $F(x) = \dfrac{(x+3)^2-9}{x}$ y $G(x) = x+6$ se pide:

a) Analizar si F está definida en $x_o = 0$. ¿La no existencia de la función en un punto implica la no existencia de límite en dicho punto?

b) Analizar si F y G son funciones iguales. Si no lo fueran indicar en que difieren. Graficar ambas.

c) Analizar la veracidad de esta afirmación: $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} G(x)$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$.

10) Dadas las funciones $F(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ y $G(x) = \dfrac{1}{x+1}$ se pide:

a) Analizar si F está definida en $x_o = 1$. ¿La no existencia de la función en un punto implica la no existencia de límite en dicho punto?

b) Analizar si F y G son funciones iguales. Si no lo fueran indicar en que difieren. Graficar ambas.

Analizar la veracidad de esta afirmación: $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = \lim\limits_{x\to 1} G(x)$. Calcular $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$.

11) Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-2x}{3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{3x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{1/2}-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{(x+1)^{1/2}-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2-x)^{1/2}-1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+5x+3}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-2x}$

k) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{2x^2-4x-6}$

l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

n) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

o) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right]$

12) Analizar si existe un número real ´a´ tal que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + a.x + a - 10}{x^2 + 2x - 8} = L$.

Si existe indicar quien es ´a´ y quien ´L´.

13) Mostrar por medio de un ejemplo que $\lim\limits_{x\to x_o} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque no exista $\lim\limits_{x\to x_o} [f(x)]$ ni $\lim\limits_{x\to x_o} [g(x)]$. (Sugerencia: considerar la función signo ´SG´).

14) Calcular.

a) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+4}{2+\sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arcsen}(x^2 - 1)$

f) $\lim\limits_{x\to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

g) $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2 - x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1 - \operatorname{tg}^2 x)$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$

15) i) Indicar verdadero o falso justificando la respuesta:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = \dfrac{\operatorname{sen} f(0)}{f(0)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pi \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$

ii) Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(3x)}{5x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\operatorname{sen} x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(8x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x^2-9}$

f) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x^2-9}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(4x)}{\operatorname{sen}(8x)}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x}$

j) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\operatorname{sen}(x-4)}{(4-x)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x-4)}{(4-x)}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(\ x))}{\operatorname{sen}(\ x)}$

16) i) Graficar una función ´f´ con dominio en el [0 ; 6] tal que :

$f(0) = 4$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4$; $f(2)=5$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 6$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$; $f(6) = 3$

¿ Es f continua en [0; 6] ? . ¿ Porqué ? .

ii) Analizar la existencia de límite para la función y el punto que se indican

a) $$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & ; \ x \leq 0 \\ x & ; \ x > 0 \end{cases}$$ $(x_o = 0)$

e) $$f(x) = \frac{|x|.(x^2+1)}{x} \ ; \ (x_o=0)$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x+3 & ; \ x \leq 10\ 0 \\ 2x-2 & ; \ x > 100 \end{cases}$$ $(x_o=100)$

f) $$f(x) = \frac{\text{sen } x + |\text{sen } x|}{x} \ ; \ (x_o=0)$$

g) $$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & ; -5 < x < 0 \\ 2 & ; \ x = 0 \\ \text{sen } x + 4 & ; \ 0 < x < 5 \end{cases}$$ $(x_o = 0; \pi; -\pi)$

c) $$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & ; \ x \leq 1 \\ 1/(2-x) & ; \ x > 1; \ x \neq 2 \end{cases}$$ $(x_o=1)$

d) $$f(x) = \begin{cases} x+4 & ; \ x \leq 0 \\ x+8 & ; \ x > 0 \end{cases}$$ $(x_o = 0)$

h) $$f(x) = \begin{cases} x - 950 & ; \ x < 10^3 \\ 50 & ; \ x = 10^3 \\ \log x & ; \ x > 10^3 \end{cases}$$ $(x_o = 10^2; 10^3; 10^4)$

iii) Si con [x] indicamos el mayor entero que es menor o igual a x, hallar, si existen, los siguientes límites: (sugerencia: graficar las funciones)

$\lim\limits_{x\to 3^+} [x]$; $\lim\limits_{x\to 3^-} [x]$; $\lim\limits_{x\to 3} [x]$; $\lim\limits_{x\to 3,5} [x]$;

$\lim\limits_{x\to 3^+} [x].(x-3)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} [x].(x-3)$; $\lim\limits_{x\to 3} [x].(x-3)$

17) En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorenz

$$L = L_o \sqrt{1 - \left(v^2 \big/ c^2 \right)}$$

L_o= longitud del objeto en reposo
c = velocidad de la luz

expresa la longitud ´L´ de un objeto en función de su velocidad ´v´ respecto a un observador.

a) ¿Cuál es el dominio natural de esta función ?

b) Analizar cual de los límites que se proponen a continuación ´tiene sentido´, calcular aquél que cumpla esta condición y luego interpretar físicamente el resultado obtenido:

$$\lim_{v\to c^+} L \ ; \ \lim_{v\to c^-} L \ ; \ \lim_{v\to c} L$$

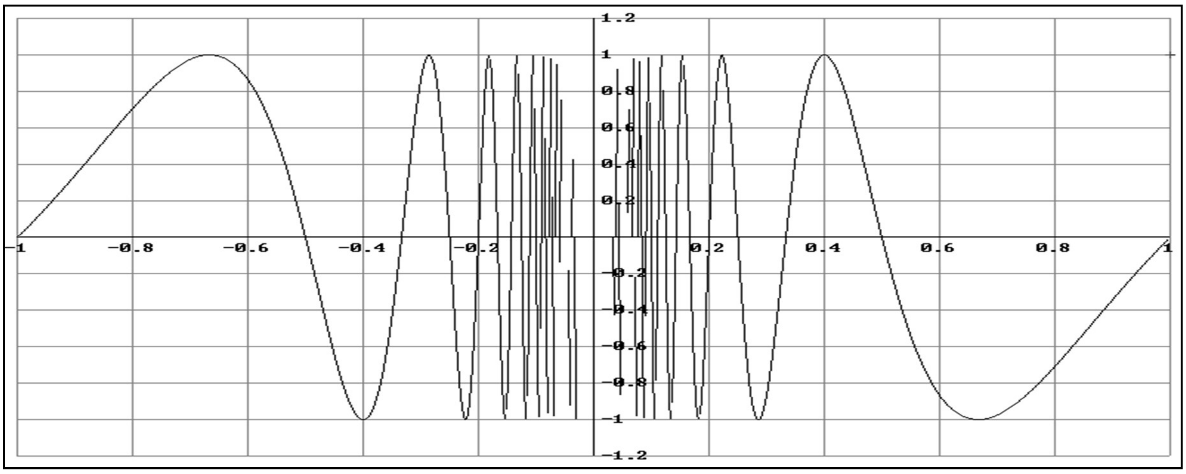
18) La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en $x_o = 0$. En función de ello se decide estudiar su comportamiento para $x \rightarrow 0^+$. Para ello, y en una primera instancia, se acude al análisis numérico de los datos proporcionados por las siguientes tablas de valores (completarlas).

TABLA	I
x	Sen (π/x)
1	Sen (π) = 0
½	Sen (2π)
1/3	
.....	....
1/10	
1/n	

TABLA	II
x	sen (π/x)
2	sen (π/2) = 1
2/ 5	sen (5 π/2)= 1
2/ 9	
2/ 13	
....	......
2/(1+4n)	

a) En función de la información proporcionada sólo por la TABLA I, ¿qué podríamos llegar a concluir acerca del comportamiento de f para $x \rightarrow 0^+$? Con base a la información proporcionada por las dos tablas realizar una conjetura acerca del comportamiento de f para $x \rightarrow 0^+$.

b) Analizar el siguiente gráfico (gráfico de f) y decidir luego acerca de la validez de la conjetura hecha en el ítem anterior. Finalmente, concluir acerca del $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(\pi/x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(\pi/x)$



19) i) Para los siguientes límites analizar cual de ellos admite ser resuelto aplicando el teorema 2 (límite de un producto, pag. 134) o el teorema 13 (de encaje o intercalación, pag. 141). Calcular los límites aplicando el teorema que corresponda en cada caso.
(Sugerencia: recordar que $|\operatorname{sen} \alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha \in R$)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left[x^2 . \operatorname{sen}(\pi/x) \right] =$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[(x-1) . \operatorname{sen}(\pi/x) \right] =$

c) $\lim\limits_{x \to 3} [x].(x-3) =$

ii) Explicar porqué es verdadera la siguiente afirmación:
"Si f y g son tales que $|f(x)| \leq k$ para todo x en un entorno de 'a' (k= cte) y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = 0$".

20) Hallar gráficamente (si existen), el o los valores de "a" para los cuales $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + 2$ e) $f(x) = \dfrac{-2}{|x-2|}$ g) $f(x)= \dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|x-2|}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ f) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ h) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2+4}$

21) Graficar las siguientes funciones y leer del gráfico los límites indicados:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$ e) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-4}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} (-\ln x)$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$ | f) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-4}{x-2}$

22) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$ ó $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$ ó $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$, entonces la recta x =a es una asíntota vertical para la curva correspondiente a y = f(x). Para las funciones que se dan a continuación se pide indicar (si existen) las ecuaciones de las asíntotas verticales.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x+4}$ e) $f(x) = \ln(x-3)$ g) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + 2$ d) $f(x) = \dfrac{3x-5}{6x-10}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ h) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

23) Graficar y determinar del gráfico si existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ d) $f(x) = 4x$ g) $f(x) = \dfrac{4^x}{8^x}$ j) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

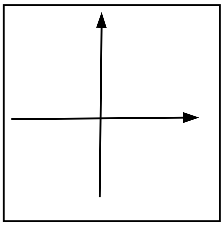
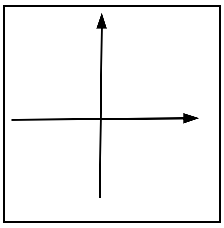
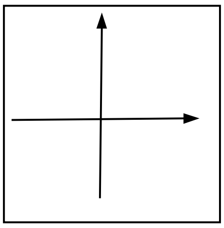
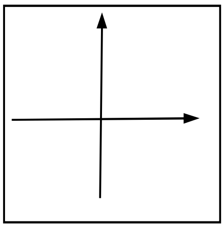
b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ e) $f(x) = x^2 - 1$ h) $f(x) = \operatorname{sen} x$ k) $f(x) = e^{-x}$

c) $f(x) = 3$ f) $f(x) = -x^2$ i) $f(x) = \ln x$ l) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi / x)$

24) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$ ó $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$, entonces la recta y = k es una asíntota horizontal para la gráfica de la curva correspondiente a y = f(x) . Para las funciones que se indican a continuación se pide dar (si existen) las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	d) $f(x) = e^{-x}$	g) $f(x) = \dfrac{4^x}{8^x}$	j) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x+4}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 2$	e) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x}$	h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$	k) $f(x) = e^x + 2$
c) $f(x) = 3$	f) $f(x) = \text{arc tg } x$	i) $f(x) = \ln x$	l) $f(x) = \text{sen } x$

25) Completar el cuadro adjunto, realizando primero las gráficas correspondientes:

	a > 0	**a < 0**
n par	 $\lim_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim_{x\to+\infty} a.x^n =$	 $\lim_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim_{x\to+\infty} a.x^n =$
n impar	 $\lim_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim_{x\to+\infty} a.x^n =$	 $\lim_{x\to-\infty} a.x^n =$ $\lim_{x\to+\infty} a.x^n =$

26) **Si** f y g son dos funciones tales que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ decimos que f y g son funciones ´equivalentes´ para x → +∞ ; o sea, son funciones que para valores muy grandes de x´s tienen prácticamente ´el mismo comportamiento´, por ejemplo, si una tiende muy lentamente a infinito la otra también lo hace.

Efectivamente, que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ indica que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \cong 1$; o sea, que $f(x) \approx g(x)$

a) dados $p(x) = 3\ x^5 + 15\ x^3 + 4\ x^2 + 3$ y $q(x) = 3\ x^5$ demostrar que p y q son equivalentes. Usar este resultado para concluir acerca del $\lim_{x\to+\infty} p(x)$.

b) dado $p(x) = a.\ x^n + a_{n-1}\ .\ x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\ .x + a_o$ analizar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando la respuesta.

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} a\ .x^n$$

27) Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^2 + 8) =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x^8 - 4x^3 + 3) =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^7 + 8x^3 - 3x + \pi) =$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2.x^5 + 4.x + \ln 3) =$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 8x - 1}{3x^3 - 8x + 1} =$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 8x^3 - 1}{3x^3 - 8x + 1} =$

g) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{9 - 3t^3}{3.t^2}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} =$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 + 2x^3} =$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 5x^3 + 3}{2.x^3 + x^6 + 7x - 1} =$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2 - 2x + 3}{0.5.x^2 + 2x - 1} =$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2.(x - 8)^{35}.}{.(x - 1)^{35}}$

m) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(t - 3).(t - 4)}{3.t \ \ (t + 1)}$

n) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{(t - 3)^3.}{.t^2}$

28) *Límites del cociente de funciones en general.*
Completar la tabla que sigue, teniendo en cuenta que con p indicamos un punto x_o, $+\infty$ ó $-\infty$ y, con ∞ nos referimos a $+\infty$ o el $-\infty$.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7
Lim f(x)= x→p	L1	L1 ≠0	0	∞	L1 ≠0	∞	0
Lim g(x)= x→p	L2 ≠0	∞	∞	∞	0	0	0
Lim f /g = x→ p					∞ si:	∞ si:	

En base a la tabla calcular los siguientes límites.
En caso de ser posible graficar las funciones y verificar los resultados, tanto los de los ejercicios como los de la tabla:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{|x|} =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{e^x} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} =$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} =$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x}{3^{-x}} =$

29) Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones (si existen). Clasificarlos.

a) $f(t) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{4}{x^2-4x+5}$

e) $f(x) = \frac{4}{x^2-4x-5}$

f) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

g) $f(x) = e^{1/x}$

h) $f(x) = \operatorname{tg}\ x$

i) $f(t) = \frac{\operatorname{sen}(3.t)}{t}$

j) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

k) $f(x) = \ln(x^2+1)$

l) $f(x) = 1/\ln(x^2+1)$

m) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}.4x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 1 & ;\ x = 0 \end{cases}$

n) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & ;\ x \neq 2 \\ 2 & ;\ x = 2 \end{cases}$

30) a) Analizar la continuidad en el punto que se indica en cada caso para las funciones de la **Actividad (16)** (ii)- pág. 167. Clasificar las discontinuidades.

b) Idem para $x = 0$ y las funciones de la **Actividad (4)** – pág. 163.

31) Hallar el valor de las constantes de modo que las funciones definidas a continuación resulten continuas en R

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}.4x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ A & ;\ x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & ;\ x \neq 3 \\ A & ;\ x = 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2.\operatorname{sen}\frac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \\ A & ;\ x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & ;\ x \geq 1 \\ x - A & ;\ x < 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x + A & ;\ x > 0 \\ 2 & ;\ x = 0 \\ A & ;\ x < 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x + A & ;\ x > 2 \\ B & ;\ x = 2 \\ -x + 7 & ;\ x < 2 \end{cases}$

g) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & ; \ x \neq 0 \\ A & ; \ x = 0 \end{cases}$$

h) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen.}(x-2)}{x^2-4} & ; \ x > 2 \\ A & ; x = 2 \\ x + B & ; \ x < 2 \end{cases}$$

32) Encontrar cual es el segmento de recta que debemos tomar para que la siguiente función resulte continua en todo los reales.

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x + 4 \ ; & x \leq -1 \\ m\,x + h \ ; & -1 < x < 1 \\ 2\,x - 4 \ ; & x \geq 1 \end{cases}$$

33) La fuerza gravitacional F ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria M a una distancia ´r´ del centro del planeta viene dada por:

$$F\,(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & ; \quad r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & ; \quad r \geq R \end{cases}$$

M = masa de la Tierra
R = radio de la Tierra
G = cte gravitacional

- ¿ Es F una función continua de r, distancia de M al centro de la Tierra ?.
- Graficar la función en un sistema r – F.

34) Aplicar el teorema de Bolzano para demostrar que existe una raíz real de la ecuación dada en el intervalo especificado.

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$ en (0; 1)
b) $x^2 = \sqrt{x+1}$ en (1; 2)
c) $\cos x = x$ en (0; 1)
d) $\ln x = e^{-x}$ en (1; 2)

35) Probar que las siguientes ecuaciones tienen por lo menos una raíz real e indicar un intervalo que la contenga.
(Sugerencia: graficar cada una de las funciones que forman la ecuación y determinar, del gráfico, el intervalo donde ambas gráficas se cortan. ¿Para qué sirve?).

a) $x^3 = 2\,x - 1$
b) $\sqrt{2x} = x - 3/2$

36) Resolver el **Actividad (76)** – pág. 123, desde la óptica de los conceptos vistos en este capítulo.

APÉNDICE A - Números reales: conjuntos, propiedades.

A1.- CONJUNTOS DE NÚMEROS – PROPIEDADES

- Los números son sin duda una herramienta básica para cualquier rama de la Matemática. Podríamos compararlos con el átomo en Química o la célula en Biología. Luego, conocerlos y saber usarlos es un requisito indispensable para construir nuevos conocimientos a partir de ellos. Se resumen entonces a continuación las principales características del conjunto de los números reales a los efectos tanto de nivelar los conocimientos previos y establecer un punto de partida como de convenir el lenguaje y símbolos a usar en el desarrollo de la materia.

- *Los pueblos primitivos se valían de piedras para contar sus rebaños. ¿Cuáles son las* ´piedras´ *que usamos hoy para contar?:* los números naturales.
La necesidad de realizar otras operaciones (restar, dividir, etc) determinó que fueran apareciendo otros conjuntos numéricos: los números negativos, los fraccionarios, etc.
Cada conjunto numérico se representa por una letra según se indica a continuación:

ENTEROS POSITIVOS ó NATURALES: $\mathbf{N} = \{1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

ENTEROS NEGATIVOS: $\mathbf{Z}^{-} = \{-1,-2,-3,-4\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

ENTEROS: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{-} \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$

RACIONALES: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / \; p \in \mathbf{Z}, \; q \in \mathbf{N} \; (q \neq 0) \right\}$

Observaciones:

a) $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Z}^{-}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$

b) Todo número racional se puede representar en forma *decimal periódica*.

c) No todo número decimal representa un número racional; por ejemplo el número π ($\pi = 3.141592653\ldots..$, que generalmente aproximamos como $\pi \approx 3.14$ ó $\pi \approx 3.1416$); tiene una representación decimal *infinita no periódica.*

Luego, π no es un número racional. Existen otros números con representación decimal *no periódica*: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e..... (e = 2.718281828……….).

Tenemos así otro conjunto de números: el de los *irracionales*; que indicamos, **I.**

IRRACIONALES (**I**): ejemplos $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, e, \ldots\ldots\ldots$

Finalmente, de la unión de racionales e irracionales resultan los ***números reales,*** **R**.

REALES.	$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$

- Existe otro conjunto de números, los ***números complejos,*** **C**

$$\mathbf{C} = \left\{ z = a + b.i \; / \; a, b \in \mathbf{R}; \; i = \sqrt{-1} \right\}$$

- ***Relación de orden en R.***

Introducimos aquí las propiedades de orden como un conjunto de axiomas referidos al concepto primitivo de ***positivo.*** Así, partimos de admitir que en **R** existe un subconjunto que indicamos $\mathbf{R}^+$ *(reales positivos)* que satisface:

Axioma 1: si $x, y \in R$ entonces $x+y \in R$ y $x.\,y \in R$
Axioma 2: $\forall\, x \neq 0,\quad x \in R^+$ ó $-x \in R^+$. (no ambos)
Axioma 3: $0 \notin R^+$

A los elementos de $\mathbf{R}^+$ los llamamos: ***´números positivos´*** ó ***´positivos´*** :

DEFINICIÓN: *relación de orden en R*

$$\mathbf{b > a \;\Leftrightarrow\; b - a \in R^+} \quad \text{(o sea, si b-a es } \textit{positivo}\text{)}$$

Observaciones:

a) Si en la definición anterior hacemos a = 0, tenemos: $\mathbf{b > 0 \;\Leftrightarrow\; b \in R^+}$ Luego:

REALES POSITIVOS, $\mathbf{R^+ = \{\, x \in R \,/\; x > 0 \,\}}$

b) Dado $\mathbf{x \in R}$ si $\mathbf{-x}$ es positivo entonces escribimos $\mathbf{x < 0}$ y decimos, ***´x negativo´***.

Tenemos así los siguientes subconjuntos de números reales:

<u>REALES POSITIVOS</u>: $\mathbf{R^+ = \left\{x \in R /\;\; x > 0\right\}}$

<u>REALES NEGATIVOS</u>: $\mathbf{R^- = \left\{x \in R /\;\; x < 0\right\}}$

<u>REALES NO NEGATIVOS</u>: $\mathbf{R_0^+ = \left\{x \in R /\;\; x \geq 0\right\}}$ **recordar: "≥" se lee "mayor o igual a"**

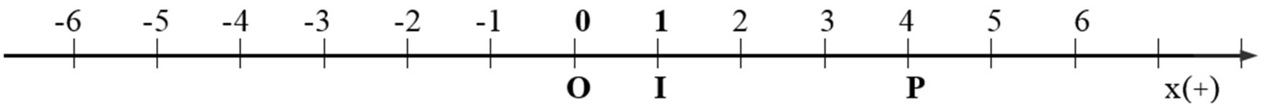
<u>REALES NO POSITIVOS</u>: $\mathbf{R_0^- = \left\{x \in R /\;\; x \leq 0\right\}}$ **recordar: "≤" se lee "menor o igual a"**

Propiedades:

a) $x > y;\;\; a \in R \;\Rightarrow\; x + a > y + a$
b) $x > y;\;\; a > 0 \;\Rightarrow\; x\,.\,a > y\,.a$
c) $x > y;\;\; a < 0 \;\Rightarrow\; x\,.\,a < y\,.a$ (¡cuidado!: *cambia el sentido de la desigualdad!!)*
d) $x > y;\;\; a > b \;\Rightarrow\; x + a > y + b$
e) $\dfrac{x}{y} \in Q\;;\; \dfrac{a}{b} \in Q\;;\; \dfrac{x}{y} > \dfrac{a}{b} \;\Rightarrow\; x\,.\,b > a\,.\,y$

A2- LA RECTA REAL.

La representación de los números reales como puntos de una recta es una herramienta muy útil para el desarrollo de la Matemática. Esta idea se ilustra en el siguiente gráfico:



Para obtener una representación comenzamos por identificar dos puntos cualesquiera de la recta con **0** y **1.** El semieje que contiene al **1** es el semieje (+), cuestión que indicamos poniendo una flecha en el extremo del mismo. Luego desplazamos el segmento $\overline{\mathbf{OI}}$ (la unidad) sobre la recta y, según la cantidad desplazada y la dirección del desplazamiento, establecemos la correspondencia entre punto y número.

En el gráfico: $\overline{\mathbf{OP}}$ se obtiene de desplazar 4 veces $\overline{\mathbf{OI}}$ hacia la derecha; luego, $\mathbf{P \leftrightarrow 4}$.
El número asociado al punto lo llamamos ´coordenada´, lo indicamos **P**(4).
Usualmente decimos "punto 4" en lugar de "punto de coordenada 4".

- Además de los conjuntos ya vistos, existen otros conjuntos que ocurren con frecuencia en el cálculo: los **intervalos**. Estos conjuntos son aquellos que geométricamente se corresponden con segmentos o semirrectas. En función de ello convenimos en asignarles un nombre y un símbolo para distinguirlos entre sí y del resto de los conjuntos numéricos.

Se tiene así la siguiente notación para nombrar intervalos:

INTERVALOS ACOTADOS

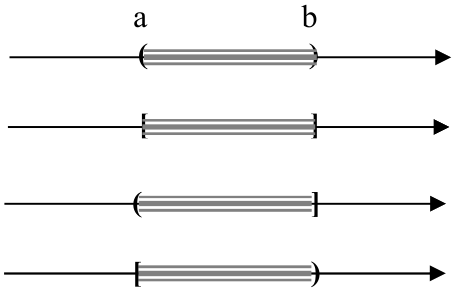
NOTACIÓN CONJUNTO REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

$(a\ ;\ b) = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ a < x < b \,\}$

$[a\ ;\ b] = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ a \le x \le b \,\}$

$(a\ ;\ b] = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ a < x \le b \,\}$

$[a\ ;\ b) = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ a \le x < b \,\}$



INTERVALOS no ACOTADOS

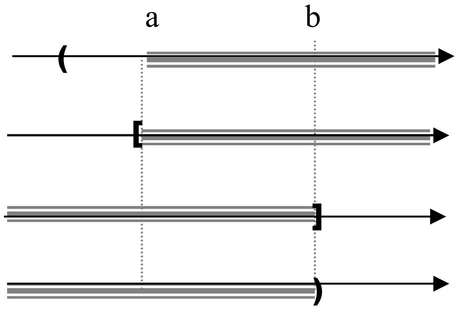
NOTACIÓN CONJUNTO REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

$(a\ ;\ +\infty) = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ x > a \,\}$

$[a\ ;\ +\infty) = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ x \ge a \,\}$

$(-\infty\ ;\ b] = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ x \le b \,\}$

$(-\infty\ ;\ b) = \{\, x \in \mathbf{R}\ /\ x < b \,\}$



A3 - VALOR ABSOLUTO

DEFINICIÓN:

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de una número x, denotado por | x |, es un número real que, es *igual a x*, si x es positivo ó cero y, es *el opuesto de x*, si x es negativo.

$$\mathbf{|\,x\,| = x \ ;\ si\ \ x \ge 0}$$
$$\mathbf{|\,x\,| = -\,x \ ;\ si\ \ x < 0}$$

Ejemplos:

$|3| = 3$ $\quad |\pi - 1| = \overset{\boxed{\pi - 1 > 0}}{\pi - 1}$ $\quad |\log(\pi - 2)| = \log \overset{\boxed{\log(\pi - 2) > 0}}{(\pi - 2)} = 0.058$

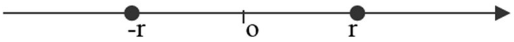
$|-3| = -(-3) = 3$ $\quad |1 - \pi| = \underset{\boxed{1 - \pi < 0}}{-(1 - \pi)} = \pi - 1$ $\quad |\log(\pi - 3)| = -\log \underset{\boxed{\log(\pi - 3) < 0}}{(\pi - 3)} = 0.85$

Nota: observar que en todos los casos el resultado es un número positivo.

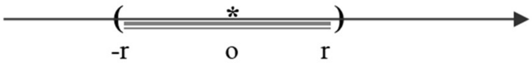
P*ropiedades* :

a) $|\mathbf{x}| \geq \mathbf{0}; \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$.
b) $|\mathbf{x}| = |-\mathbf{x}|; \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$

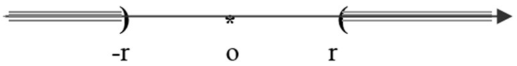
c) $|\mathbf{x}| = \mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{r}$ ó $\mathbf{x} = -\mathbf{r}$



d) $|\mathbf{x}| < \mathbf{r} \Leftrightarrow -\mathbf{r} < \mathbf{x} < \mathbf{r}$



e) $|\mathbf{x}| > \mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{x} < -\mathbf{r}$ ó $\mathbf{x} > \mathbf{r}$



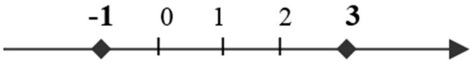
f) $\sqrt{\mathbf{x}^2} = |\mathbf{x}| \; ; \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$

Recordar que $\sqrt{\ }$ significa "la raíz cuadrada positiva de... "

O sea: $\sqrt{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b}^2 =. \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Ejemplos :

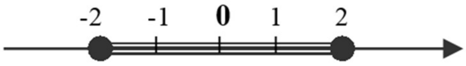
a) Hallar $\mathbf{z}$ / $|z-1| = 2$.



a) Si hacemos $\mathbf{z - 1 = x}$, entonces :
$|\mathbf{x}| = 2 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 2$ ó $\mathbf{x} = -2$ (por (c))
$\Leftrightarrow (z-1) = 2$ ó $(z-1) = -2$
$\Leftrightarrow \mathbf{z = 3}$ ó $\mathbf{z = -1}$

$\boxed{\boldsymbol{S} = \{-1 ; 3\}}$

b) Hallar $\mathbf{z}$ / $|z| < 2$.

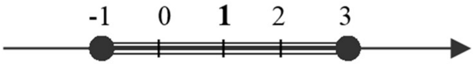


b) Por (d); $|\mathbf{z}| < \mathbf{2} \Leftrightarrow \mathbf{-2 < z < 2}$;

o sea : $\{z \in R / -2 < z < 2\} = \mathbf{(-2 ; 2)}$

$\boxed{\boldsymbol{S} = (-2 ; 2)}$

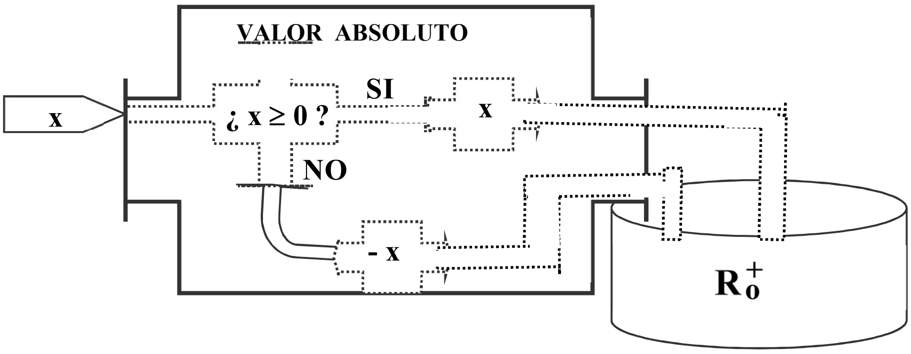
c) Hallar $\mathbf{z}$ / $|z-1| < 2$.



c) Si hacemos $z - 1 = \mathbf{x}$, entonces:
$|\mathbf{x}| < \mathbf{2} \Leftrightarrow \mathbf{-2 < x < 2}$ (por (d))
$\Leftrightarrow \mathbf{-2 < z-1 < 2}$
$\Leftrightarrow \mathbf{-1 < z < 3}$;
o sea : $\{z \in R / -1 < z < 3\} = \mathbf{(-1 ; 3)}$

$\boxed{\boldsymbol{S} = (-1 ; 3)}$

(*) El valor absoluto puede ser concebido como una *´máquina´* que procesa números (como es la calculadora). O sea , como una máquina con una entrada por donde ingresan números y una salida por donde egresan los *transformados* de dichos números. Imaginada así, esta máquina [valor absoluto] , ´positiviza´ números, ya que, si entra un número positivo, sale *el mismo* (positivo); mientras que si entra un número negativo sale el *opuesto del mismo* (positivo por ser el opuesto de un negativo).

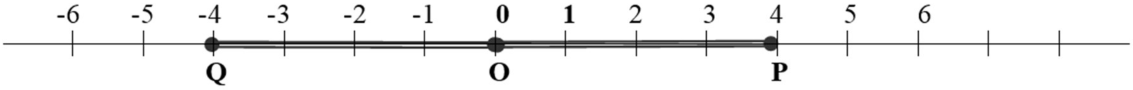


A4 - DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE LA RECTA

DEFINICIÓN :

d(A,B),	Llamamos distancia entre dos puntos **A** y **B ,** que denotamos **d(A,B)**, a la medida del segmento $\overline{\mathbf{AB}}$. O sea, **d(A,B)** = *med* $\overline{\mathbf{AB}}$

- ¿Qué relación existe entre la coordenada de un punto y su distancia al origen ? .

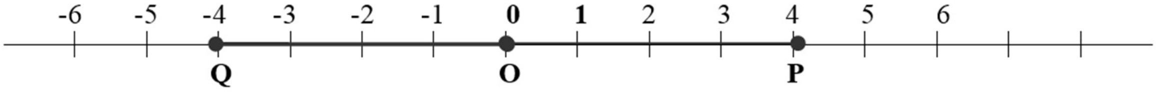


- Del gráfico vemos que: **P(4)** y **d (O,P) = 4** ⇒ coordenada P = d (O,P)
Q(-4) y **d (O,Q) = 4** . ⇒ coordenada Q = - d (O,Q)

Conclusión: la coordenada de un punto y su distancia al origen *o bien coinciden o bien son opuestas una de la otra*; o sea, a lo sumo, *difieren en el signo.*

Luego, podemos conectar estos dos conceptos entre sí a través del ´valor absoluto´ . Efectivamente, vemos que conocida la coordenada de un punto basta ´positivizar´ la misma para tener su distancia al origen. Como el valor absoluto ´positiviza´ números, esta es entonces la herramienta que permite pasar de ´coordenadas´ a ´distancia al origen´ así como también la que permite obtener un método algebraico para el cálculo de distancia entre puntos.

distancia al origen	Dado un punto **A** sobre una recta graduada, si **a** es su coordenada, entonces **d(A,O) = | a |.**



Q(-4) → d(Q,O) = | - 4 | = 4	**P(4) → d(P,O) = | 4 | = 4**

Observaciones: Conocida la coordenada de un punto, conocemos su distancia al origen. ¿Vale la recíproca?; o sea, conocida la distancia, ¿conocemos la ´coordenada´ del punto?. Queda claro que no, ya que **d(A,O)** = α sólo informa que *med* $\overline{\mathbf{AO}}$ = α , y esto no alcanza: existen dos puntos que cumplen esta condición, uno a cada lado del origen. Luego, para establecer la coordenada se necesita otro dato: de que lado del origen está A.

¿Cómo distinguimos de qué lado del origen está un punto?: con el signo de su coordenada.

- si A está a la derecha del origen su coordenada es (+) ; o sea, **coord A** = α (= *med* $\overline{\mathbf{AO}}$*)*.
- si A está a la izquierda del origen su coordenada es (-); o sea, **coord A** = - α (=- *med)*

Medida con signo

Definimos la medida con signo de $\overline{\mathbf{AO}}$*,* como sigue:

- *med.c/sig* $\overline{\mathbf{AO}}$ = *med* $\overline{\mathbf{AO}}$*,* si A está en el semieje positivo (+)
- *med.c/sig* $\overline{\mathbf{AO}}$ = - *med* $\overline{\mathbf{AO}}$*,* si A está en el semieje negativo (-).

Coordenada

la coordenada de A es la medida con signo del segmento $\overline{\mathbf{AO}}$.
O sea, A(a) → a = *med.c/sig* $\overline{\mathbf{AO}}$

Ejemplo:

P (4) → 4 = *med. c/sig* $\overline{\mathbf{OP}}$; indica **P** a 4 unidades de **O** y en el semieje (+)

Q(-4) → - 4 = *med. c/sig* $\overline{\mathbf{OQ}}$; indica **Q** a 4 unidades de **O** y en el semieje(-).

cálculo d(A,B)

Dados dos puntos **A** y **B** sobre una recta graduada, si **a** y **b** son sus respectivas coordenadas, entonces: **d(A,B) = | b – a |.**

Nota: Esta fórmula para el cálculo de la distancia entre dos puntos se obtiene a partir de tener en cuenta que las coordenadas de los puntos son las medidas con signo de los respectivos segmentos que determinan con el origen.

Distancia: ´bien definida'

Es un hecho que la distancia entre **A** y **B** es la misma que entre **B** y **A.** Luego, para comprobar si la fórmula de cálculo dada es *consistente* con la realidad, analizamos si verifica esta propiedad.

$$\mathbf{d(A,B) = |\, b - a \,| = |\, -(b - a)\,| = |\, a - b \,| \overset{|x| = |-x|}{=} d(B,A) \;\Rightarrow\; d(A,B) = d(B,A).}$$

distancia entre números

Dados los números reales a y b, llamamos **d(a,b)** a la distancia entre los puntos **A** y **B** cuyas coordenadas son a y b respectivamente.

$$\mathbf{d(a,b) = |\, b-a \,|}$$

Ejemplos:

a) Los puntos P(3); Q(5) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta.
Si d(P,R) = d(P,Q) , ¿ quién es R ?.

- **d(P,R) = d(P,Q)** ⇒ | z-3 | = 2 ⇒ z-3 = 2 **ó** z-3 = –2 ⇒ z = 5 **ó** z = 1.
  Como son distintos ⇒ z = 1 ⇒ **R(1)**

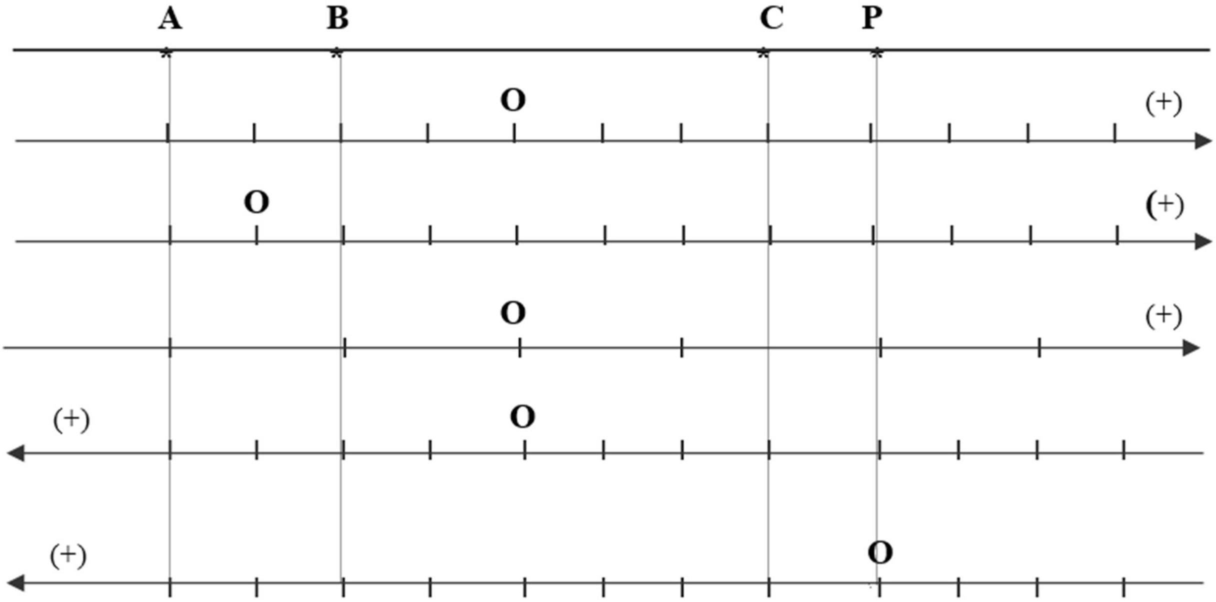
b) Los puntos P(3); Q(5) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta.
Si d(P,R) = d(Q,R) , ¿ quién es R ?

- **d(P,R) = d(Q,R)** ⇒ | z-3 | = | z-5 | ⇒ z-3 = z-5 **ó** z-3 = –(z-5)
  ⇒ ∅ **ó** **z = 4.** ⇒ **R(4)**

APÉNDICE A: Actividades

1) Los puntos A ; B; C y P se hallan todos sobre una misma recta. A los efectos de asignarles coordenadas se procede a graduar la recta. Se pide:

a) dar las coordenadas de A ; B; C y P para cada una de las graduaciones de la recta que se indican a continuación si, en todas ellas, la longitud entre dos marcas consecutivas es de "1 unidad" y **O** es el origen .



b) En cada caso indicar: d (A,O) ; d (P,O) ; d (A,P).

c) Si x = coord. de P; indicar V ó F , justificar:

- d (P,O) = x
- d (P,O) = | x |
- Si P pertenece al semieje negativo entonces x = - d (P,O)
- x = med. sig. $\overline{OP}$.

2) a) Hallar todos los puntos **X**(x) cuya distancia a **P**(3) sea 2.

b) Hallar todos los puntos **X**(x) tal que d (3,x) < 2.

Nota: al conjunto { x ∈ R / d(3,x) < 2 } lo llamamos: entorno de 3 de radio 2 .
Lo indicamos: E(3;2)

Entorno de un punto	Entorno de x_o de radio δ. **E(x_o;δ) = { x ∈ R / d(x_o , x) < δ }**

3) Resolver graficando en cada caso todos los puntos o conjuntos que se obtengan.

a) Los puntos P(-2); Q(2) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta. Si d(P,R) = d(P,Q) **,** ¿ quién es R ?. Graficar todos los puntos.

b) Los puntos P(-2); Q(2) y R(z) son distintos y se hallan todos sobre una misma recta. Si d(P,R) = d(Q,R) , ¿ quién es R ?

c) Hallar todos los puntos **X**(x) cuya distancia a **P**(5) sea 2. Idem, pero d (P, X) < 2.

d) Hallar todos los puntos **X**(x) cuya distancia a **P**(-3) sea 2. Idem, pero d (P, X) < 2.

4) a) Escribir A usando notación de conjuntos si A es el conjunto de los “x´s” que distan 4 unidades del punto –2.

b) Escribir A como entorno de un punto si: $A = (3\ ,\ 9)$; $A=(-1;\ 3)$; $A=(0;4)$

5) Representar sobre un eje coordenado los intervalos A ; B ; $A \cap B$ y $A \cup B$ para:

a) $A = [2\ ;\ 6\ ]$; $B = [-3\ ;\ 4]$
b) $A = [2\ ;\ 6\ ]$; $B = [-3\ ;\ 0]$
c) $A = [2\ ;\ 4\ ]$; $B = [\ 4\ ;\ 7]$
d) $A = [2\ ;\ 4\ )$; $B = [\ 4\ ;\ 7]$

e) $A = [2\ ;\ 6\ ]$; $B = [3\ ;\ 4]$
f) $A = E\ (3,1)$; $B = E(3,2)$
g) $A = \{x \in R\ /\ \dfrac{x}{x-1} \geq 0\ \}$

$B = \{x \in R\ /\ \dfrac{x}{x-1} \leq 0\ \}$

6) Unir cada conjunto de la primer columna con su equivalente de la segunda.

$A = \{\ x \in R\ /\ \mid x-2 \mid < 5\ \}$	$J = (-2\ ;\ 10\ )$
$B = \{\ x \in R\ /\ \mid x+2 \mid < 5\ \}$	$K = (\ \delta -3\ ;\ \delta +3\ )$
$C = \{\ x \in R\ /\ \mid x - 3 \mid < \delta\ \}$	$L = (\ -3\ ,\ 7\ )$
$D = \{\ x \in R\ /\ \mid x - 4 \mid < -6\ \}$	$M = (\ -7\ ,\ 3\ )$
$E = \{\ x \in R\ /\ \mid 2x + 4 \mid < 6\ \}$	$N = (\ -5\ ,\ 1\ )$
$F = \{\ x \in R\ /\ \mid -2x - 4 \mid < 6\ \}$	$O = \varnothing$
$G = \{\ x \in R\ /\ d(x,2) < 5\ \}$	$P = (\ 3-\delta\ ;\ 3+\delta\ )$
$H = \{\ z \in R\ /\ d(z,3) < \delta\ \}$	$Q = (\ 3\ ;\ 3+\delta\ )$

7) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar respuesta.

a) $x^2 \geq 0\ ;\ \forall\ x \in R$
b) $a \leq b \Rightarrow -a \leq -b$
c) $x < 1 \Rightarrow 1/x > 1$
d) $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$
e) $-x \leq 0\ ;\ \forall\ x \in R$
f) $x = -x - 6 \Rightarrow -x > 0$
g) $x = 6 - x \Rightarrow -x < 0$

APÉNDICE B: El plano coordenado

Hasta ahora hemos considerado puntos sobre una recta e identificado los mismos a través de números reales. Ahora consideramos puntos en el plano.
Como el plano es ´bidimensional´ para identificar puntos del mismo necesitamos *dos direcciones*. O sea, instalada una copia de la recta real debemos añadir *otra copia*. En principio la única condición que se pide a ambas rectas es que se intersequen en el origen. En tal caso, constituyen lo que se llama un **sistema de referencia plano.**
Normalmente la segunda recta real se ubica perpendicular (*ortogonal)* a la primera (pero no es condición necesaria para tener un sistema de referencia plano). En este caso es de uso y costumbre que una se tome horizontal y la otra vertical, que sobre la horizontal el sentido positivo se fije hacia la derecha mientras que, para la vertical, se tome hacia arriba. (el sentido positivo (+) se indica con una flecha en el extremo del semieje que elegimos como tal).
A la recta horizontal la llamamos **eje x**, a la vertical, **eje y** y ambas constituyen un, ´**sistema cartesiano *ortogonal*´**. (sistema de referencia donde los ejes son ortogonales).

plano cartesiano

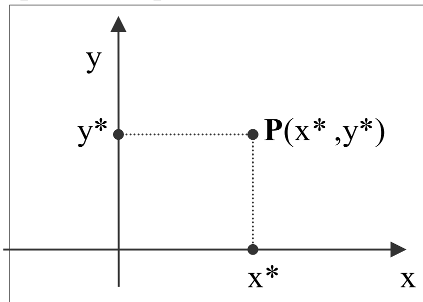
Un plano al que se añade un sistema cartesiano ortogonal se llama **plano cartesiano**. Se denota ***R*²**; ya que usamos dos *copias* de ***R.***

En un plano cartesiano, cualquier punto se localiza mediante un par ordenado de números reales llamados, igual que antes, **coordenadas *cartesianas* del punto.**

He aquí cómo hacemos para asignar coordenadas a un punto del plano:

- Sea **P** punto del plano, luego para hallar sus coordenadas cartesianas trazamos perpendiculares desde **P** hasta cada uno de los eje coordenados.
- Una perpendicular interseca al eje x en la "coordenada x" ó **abscisa de P**; etiquetada como **x*** en el gráfico.
- La otra interseca al eje y en la "coordenada y" u **ordenada de P**; etiquetada como **y*** .

- El par de números **(x*; y*)**, en ese orden, son las **coordenadas cartesianas** de **P .**



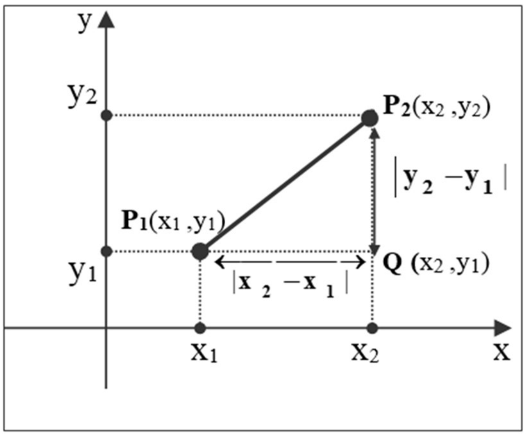
P (x* ; y*) ↔ x*= abscisa
y* = ordenada

Distancia entre puntos del plano

El concepto de *distancia entre puntos del plano* se sustenta en el **teorema de Pitágoras**: "en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ".

- La distancia d (**P**$_1$**; P**$_2$) es, por definición, la medida del segmento $\overline{P_1P_2}$.
- Del gráfico resulta claro que $\overline{P_1P_2}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices **P**$_1$, **P**$_2$, **Q**.
- Luego , por Pitágoras, concluimos que:

$$\boxed{d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$



APÉNDICE B: Actividades

1) Trabajando en un sistema convencional :

a) Indicar a qué cuadrante o eje pertenecen los puntos que se indican a continuación si "a" no es cero y "e" es la base de los logaritmos naturales:

A $(-10^6 , 10^3)$; **B** $(\pi, -3)$; **C** $(e, 1-e)$; **D** $(\sqrt{2}-5 , -2e)$; **E** $(\log 1, \log 10^{-3})$;
F $(a^2 , \pi-3)$; **G** $(a , -3)$; **H** $(- a^2, (-a)^2)$; **I** $(\sqrt{(-4)^2} , 4)$; **J** $(\log 10 , \ln 1)$.

b) Dados P (a,b) ; Q (-a, -b) y R (a; -b) indicar a qué cuadrante pertenece cada uno de ellos si:
(i) $a>0$; $b>0$ (ii) $a > 0$; $b < 0$ (iii) $a < 0$, $b < 0$.

c) Dado P (a,b) graficarlo en un sistema coordenado ortogonal si:
(i) $a.b >0$ y $a < 0$ (ii) $a.b > 0$ y $\sqrt{a} \in R$ (iii) $a+ b= 0$ y $|a| = - a$

2) En los ejercicios que siguen completar el cuadro y analizar si los puntos que se dan en ellos presentan alguna particularidad digna de destacar:

a) Sea **A**(3,4)

B	(2,3)	(3,1)	(4,4)	(-3,-4)	(0,0)	(-1,1)
d(A,B)						

b) Sea **A**(0,2)

B	(2,2)	(3,2)	(0,2)	(-3,2)	(-4,2)	(x,2)
d(A,B)						

c) Sea **A**(1,2)

B	(4,6)	(5,5)	(1,-3)	(-4,2)	(6,2)	(-2,6)	(1,7)	(5,-1)
d(A,B)								

(*) Si indicamos con **C** la curva que determinan estos puntos (¿nombre?) , hallar una fórmula que exprese que el punto P(x,y) pertenece a **C.**

3)

a) La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. En función de esta propiedad hallar la ecuación de la circunferencia de centro C (a,b) y radio r.

b) Dar la ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro C(0,0). Luego obtener 6 puntos de esta circunferencia.

c) Dar la ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro C(2,4). Luego obtener 6 puntos de esta circunferencia.

4)

a) Graficar una recta r_1 paralela al eje x que pase por el punto P(1,3). Hallar (gráficamente) tres puntos de la misma de modo que la distancia entre dos puntos "consecutivos" permanezca constante e igual a "2".
Verificar analíticamente.

b) Graficar una recta r_2 perpendicular a la anterior en el punto P(1,3) . Hallar (gráficamente) dos puntos de la misma que disten 3 unidades del punto P.

c) Dado el punto Q(2,1) determinar (gráfica e intuitivamente) R, punto de r (item (a)) que se encuentra a menor distancia de Q. Indicar cual es esa distancia.
Verificar con algunos puntos. Idem para la recta del item (b).
La distancia obtenida en cada caso se llama, "*distancia del punto a la recta*".

d) Indicar V ó F:
   i) si R es el punto de r a menor distancia de Q y $R \neq Q$, entonces R se encuent sobre la recta perpendicular a r que pasa por Q.
   ii) Si $d = d\,(Q; r)$ entonces la circunferencia de centro en Q y radio d es tangente a la recta r .

e) Escribir en una oración el procedimiento para hallar la distancia de un punto a una recta (a la cual no pertenece).

5) A continuación se indican tres conjuntos de puntos A , B y C y cuatro sistemas coordenados, se pide:
   a) Enumerar los elementos de B y C.
   b) Representar los sistemas en un papel milimetrado.
   c) Graficar cada conjunto en el sistema que resulte más adecuado para ello.

$A = \{ (5,0) ; (-5,0) ; (0,0) ; (0,5) ; (0,-5) ; (-4,3) ; (-4,-3) ; (-3,4) ; (3,-4) ; (3,4) ; (4,3) \}$

$B = \{ (\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{10}} , \mathbf{y}) \,/\, (x , y) \in A \}$; $C = \{ (\mathbf{x} , 10\,\mathbf{y}) \,/\, (x , y) \in A \}$

Los sistemas están en la posición convencional pero difieren en la graduación de sus ejes. A continuación indicamos la unidad con que se gradúa cada uno de ellos.

	S_1	S_2	S_3	S_4
U_x	1 cm.	0,5 cm.	5 cm	0,1 cm
U_y	1 cm.	0,5 cm.	1 cm.	0,1 cm.

6) Graficar los conjuntos que se indican a continuación:

$A = \{ (x, y) \;/\; x \in N \;;\; 1 \leq x \leq 5 \;;\; y = 2 \}$

$B = \{ (x, y) \;/\; x \in R \;;\; 1 \leq x \leq 5 \;;\; y = 2 \}$

$C = \{ (x, y) \;/\; x \in R \;;\; y = 2 \}$

$D = \{ (x, y) \;/\; x = y \;;\; x \in R \}$

$E = \{ (x, y) \;/\; x \,.\, y = 0 \}$

$F = \{ (x, y) \;/\; x \geq 0 \;;\; y \in R \}$

$G = \{ (x, y) \;/\; x \geq 0 \;;\; y \leq 0 \}$

$H = \{ (x, y) \;/\; x \,.\, y < 0 \}$

$J = \{ (x, y) \;/\; -2 \leq x \leq 3 \;;\; y \in R \}$

$K = \{ (x, y) \;/\; -2 \leq x \leq 3 \;;\; -1 \leq y \leq 1 \}$

$L = \{ (x, y) \;/\; | x | = 1 \;;\; y \in R \}$

$M = \{ (x, y) \;/\; x^2 + y^2 = 0 \}$

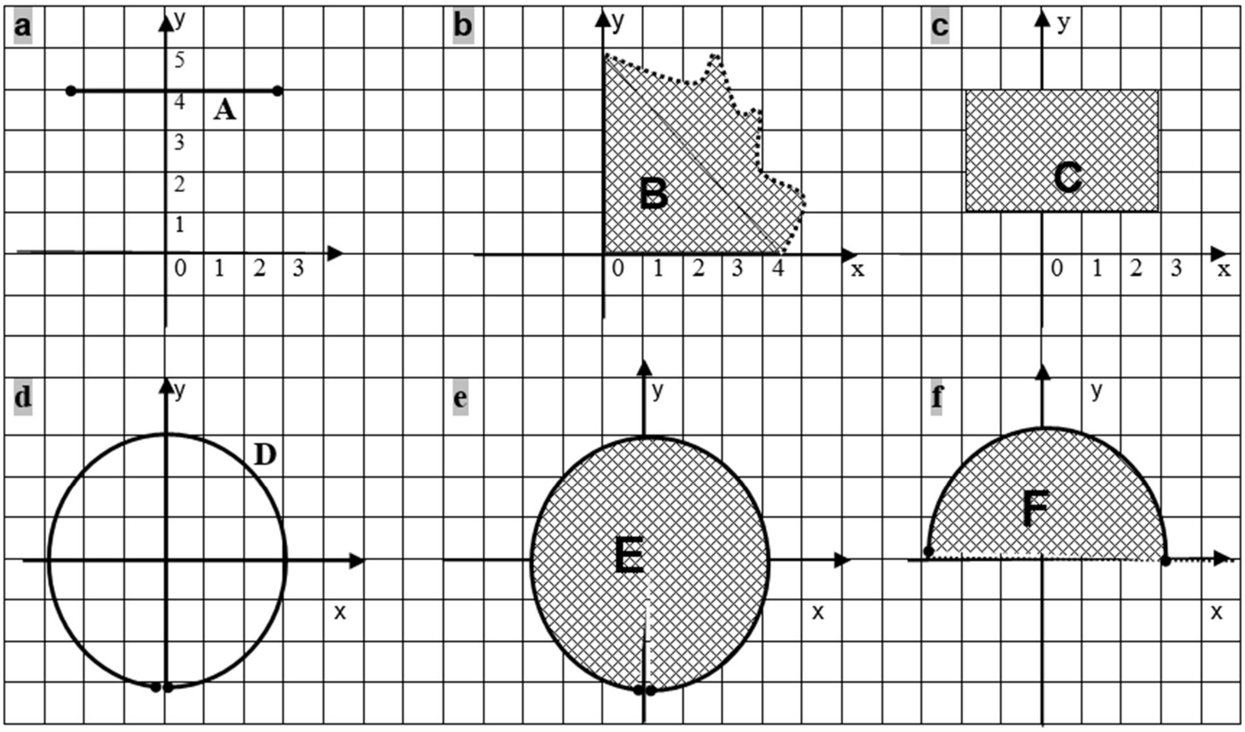
$N = \{ (x, y) \;/\; x^2 + y^2 = 4 \}$

$O = \{ (x, y) \;/\; x^2 + y^2 \leq 4 \}$

$P = \{ (x, y) \;/\; x^2 + y^2 > 4 \}$

$Q = N \cap \{ (x, y) \;/\; y \geq 0 \;;$

7) Describir por comprensión los conjuntos cuyas gráficas se indican:



8) Dada la curva "C" se pide:

a) Identificar, gráficamente, los siguientes conjuntos.

$A = \{(x,y) \in C \,/\, y < 0\}$

$B = \{(x,y) \in C \,/\, y \geq 0\}$

$C = \{(x,y) \in C \,/\, y \geq 1\}$

$D = \{(x,y) \in C \,/\, 4 \leq x \leq 5\}$

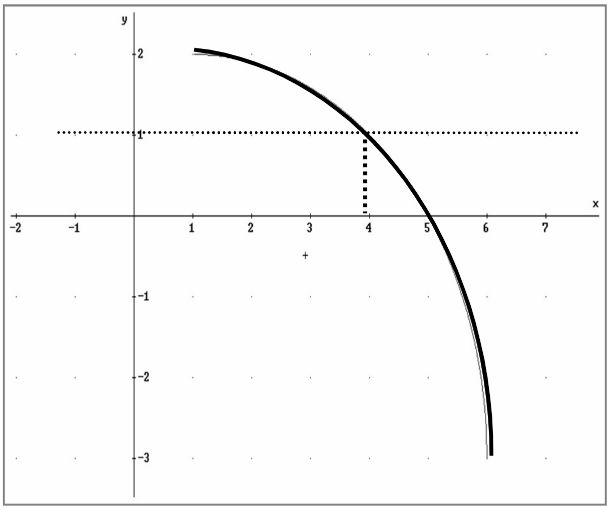
$E = \{(x,y) \in C \,/\, 5 \leq x \leq 6\}$

b) Identificar, gráfica y analíticamente, los siguientes conjuntos.

$G = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R} \,/\, (x,y) \in C \,;\, y \geq 0 \,\}$

$H = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R} \,/\, (x,y) \in C \,;\, y \leq 1 \,\}$

$I = \{\, \mathbf{x} \in \mathbf{R} \,/\, (x,y) \in C \,;\, y \leq 0 \,\}$



9) Dado el conjunto $\mathbf{E} = \{(x\,,y) \in \boldsymbol{R^2} \,/\, y = (x-1)\,.\,(x-9)\}$, se pide:

a) Indicar tres puntos de **E** y tres puntos que no pertenezcan a **E**.

b) Hallar todos los puntos de **E** correspondientes a las siguientes abscisas:

$x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5$; $x_4 = 10$.

c) Hallar y *graficar* todos los puntos de **E** correspondientes a las sgtes ordenadas:

$y_1 = 20$; $y_2 = 9$; $y_3 = 0$; $y_4 = -12$; $y_5 = -16$; $y_6 = -21$.

d) Demostrar que los puntos de **E** de abscisa "$5-\delta$ " y "$5+\delta$" *tienen la misma ordenada* y , que el punto medio entre ellos tiene siempre abscisa "5" .

e) Dado A,B, C puntos del conjunto **E** determinar *gráficamente* sus simétricos respecto de la recta x=5 y verificar que también pertenece n al conjunto **E.**

A(0, 9) ; **B**(3, -12) ; **C**(4, -15).

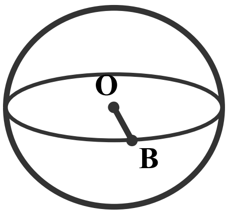
APÉNDICE C: Funciones trigonométricas

C1 .- ÁNGULOS DIRIGIDOS

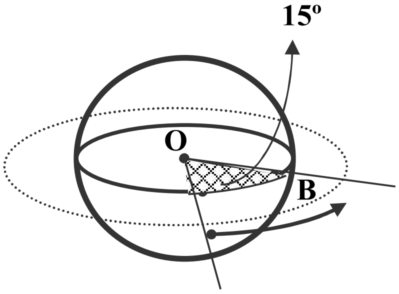
Según sea el ámbito donde trabajemos los ángulos admiten distintas conceptualizaciones. Así, en la geometría clásica, los ángulos son considerados como el resultado de la intersección de dos semiplanos; luego, no tienen signo y son siempre menores de cuatro rectos. Esta definición es útil en la geometría ya que ésta es, esencialmente, estática; pero apenas se considera la posibilidad de ´movimiento´ la misma resulta ´insuficiente´. Veamos el siguiente ejemplo.

(*) La tierra gira sobre su eje, luego tomado un punto sobre un paralelo (por ejemplo el Ecuador) éste ´gira´ alrededor del centro de la tierra. Se sabe que lo hace a razón de 15º por hora y de Oeste a Este. Consideremos ahora que a las 13 hs de cierto día se lanza, desde una base espacial (B), un cohete para circunvolar la tierra con una velocidad de giro de 360º por hora (1 giro, en una hora). Nos preguntamos: a la hora del lanzamiento, el cohete ¿ pasó o está pasando sobre la base?.

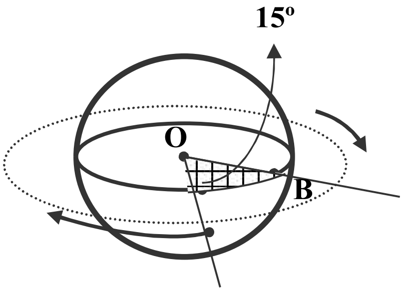
- *Los gráficos adjuntos muestran que no podemos contestar esta pregunta si no se informa **en que sentido gira el cohete** (O→E ó E→O). En el primer caso la respuesta es NO, pues si bien el cohete ha realizado un giro completo y está ´en el punto de partida´, la base se ha desplazado 15º , luego debe volar unos minutos más para pasar sobre ella.* (¿cuántos?). *En el segundo caso la respuesta es SI, pasa sobre ella ´antes de la hora´.*



13 hs.



14 hs. ; Oeste-Este

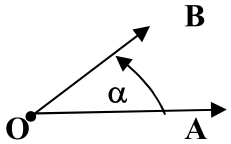


14 hs. ; Este-Oeste

*En la resolución de este problema vemos que el ángulo aparece interpretado como, ´la porción de plano barrida por una semirrecta móvil (el radio vector) que gira alrededor de su origen **O´.** Observamos también la necesidad de distinguir el **sentido** de generación del ángulo (éste influye en el resultado). Finalmente, en el giro Oeste-Este, vemos claramente también que hallar el instante en que el cohete pasa nuevamente sobre la base requiere considerar giros **mayores de 360º.** Esta u otras cuestiones similares son de consideración frecuente en el desarrollo de la ciencia. Luego, necesitamos precisar una definición de ángulo que resulte adecuada para el tratamiento de las mismas.*

ángulo

Llamamos ángulo $\widehat{AOB}$ a la porción de plano barrida por una semirrecta móvil que gira alrededor de su origen **O.**



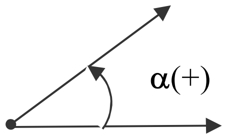
$\vec{OA}$: lado inicial

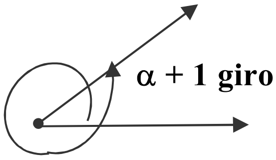
$\vec{OB}$: lado final.

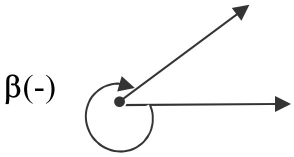
(*) el lado inicial, $\vec{OA}$, al girar alrededor del origen puede hacerlo en dos sentidos: horario (**sentido negativo)** y antihorario (**sentido positivo**). Esto lo indicamos con un "arco dirigido"; o sea, un arco con una flecha en uno de sus extremos.

ángulo dirigido

Angulo en el que se distingue el ´*sentido de giro*´ . Está determinado por dos semirrectas con origen común (lado inicial y lado final) y un ´arco dirigido´ que indica el sentido de giro y el número de giros.







Nota: a partir de ahora prescindiremos del término ´dirigido´ y usaremos la palabra **ángulo**. Saldrá del contexto a cual nos referimos.

Medida de ángulos

Hay distintos sistemas para medir ángulos. Dos de estos sistemas son el sexagesimal y el circular (o radial). La diferencia radica en la unidad de medida adoptada.

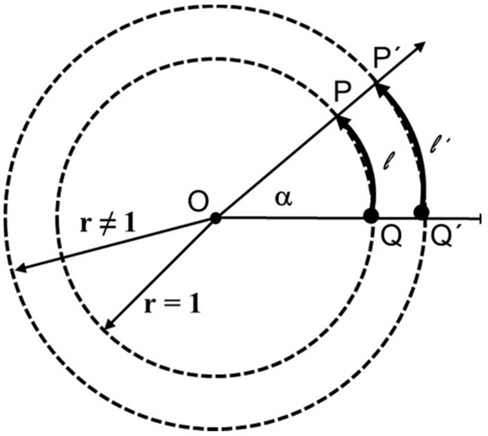
Sistema sexagesimal

La unidad de medida es el **GRADO (º)**. Un ángulo que mide 1º es la 360 ava partes de un ángulo pleno (o completo). Luego, la medida de un ángulo en grados será la cantidad de veces que entra el ángulo de 1º en el ángulo en cuestión.

Sistema circular (o radial)

La unidad de medida es el **RADIÁN (rad)**. Un ángulo que mide 1 rad es un ángulo central de una circunferencia que subtiende sobre la misma un arco de longitud igual a la de su radio.

Si observamos la Figura 1 se ve fácilmente que para un mismo ángulo central, la longitud del arco que éste subtiende sobre una circunferencia dependerá del radio de la misma: si el radio aumenta, la longitud del arco interceptado también aumenta.
Más aún, se observa que la longitud del arco es directamente proporcional a la longitud del radio. Es decir:



$$\frac{longitud\ arco}{longitud\ radio} = cte.$$

Ø Sea l = long.$\widehat{QP}$ (arco subtendido por α con r =1)

Ø Sea l' = long.$\widehat{Q'P'}$(arco subtendido por α con r ≠1)

Ø Luego: α (rad.) = $\frac{l}{1} = \frac{l'}{r}$

$$\alpha\ (\text{rad.}) = \frac{longitud\ arco}{longitud\ radio}$$

Figura 1. Sistema circular (o radial).

Conclusión: la medida de un ángulo en radianes es el cociente entre la longitud del arco que intercepta en la circunferencia y la longitud del radio de la misma. Por lo tanto la medida de un ángulo en el sistema circular es un número real adimensional y mide la cantidad de veces que el radio cabe en dicho arco.

Por ejemplo:
Hallar la medida en radianes del ángulo que subtiende un arco de 6 cm. en una circunferencia de 5 cm. de radio.

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{l} \,/\, \mathbf{r} = 6 \text{ cm.} / 5 \text{ cm.}= 1,2 \qquad \text{(las unidades se simplifican)}$$

❑ Observaciones: El arco abarcado por un ángulo pleno (o completo) es una circunferencia completa cuya longitud es 2.π.r. Luego, el ángulo pleno mide 360º ó 2 π rad (cociente entre la longitud de la circunferencia y su radio). De esta relación básica tenemos:

a) π **rad = 180º**

b) **1 rad**. $= \left(\dfrac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ} \approx \mathbf{57.3}\ ^{\mathbf{o}}$; $\mathbf{1^o} = \left(\dfrac{\pi}{\mathbf{180}}\right)$ rad. ≈ **0.017** rad.

$\left(\dfrac{\mathbf{180}}{\pi}\right)$ y $\left(\dfrac{\pi}{\mathbf{180}}\right)$ son los *factores de conversión* para pasar de un sistema a otro.

Ejemplos:

- 3 rad. $= 3.\left(\dfrac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ} \approx 171.9\ ^{o}$; $3\ ^{o} = 3.\left(\dfrac{\pi}{\mathbf{180}}\right)$ rad ≈ 0.051 rad.

- Sabiendo que el radio de la tierra es de 6377 km. ¿cuánto se desplaza un punto sobre el Ecuador en una hora? (Recordar que se mueve a razón de 15º por hora)

α **= 15º** = $15.\left(\dfrac{\pi}{\mathbf{180}}\right)$ = 0,2625 (rad). Luego, $\ell = \alpha$(rad.). **r** = 0,2625.6377=**1673.95 Km**.

posición estándar

Un ángulo está en **posición estándar** cuando su vértice coincide con el origen de un sistema cartesiano **ortonormal** y su lado inicial está sobre el eje *x* positivo. A partir de ahora trabajamos con ángulos en posición estándar. (Recordar que un sistema de referencia cartesiano es **ortogonal** si los ejes son ortogonales, es decir que se cortan en ángulo recto; **normal**, si los ejes tienen la misma escala; y **ortonormal** cuando se cumplen ambas condiciones).

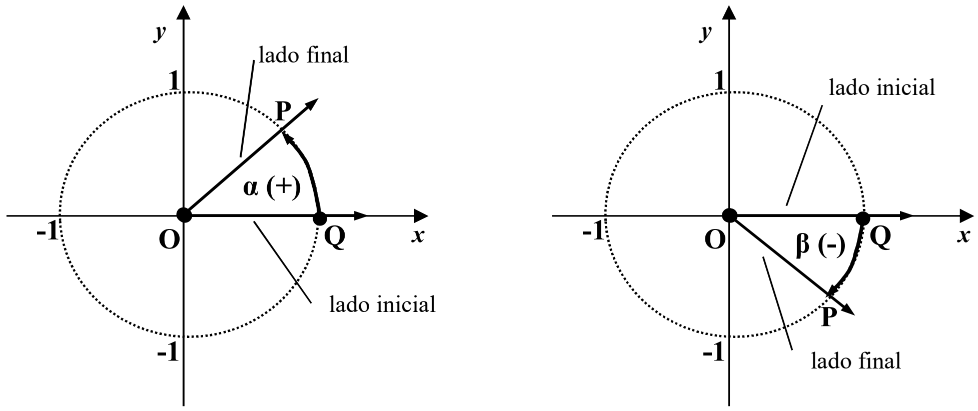


Figura 2. Posición estándar

circunferencia trigonométrica

- Circunferencia con centro en el origen de un sistema cartesiano y **radio 1**. (Figura 2)
- Los lados de un ángulo en posición estándar cortan la circunferencia trigonométrica en dos puntos: **Q** (sobre el lado inicial) y **P** (sobre el lado final).

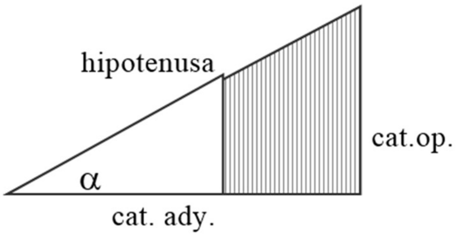
Así, la medida de un ángulo en radianes es la medida del arco que este subtiende en la circunferencia trigonométrica (recordar que con “medida” nos referimos al número que resulta del cociente entre la longitud del arco y la longitud del radio, en este caso 1).

C2.- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El origen de las ´funciones trigonométricas´ *está en la TRIGONOMETRÍA.*
Esta ciencia cuya aparición se remonta a 150 años a.de C. y se atribuye a Hiparco; se ocupó en su origen y como su nombre lo expresa (trígonos = triángulo,metrón = medida) del cálculo de todos los elementos del triángulo *(*lados, alturas, superficie, ángulos, medianas, bisectrices*). Tales cálculos revelan en su momento que en un triángulo rectángulo, si se cambian los lados pero no los ángulos, las razones entre los lados permanecen constante. A estas razones que permanecían constantes se les dio nombre, se las llamó* ´razones trigonométricas´. Según los lados que intervienen en la razón tenemos **el seno, el coseno o la tangente.**

Para α tal que:
0º < α < 90º
tenemos las
relaciones trigonométricas

- Sen $\alpha = \dfrac{\text{cat.op}}{\text{hip.}}$
- Cos $\alpha = \dfrac{\text{cat.ady.}}{\text{hip.}}$
- Tag $\alpha = \dfrac{\text{cat.op.}}{\text{cat.ady.}}$



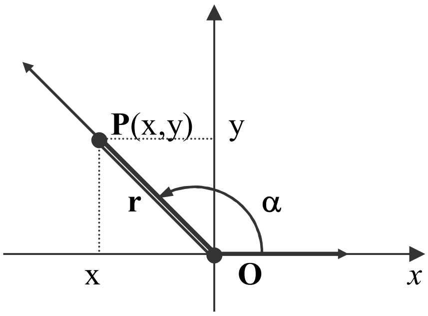
Hoy en día este primer objetivo de la trigonometría ha sido ampliamente rebasado. Los ángulos dejaron de ser considerados sólo como elementos de interés para el estudio de las figuras geométricas y se constituyeron en objetos matemáticos con entidad propia. Esto trajo aparejado la aparición de las **funciones trigonométricas**; las cuales resultan una generalización de las ´relaciones trigonométricas´, *ya que para la definición de estas funciones se quita la restricción de que el ángulo sea agudo.*
El conocimiento de las funciones trigonométricas resulta imprescindible para comprender fenómenos de muy distinta naturaleza, no sólo ligados a la Geometría sino también al Análisis y el Álgebra. Las funciones trigonométricas están involucradas en todo proceso cíclico o periódico (ondas, vibraciones, sonidos, estaciones, etc), el carácter de periódicas *que poseen hace que se constituyan en el sistema de representación* natural *para la modelización de este tipo de fenómeno.*

▪ DEFINICIÓN

funciones trigonométricas

Dado un ángulo α en posición estándar y P(x,y) un punto cualquiera del lado final del ángulo, si indicamos con r la distancia de P al origen (radio vector) entonces definimos las funciones trigonométricas *básicas*, como sigue:

- **sen** $\alpha = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}}$
- **cos** $\alpha = \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}}$
- **tag** $\alpha = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$



Si **r = 1 ;** ➢ **sen** α **= y** (ordenada de **P**)

➢ **cos** α **= x** (abscisa de **P**)

Luego, el signo o propiedades de las funciones trigonométricas básicas (seno y coseno) queda determinado por el signo o propiedades de la ordenada ó la abcisa de **P ,** punto cualquiera del lado final del ángulo.

Cofunciones: a las recíprocas de las funciones trigonométricas básicas se les da un nombre. Tenemos así:

- recíproca del seno → cosec $\alpha = r/y$
- recíproca del coseno → sec $\alpha = r/x$
- recíproca de la tangente → ctg $\alpha = x/y$

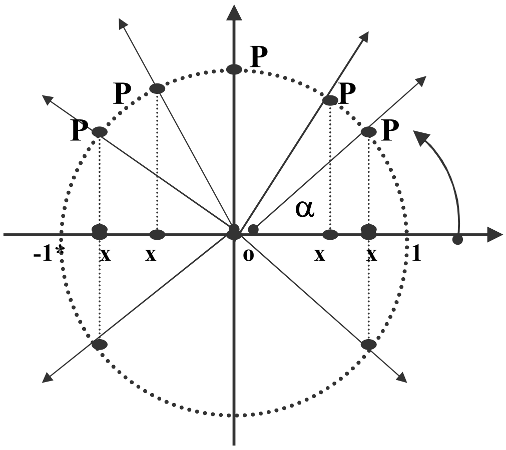
Nos abocaremos al estudio de las trigonométricas *básicas* ya que, conocidas las propiedades de estas, las de sus recípocas se deducen automáticamente. Por ejemplo, conocido el signo del seno y coseno, se tiene el signo de todas las demás funciones.

Funciones trascendentes

En general el seno o coseno de un ángulo es un número irracional. Por esta razón se las llama *funciones trascendentes.*

- ***Variación del seno y el coseno en los cuatro cuadrantes***

Para estudiar la variación de estas funciones, partimos del ángulo de 0º y hacemos girar el lado final del mismo alrededor del origen. Generamos así una *sucesión de ángulos* a partir de los cuales determinamos la variación de las funciones trigonométricas. Para ello necesitamos un punto del lado final del ángulo. Tomamos **P** tal que distancia de P al origen sea **1.** Con esta elección simplificamos el análisis ya que así **r=1** y, por ende, seno y coseno son ordenada y abscisa del **punto P.**



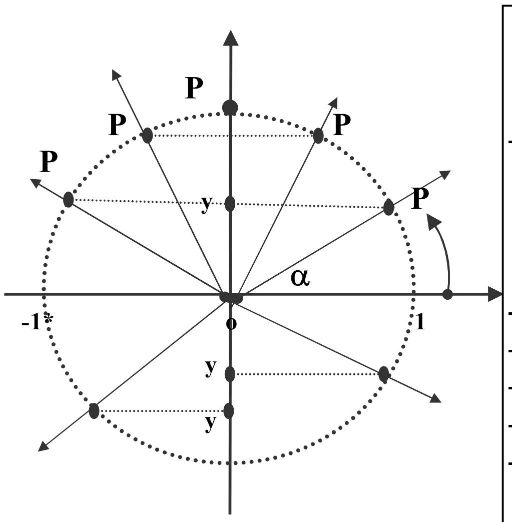
cos α = abscisa de P = x

- del gráfico, observamos que mientras $0 < \alpha < \pi$; o sea, mientras P recorre la semicircunferencia superior, su abscisa toma todos los valores del intervalo [-1;1]. ¿Cómo?:

- $\alpha = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow \mathbf{\cos 0 = 1}$
- $0 < \alpha < \pi/2 \rightarrow 0<x<1 \Rightarrow \mathbf{0 < \cos \alpha < 1}$
- $\alpha = \pi/2 \rightarrow x = 0 \Rightarrow \mathbf{\cos \pi/2 = 0}$
- $\pi/2 < \alpha < \pi \rightarrow -1<x<0 \Rightarrow \mathbf{-1 < \cos \alpha < 0}$
- $\alpha = \pi \rightarrow x = -1 \Rightarrow \mathbf{\cos \pi = -1}$

- Idem, si hacemos que **P** recorra la semicircunf. inferior, barremos todos los ángulos entre π y 2π y, leyendo del gráfico la variación de "x" , vemos que nuevamente toma todos los valores del intervalo [-1;1]; pero yendo de -1 a 1.

$$\mathbf{-1 \leq \cos \alpha \leq 1}$$



sen α = ordenada de P = y

- del gráfico, observamos que mientras $0 < \alpha < \pi$; o sea, mientras P recorre la semicircunferencia superior, su ordenada toma todos los valores del intervalo [0;1]. ¿Cómo?:

- $\alpha = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow$ **sen 0 = 0**
- $0 < \alpha < \pi/2 \rightarrow 0<y<1 \Rightarrow$ **0 < sen α < 1**
- $\alpha = \pi/2 \rightarrow y = 1 \Rightarrow$ **sen π/2 = 1**
- $\pi/2 < \alpha < \pi \rightarrow 0<y<1 \Rightarrow$ **0 < sen α < 1**
- $\alpha = \pi \rightarrow y = 0 \Rightarrow$ **sen π = 0**

- Idem, si hacemos que **P** recorra la semicircunf. inferior, barremos todos los ángulos entre π y 2π y, leyendo del gráfico la variación de "y" , vemos que toma todos los valores del intervalo [-1;0]; yendo de 0 a -1 en el 3er C. y de –1 a 0 en el 4to C.

-1 ≤ sen α ≤ 1

NOTA : El análisis de las demás funciones puede hacerse partir de los datos hallados para seno y coseno, teniendo siempre el cuidado de considerar que el resto de las funciones presenta una diferencia esencial con respecto a estas dos. Todas ellas (tg, ctg, sec y cosec) tienen alguna de las coordenadas del punto en el denominador; luego, en tal caso la función no está definida donde esta coordenada vale ´cero´ (no se puede dividir por cero).

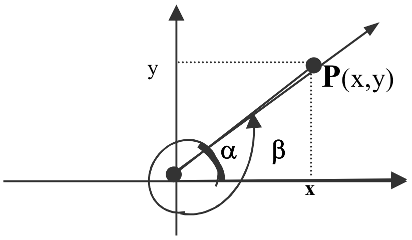
Sea, por ejemplo, la tangente: **tg α** $= \frac{\textit{ordenada de P}}{\textit{abscisa de P}} = \frac{y}{x} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$

Luego, la tangente no está definida donde la abscisa del punto es cero; o sea, donde es cero el coseno del ángulo: **π/2 ; - π/2** y todos los congruentes con ellos.
A partir del signo de seno y coseno se determina fácilmente el de la tangente, por ejemplo:

$$\pi/2 < \alpha < \pi \rightarrow \left(\begin{array}{l} 0 < \text{sen } \alpha < 1 \rightarrow \mathbf{0 < sen\ \alpha} \\ \\ -1 < \cos \alpha < 0 \rightarrow \mathbf{cos\ \alpha < 0} \end{array} \right) \rightarrow \mathbf{tg}\ \alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} < \mathbf{0}$$

ángulos congruentes

Dos ángulos se dicen congruentes cuando difieren un número entero de giros. Así α y β son congruentes si β = α + **k giros**, con **k** ∈**Z**. Sus medidas difieren en **2 k π** (β = α + **2 k** π) y el lado final de β coincide con el de α.



Para las funciones de ángulos congruentes, tenemos:

- **cos β** = **cos α** **= x** → **cos** (α + **2 k** π) = **cos** α
- **sen β** = **sen α** **= y** → **sen** (α + **2 k** π) = **sen** α

funciones periódicas

Son funciones cuyos valores se repiten *cíclicamente* o *periódicamente*; o sea aquellas que, cubierto un ´ciclo´, comienzan luego a tomar los mismos valores y así continuan indefinidamente.

» Las funciones seno y coseno (y en consecuencia todas las demás) son funciones periódicas con un ciclo o período igual a 2π ; ya que $\forall\alpha$:

$$\mathbf{cos}\ (\alpha + 2\pi) = \mathbf{cos}\ \alpha$$
$$\mathbf{sen}\ (\alpha + 2\pi) = \mathbf{sen}\ \alpha$$

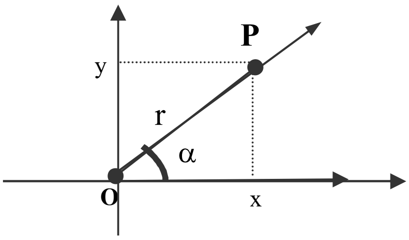
C3 - IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es una relación entre funciones trigonométricas. Vemos las más elementales de ellas. Las restantes son consecuencia o se pueden obtener a partir de las que vemos a continuación

I) *Identidad pitagórica:*

$$\boxed{\mathrm{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

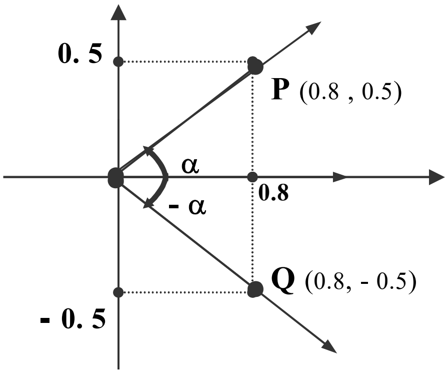
Por Pitágoras sabemos que: $x^2 + y^2 = r^2$



- Si **r = 1** , entonces : $\mathrm{sen}\ \alpha = y$

$\cos\ \alpha = x$

II) *Propiedades de reflexión*



» $\mathrm{sen}\ \alpha$ = ordenada de P = y
» $\mathrm{sen}\ (-\alpha)$ = ordenada de Q = - y

Luego : $\mathbf{sen\ (-\alpha) = -\ sen\ \alpha}$

» $\cos\ \alpha$ = abscisa de P = x
» $\cos\ (-\alpha)$ = abscisa de O = x

III) *Fórmulas de adición*

» $\mathbf{sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ .\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ .\ sen\ \beta}$

» $\mathbf{cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ .\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ .\ sen\ \beta}$

A partir de las fórmulas de adición junto a las de reflexión se obtienen las de la diferencia. $(\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha + (-\beta)))$

» $\textbf{sen}(\alpha - \beta) = \textbf{sen}\,\alpha \cdot \textbf{cos}\,\beta - \textbf{cos}\,\alpha \cdot \textbf{sen}\,\beta$

» $\textbf{cos}(\alpha - \beta) = \textbf{cos}\,\alpha \cdot \textbf{cos}\,\beta + \textbf{sen}\,\alpha \cdot \textbf{sen}\,\beta$

(*) De (I) ; (II) y (III) se obtienen el resto de las identidades trigonométricas.

- Fórmulas del ángulo doble

- Haciendo $\beta = \alpha$ en las fórmulas de adición :

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

Luego:

$$\textbf{sen}(2\alpha) = 2\,\textbf{sen}\,\alpha \cdot \textbf{cos}\,\alpha$$
$$\textbf{cos}(2\alpha) = \textbf{cos}^2\alpha - \textbf{sen}^2\alpha$$

- Si en la última fórmula obtenida, reemplazamos $\text{sen}^2\alpha$ ó $\cos^2\alpha$ por las expresiones que se obtiene despejando en la identidad pitagórica, obtenemos las siguientes fórmulas alternativas para el coseno del ángulo doble:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \text{ ó } \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$$

$$\textbf{cos}(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\textbf{cos}(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = (1 - \text{sen}^2\alpha) - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$$

Luego:

$$\textbf{cos}(2\alpha) = 2\,\textbf{cos}^2\alpha - 1$$
$$\textbf{cos}(2\alpha) = 1 - 2\,\textbf{sen}^2\alpha$$

- Finalmente de estas expresiones obtenemos el cuadrado del seno y coseno:

$$\textbf{sen}^2\alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$
$$\textbf{cos}^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

(*) Las identidades trigonométricas son útiles en la resolución de ecuaciones trigonométricas como, por ejemplo:

- hallar todos los valores de x en el intervalo $[\mathbf{0} ; \mathbf{2\pi}]$ tales que $\text{sen}\,x = \text{sen}(2x)$

$\text{sen}\,x = \text{sen}(2x)$ (aplicando la fórmula del ángulo doble)

$\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x$

$\text{sen}\,x - (2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x) = 0$ (sacando ´sen x´ como factor común)

$\text{sen}\,x \cdot (1 - 2\cos x) = 0$ (transformamos la expresión en un producto)

Un producto es cero si uno de los factores lo es; luego, tenemos dos posibilidades:

$\text{sen}\,x = 0 \rightarrow x = \mathbf{0}, \pi, \mathbf{2\pi}$

ó ; $1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pi/3 , \mathbf{5\pi/3}$

luego, $\boldsymbol{S} = \{ \mathbf{0}, \pi/3 , \pi , \mathbf{5\pi/3}, \mathbf{2\pi} \}$

(*) Estas identidades permiten también calcular las funciones trigonométricas de ángulos pertenecientes a distintos cuadrantes conociendo las del 1er cuadrante; así como también la relación entre ángulos complementarios, suplementarios, etc.

» Por ejemplo: ¿qué relación guardan entre sí los ángulos suplementarios; o sea α y β tal que $\alpha + \beta = 180º$?

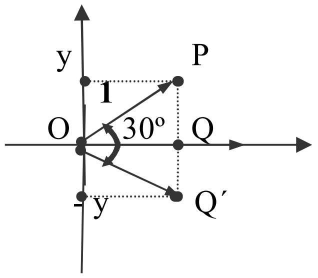
$$\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\beta} = \text{sen}\,(180º - \alpha) = \overbrace{\text{sen}\ 180º}^{\mathbf{0}} . \cos\alpha - \overbrace{\cos 180º}^{\mathbf{-1}} . \text{sen}\,\alpha = \mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}$$

Luego: $\boxed{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}$

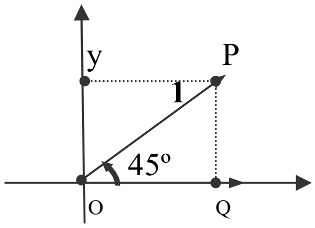
Así tenemos: **sen 150º = sen 30º; sen 120º = sen 60º; sen 135º = sen 45º**

C4 - CÁLCULO DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

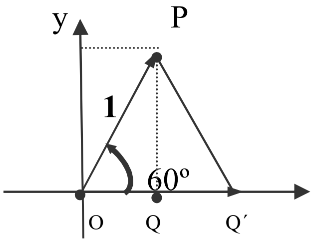
Como ya dijimos los valores de las funciones trigonométricas son en general números irracionales luego, normalmente, lo que damos son "aproximaciones" de los mismos; acudiendo para ello a la calculadora. Sin embargo, con la ayuda de la geometría clásica podemos dar los valores "exactos" de las funciones de algunos ángulos del 1er cuadrante.



POQ´ equilátero



| OQ | = | PQ | ; OPQ isósceles



OPQ´ equilátero

Considerando que para **r =1** es **sen α = y** (= ord. de P), te pedimos que a partir de esta definición y los triángulos indicados justifiques el primer renglón del cuadro adjunto (*sugerencia*: recordar el teorema de pitágoras) . Completa luego el cuadro según las indicaciones que se dan en cada caso, aplicando identidades trigonométricas.

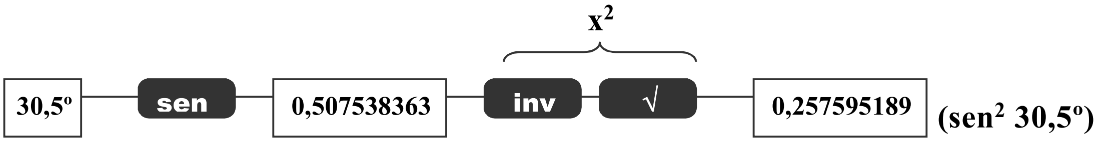
α	0º	30º	45º	60º	90º
sen α	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha = \text{sen}\,(90º - \alpha)$	1				
$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$					no existe

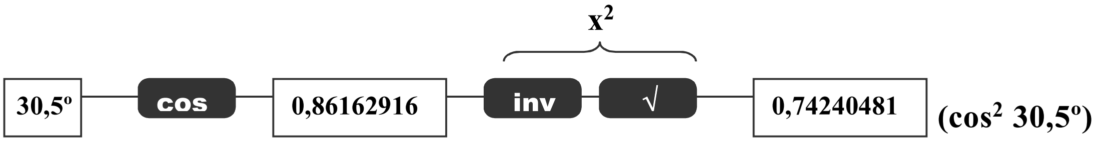
Ejemplo: verificar que **$\text{sen}^2\ 30^o + \cos^2 30^o = 1$**

Reeplazando por los valores del cuadro: $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

Ejemplo: Calcular: **$\text{sen}^2\ 30{,}5^o + \cos^2 30{,}5^o$.**

En este caso debemos acudir a la calculadora (CASIO f_x *-500$_A$*) :





Luego : **$\text{sen}^2\ 30{,}5^o + \cos^2 30{,}5^o =$** $0{,}257595189 + 0{,}74240481 = 0{,}\ 999999999 \quad (\neq 1)$

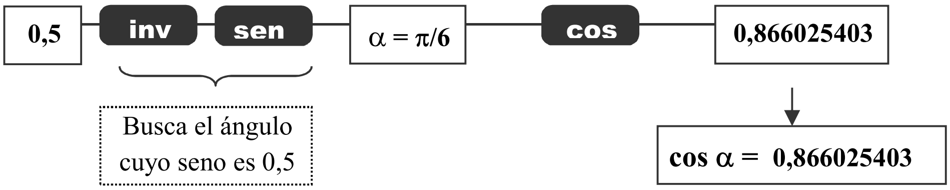
¿Qué pasó? . ¿La identidad pitagórica no valía para todo ángulo?. *Sí, valía y sigue valiendo*.

La diferencia que se observa (pequeña, pero diferencia al fin) es debida a los errores de redondeo que se introducen al trabajar con la calculadora. Como ya dijimos, los valores del seno y coseno son en general números irracionales. Estos tienen *infinitas cifras decimales*; luego, como no podemos indicarlas todas, procedemos (o procede la calculadora) a ´redondear´ el resultado , en este caso en la novena cifra decimal. Se introducen así los errores de redondeo , los cuales son los verdaderos causantes de la diferencia observada.

Una formación teórica insuficiente unida a una confianza ciega en la calculadora podría llevarnos a la *absurda conclusión* de que la identidad pitagórica no se verifica para el ángulo de 30.5º.

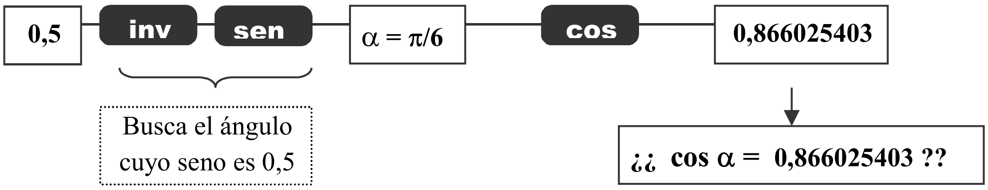
Ejemplo: Sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{2}$ y $0^o < \alpha < 90^o$, hallar "cos α"

Acudimos a la calculadora y a las funciones "inversas" de las trigonométricas.

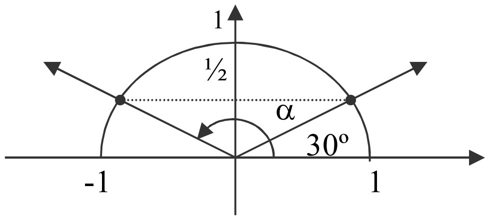


Ejemplo: Sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{2}$ y $90^o < \alpha < 180^o$, hallar "cos α" .

Acudimos nuevamente a la calculadora.



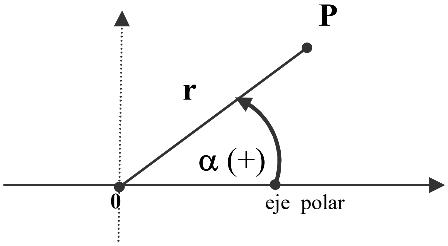
¿Qué pasó aquí? ¿El coseno de ángulos del segundo cuadrante no era **negativo**? *Sí, lo era y lo sigue siendo.* ¡¡ Esto ya no es un error de redondeo!! Descubrimos nuevamente que no podemos confiar ciegamente en la calculadora y que sólo una sólida formación teórica nos permite comprender qué está pasando en este caso.



- el ángulo cuyo seno es 0,5, **no es único.**
- sen 30º = sen α = ½ .
- Vemos entonces que la calculadora **nos da sólo un ángulo** (30º - luego veremos porqué).
- El α buscado en este caso se obtiene de hacer : α + 30º = 180º → **α = 150º**
- **cos 150º = - 0,866025403**

C5 - COORDENADAS POLARES

Ya vimos que una forma de localizar un punto en el plano es a través de sus ´coordenadas cartesianas´ (x,y). En algunos problemas es más conveniente localizar un punto por sus ´coordenadas polares´.
Las coordenadas cartesianas dan la posición del punto en relación a dos ejes perpendiculares; las polares lo hacen en referencia a un punto fijo **O** (*polo*) y a un rayo (*eje polar*) que parte de **O**. Para identificar un punto por sus coordenadas polares comenzamos por escoger un punto del plano como *polo u origen* **O** y a partir de él trazar una semirrecta con origen en **O**, el *eje polar*. El eje polar se dibuja usualmente en dirección horizontal hacia la derecha; o sea, en correspondencia con el eje x del sistema cartesiano ortogonal.



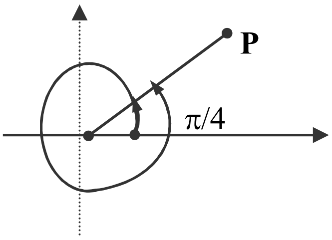
Dado el polo y el eje polar el punto P tiene **coordenadas polares r y α ,** que escribimos como el par ordenado **(r, α)** con :

- **r** (radio polar ó radio) = **d (O,P)**
- α (argumento) = ángulo dirigido entre el eje polar y la línea *OP*.

NOTAS

(*) si r = 0 , no importa cual sea α la coordenada polar (0 , α) representa el origen sin importar el valor de la coordenada angular α .

(*) las coordenadas polares difieren de las cartesianas en que cualquier punto tiene más de una representación en coordenadas polares; o sea, no existe correspondencia uno a uno entre punto y coordenada polar.

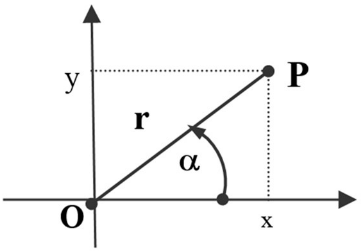


Por ejemplo si consideramos las coordenadas polares (r, π/4) y (r, π/4 + 2π) vemos que representan el mismo punto P.
Más general este punto P tiene coordenadas polares (r, π/4 + 2 kπ), con k ∈ N.

(*) La definición de las coordenadas polares (r, α) se extiende al caso de r negativo, conviniendo que (r, α) y (-r, α) se encuentran sobre la misma línea por O (la del lado terminal del ángulo)), ambos a la misma distancia de O (| r |) pero, sobre lados opuestos a O. Dado que en el desarrollo de la materia no usamos esta definición extendida, no abundamos en aclaraciones sobre la misma.

• *Relación entre coordenadas polares y cartesianas*

Ubicado el polo y el eje polar coincidiendo con el origen y el eje x de un sistema cartesiano ortogonal podemos fácilmente pasar de unas coordenadas a otras con el auxilio de las funciones trigonométricas de la coordenada angular α .



- Dato: P (r,α)
- Incógnita: P (x,y)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{x = r\ cos\ \alpha} \\ \mathbf{y = r\ sen\ \alpha} \end{array}}$$

Ejercicios:

a) Graficar los puntos A (2; π/4) ; B (3; π/2) ; C (3; - π) ; D (1; π) . Dar las coordenadas polares de sus simétricos respecto del origen.

b) Sea P(r ; π/4). Si r varía tomando todos los valores entre 2 y 4 graficar todas las posiciones posibles para P e indicar que “distancia” recorre P en este caso.

c) Sea P(3 ; α). Si α varía tomando todos los valores entre 0 y π graficar todas las posiciones posibles para P e indicar que distancia recorre P en este caso. (Recordar: $\alpha \text{ (radianes)} = \frac{\text{long.arco}}{r}$)

d) Sea P(3; α). Si α varía tomando todos los valores entre 0º y 60º graficar todas las posiciones posibles para P e indicar que “distancia” recorre P en este caso.

e) Sea P(3; α). Si al variar α el punto P recorre una distancia de 6 cm. a partir del eje x ; indicar la variación de α en radianes y grados.

APÉNDICE C: Actividades

1) *FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS*

a) Marcar en un sistema cartesiano ortogonal un punto P(u,v) sabiendo que $u = -3$; $v > 0$ y $d(P,O) = 5$. Dibujar luego, en posición estándar, el ángulo α cuyo lado final pasa por P . Calcular sen α ; cos α y tag α .

b) Dibujar dos ángulos cuyo coseno valga ½.

c) Dibujar tres ángulos cuyo seno valga - ½.

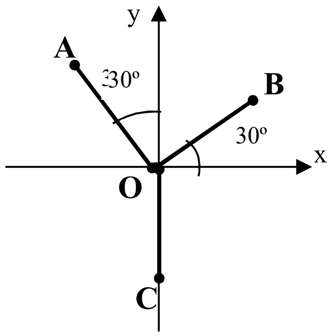
d) Dibujar dos ángulos cuya tg valga ¾ .

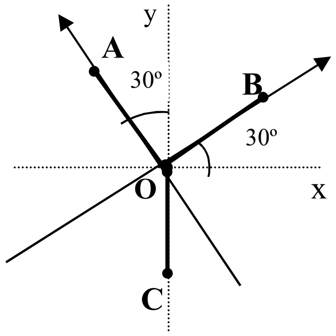
2)

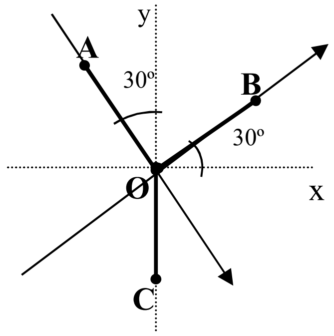
a) Marcar en un sistema cartesiano ortogonal un punto Q(a,b) sabiendo que $a>0$; $b < 0$ y $d(Q,O) = 1$. Dibujar luego, en posición estándar con sentido antihorario, el ángulo β cuyo lado final pasa por Q . Indicar los valores de sen β; cos β y tag β en función de las coordenadas de Q . A partir de estos valores decidir el signo de las respectivas funciones trig. del ángulo β.

b) Si $\theta = \beta$-180º, usando identidades trigonométricas obtener los valores de sen θ ; cos θ y tag θ en función de a y b. Graficar el ángulo θ y verificar. A partir de estos valores decidir el signo de las respectivas funciones trigonométricas del ángulo θ.

3) Los puntos A ; B y C se encuentran en un plano. Para hallar sus cooordenadas se introduce en el mismo un sistema de referencia. Indicar las coordenadas de los puntos según el sistema de referencia adoptado en cada caso si $d(A,O)= d(B,O) = d(C,O) =1$







4) Dar las coordenadas (x,y) del punto P si :

a) sen $\alpha = 0{,}25$; $d(P, O) = 2$; $x < 0$.

b) cos $\alpha = -0{,}5$; $d(P, O) = 4$; $y < 0$.

c) sen α = cos α ; $d(P, O) = 1$; $0 < \alpha < \pi/2$

5) Graficar los siguientes puntos sabiendo que $\alpha \in$ II C.
Usar identidades trigonométricas para determinar las coordenadas cuando haga falta.

A $(\cos\alpha , \text{sen}\,\alpha)$; **B** $(3\cos\alpha , 3\text{sen}\,\alpha)$; **C** $(\cos(\alpha+\pi) , \text{sen}(\alpha+\pi))$;
D $(\cos(-\alpha), \text{sen}(-\alpha))$; **E** $(\text{sen}(\pi/2 - \alpha); \cos(\pi/2 - \alpha))$; **F** $(\cos(\alpha+2\pi) , \text{sen}(\alpha+2\pi))$

6) a) Demostrar que si a y b son números dados, existe otro número c y un ángulo " α" tal que:

$$\boxed{\mathbf{a . sen\,x + b . cos\,x = c . sen\,(x + \alpha)}}$$

b) Escribir como el seno de un ángulo. Verificar la igualdad para x = 0 .

$\text{sen}\ x + \cos x =$
$\text{sen}\ x + \sqrt{3}\cos x =$
$\text{sen}\ x - \sqrt{3}\cos x =$
$-\text{sen}\ x + \sqrt{3}\cos x =$

7) Hallar el mínimo valor de "p" no nulo tal que:

a) $\text{sen}[2(x+p)] = \text{sen}(2x)$
b) $\text{sen}[3(x+p)] = \text{sen}(3x)$
c) $\text{sen}[\omega(x+p)] = \text{sen}(\omega x)$

3— Derivada

En el CAPÍTULO 2 vimos los conceptos, métodos ó instrumentos necesarios para determinar el comportamiento de una función en su dominio. En particular, para estudiar el ***comportamiento de f***:

- ☞ ***en el entorno de un punto*** x_o (para ello definimos: $\lim_{x\to x_o} f(x)$),
- ☞ ***para x´s "muy grandes"*** (±) (para ello definimos: $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$);
- ☞ ***en el punto*** x_o (para ello definimos: ***continuidad de f en*** x_o)

En definitiva, dada $y = f(x)$ nos ocupamos de estudiar formas o métodos para conocer ***como*** varía ***f*** al variar ***x*** (¿tiene comportamiento "*definido*"?, ¿se acerca a un "*valor determinado*" ?, ¿se hace "*cada vez más grande*"?, ¿presenta "*salto*" ó "*agujero*"?)

En este capítulo continuamos estudiando las funciones pero desde otra perspectiva. Dada $y = f(x)$ y x_o en su dominio ahora el objetivo esencial es determinar ***cuánto*** varía ***f*** al variar ***x*** en un ***entorno de*** x_o .

3.1 Notaciones y definiciones

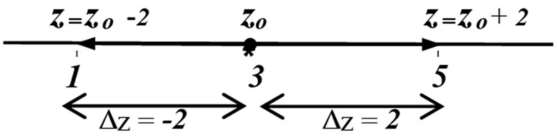
DEFINICIÓN:

Incremento de una variable : Δz	Dado un punto fijo (z_o) y uno variable (z), a la diferencia entre z y z_o producida al variar z en el entorno de z_o la llamamos ***incremento de z*** y la simbolizamos Δz . O sea: $\Delta z = z - z_o$.

Observaciones:

1) Todo punto variable z puede escribirse en función de su incremento: $z = z_o + \Delta z$.
En tal caso nos referimos a dicho punto como al "punto incrementado".

2) Δz puede ser positivo, negativo ó cero:
   - si $z < z_o$ entonces $\Delta z < 0$
   - si $z > z_o$ entonces $\Delta z > 0$
   - si $z = z_o$ entonces $\Delta z = 0$



3) Dada $y = f(x)$ y un $x_o \in$ Domf, quedan definidos dos tipos de incrementos:

   * el incremento de la variable independiente: $\Delta x = x - x_o$; y,

   * el incremento de la variable dependiente: $\Delta y = y - y_o$; con $y = f(x)$; $y_o = f(x_o)$.

En este caso, o sea cuando las variables x e y están relacionados entre sí, los respectivos incrementos, Δx y Δy, también se encuentran relacionados entre sí.

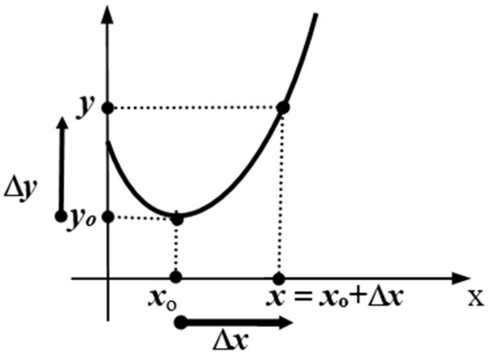
En particular, **"**si $y = f(x)$ y $x_o \in Dom\, f$ entonces Δy ***depende de*** Δx**"**.

$$\Delta y \;=\; y \;-\; y_o$$

$$\Delta y = f(\underset{\downarrow}{x}) - f(x_0)$$

↓*punto incrementado*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$



Conclusiones:

- Δy depende de x_o y de Δx,
- Para x_o *fijo*, Δy depende *sólo* de Δx.
- Para x_o *fijo*, Δy es ***función*** de Δx; o sea, existe $\varphi \,/\, \Delta y = \varphi(\Delta x)$.

Ejemplo: $f(x) = x^2$; $x_o = 1$ ⇨ $\Delta x \rightarrow \Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$

*$\underline{\Delta x = 2}$ → $\Delta y = f(3) - f(1) = \underline{8}$

*$\underline{\Delta x = 3}$ → $\Delta y = f(4) - f(1) = \underline{15}$

$\underline{\Delta x} \rightarrow \underline{\Delta y} = f(1+\Delta x) - f(1)$

$\underline{\Delta y} = (1+\Delta x)^2 - 1 = \underline{2\,\Delta x + \Delta x^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \varphi(\Delta x)$.

Notas:

ⓘ Un ***error*** frecuente en el cálculo de **Δy´s** es que conocido "un **Δy", **los restantes se calculen aplicando "*regla de tres simple*". Esta forma de cálculo es válida en el caso que f sea una función lineal y "sólo en tal caso". Si f no es lineal, usando regla de tres no se obtiene el verdadero valor de **Δy.** Vemos esto en el caso del ejemplo anterior:

$\Delta x = 2 \rightarrow \Delta y = 8$ [*dato*]

$\Delta x = 3 \rightarrow \Delta y = ?$ [*incógnita*] $\xrightarrow[\textit{de tres}]{\textit{regla}}$ $\Delta y = \dfrac{3 \cdot 8}{2} = 12$

Resumiendo:

$\Delta x = 3 \xrightarrow{\textit{por def}} \Delta y = 15$ (verdadero valor)

$\Delta x = 3 \xrightarrow{\textit{regla de tres}} \Delta y = 12$ (valor *aproximado*) ⇨ **E** (error) **= 3**

Conclusión: por regla de tres no se obtiene el *verdadero valor*. Se introduce un "error", el cual, como en este caso, puede ser "*muy grande"*.

ⓘ ***Por definición*****,** Δy informa el ***cambio total en y*** al variar x de x_o a $x_o + \Delta x$.

Veremos luego que este valor es de relativa utilidad ya que no permite apreciar la "significatividad" del cambio; o sea, establecer si este es "grande", "pequeño" o "prácticamente despreciable". Para decidir esta cuestión resulta necesario analizar el cambio y su "contexto"; o sea, relacionarlo con los otros cambios que se producen a su alrededor.

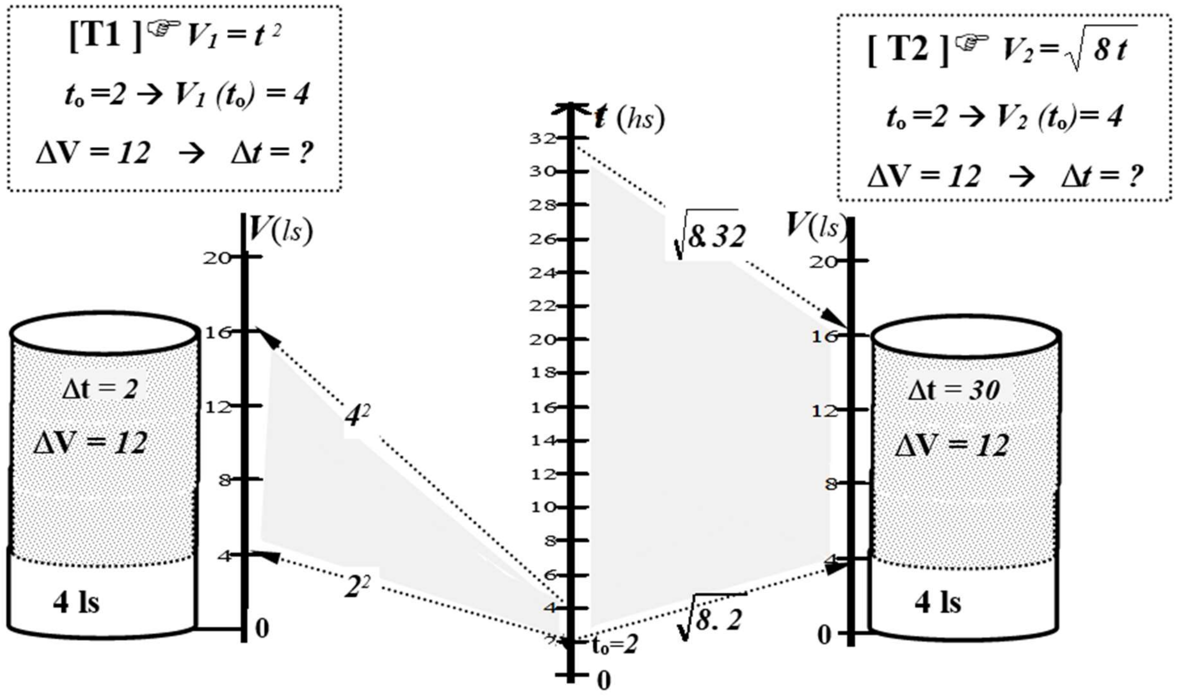
Así de lo que finalmente nos vamos a ocupar es del ***"cambio en y, en relación al cambio en x "***; a lo que se da el nombre de ***"razón de cambio".***

Ejemplo 1:

En la empresa donde trabaja, finalizada la jornada se han llenado todos los tanques del día, excepto uno. Su jefe le pide que por favor se haga cargo de este tanque, que se quede *un poco más*, que hace *2 hs*. que empezó a llenarse y *sólo* le faltan *12 ls*.

> *Su jefe, al decir que faltan "sólo" 12 ls. está sin dudas insinuando que esta cantidad es "poca". Si Ud. sabe que hay dos tipos de tanques, que estos se diferencian por la ley que rige la entrada de solución al tanque en función del tiempo: ¿le convence el argumento de su jefe de que 12 ls. es "poco"?; ¿o preguntaría de que tanque se trata antes de aceptar quedarse ?.*

ⓘ En el contexto de este problema no se puede afirmar que una "cantidad de litros" (12), sea "poca" (o "mucha"). Sin dudas, y en este caso, esta apreciación está absolutamente ligada al "tiempo" requerido para que tal cantidad de litros entre al tanque.....Y es de sospechar que si las "leyes de llenado" son distintas también lo sean los "tiempos de llenado".
Luego, resolver esta cuestión requiere calcular el tiempo necesario para que, en cada tanque y a partir de $t_o=2$, se produzca un "incremento de volumen" (**ΔV**) de 12 ls.



[T1]☞ $\Delta t = 2$ → ***en* T1 *entran 12 ls.* → *termina de llenarse en "2hs".***
Verificación: $\Delta V = V(2{+}\Delta t) - V(2) = (2{+}2)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$ (ls.)

[T2]☞ $\Delta t = 30$ → ***en* T2 *entran 12 ls* → *termina de llenarse en "30 hs".***
Verifición: $\Delta V = V(2{+}\Delta t) - V(2) = \sqrt{8(2+30)} - 4 = 16 - 4 = 12$ (ls.)

Conclusión final:

Observamos aquí que conocer la cantidad de litros que faltan para llenar el tanque no es, en sí mismo, un dato útil para la toma de decisiones. Que decidir acerca de la *significatividad* de un valor requiere *evaluar* su relación con otras variables vinculadas al mismo. En este caso, con el tiempo requerido para producir el **ΔV** deseado**.** Contrastados **ΔV** versus **Δt** en ambos tanques, concluímos que ***12 ls***. es *relativamente poco* para T1 y *relativamente mucho* para T2; porque T1 se llena en ***2hs.*** (nos podemos ir rápido!) mientras que T2 necesita ***30 hs***. para llenarse.

Ejemplo 2: dados $y = f(x)$, x_o y Δx que se indican a continuación, hallar Δy, ***cambio total en y*** al variar x desde x_o hasta $x_o + \Delta x$.

[1] $y = x^2$; $x_0 = 2$; $\Delta x = 2$ ⇨ $\Delta y = y(2+\Delta x) - y(2) = 4^2 - 4 = 12$

[2] $y = \sqrt{8x}$; $x_0 = 2$; $\Delta x = 30$ ⇨ $\Delta y = y(2+\Delta x) - y(2) = \sqrt{256} - 4 = 12$

¿Qué informa Δy*?*: que ***y aumentó 12 unidades*** al variar x de 2 a $2+\Delta x$.

$\Delta y = 12$ ***u.***: ***¿ es mucho?, ¿ poco ?, ¿o es relativo?***

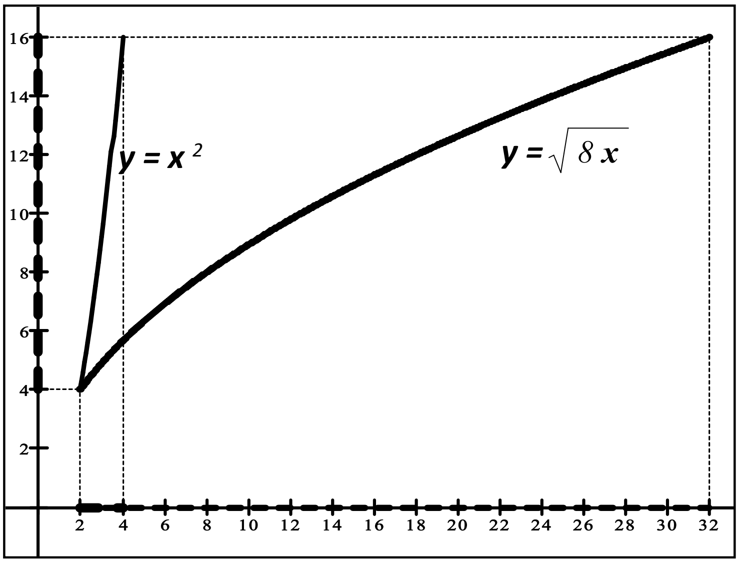
Evaluar cuan significativo es el ***cambio en y,*** requiere referir el mismo al ***cambio en x .***

☞ $y = x^2$; $\Delta x = 2$ <<<< $\Delta y = 12$
el cambio en y es *´grande´*
en *´relación´* al cambio en x.

Decimos que ***y, crece rápidamente***

☞ $y = \sqrt{8x}$; $\Delta x = 30$ >>> $\Delta y = 12$
el cambio en y es *´chico´*
en *´relación´* al cambio en x.

Decimos que y, ***crece lentamente***



Verificamos así que mientras el ***cambio total en y*** es un valor de escasa utilidad, el ***cambio en y "en relación" al cambio en x***, es un dato realmente útil por cuanto informa acerca de la ***´velocidad´*** con que una función varía en el entorno de un punto.

Una forma práctica de evaluar esta relación es a través del cociente de los incrementos. Tan importante es este cociente que se le da un nombre y se dedica una rama del Cálculo a su estudio. Se lo llama ***razón relativa de cambio*** ó ***razón de cambio en y respecto al cambio en x***. Abreviadamente, ***"razón de cambio".***

Razón de cambio $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$:

Este cociente recibe diversos nombres los que dependen de la disciplina de que se trate. Así, en matemática se lo llama ***cociente incremental*** mientras que en las ciencias fácticas lo más habitual es llamarlo, ***razón de cambio***.

¿Qué información brinda la "razón de cambio" respecto al comportamiento de f?

En lo que sigue vemos esto; o sea, características y propiedades de la razón de cambio.

*Para investigar este cociente vamos a hacerlo al modo de un investigador: en forma sistemática y con método, partiendo del ´*caso simple*´ ó* 'conocido'.

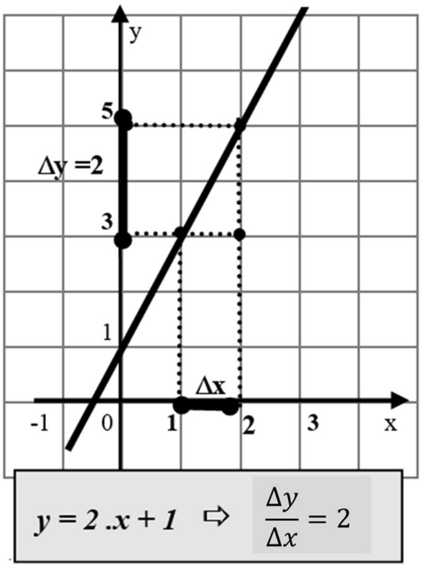
❶ *Razón de Cambio y Función Lineal.*

Al estudiar la función lineal, ***y = f(x)*** con ***f(x) = m x + h***, concluimos que:

$$f \ \textit{lineal} \ \Leftrightarrow \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = m \ ; \ \forall \ \Delta x \ \Leftrightarrow \ \textit{la razón de cambio es constante}.$$

ⓘ ***¿qué dice esto de la función lineal ?***:

- que Δy es ***directamente proporcional*** a Δx.
  (lo que legitima el uso de *´regla de tres´*)
- que, ***y cambia exactamente ´m´ unidades por cada cambio unitario en x*** ;
  de otra forma, que
  y varía a ´velocidad constante´ .
- finalmente, y fundamentalmente, que
  ´velocidad de variación constante´
  es lo que *caracteriza* a la función lineal.
  O sea, una *propiedad que presenta la función lineal y sólo ella*.



ⓘ Esta última observación: ***¿qué dice de las funciones no lineales ?***:

- que, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq$ *cte*;
- que, Δy no es *directamente proporcional* a Δx (no vale el uso de *´regla de tres´*)
- que no se puede establecer *a priori* cuanto variará ***y*** al variar ***x*** en una unidad.

De otra forma, que la ***velocidad de variación de y, no es constante***.

Dada ***f no lineal*** y x_o un punto de su dominio, ¿habrá algún método o forma de conocer la ***velocidad*** a la que estaría variando ***f , cuanto menos en ese punto ?***.
Contestar esta pregunta requiere investigar la ***razón de cambio*** para ***f*** no lineales; la existencia de alguna ***´regularidad´*** o ***´patrón´*** en el comportamiento de las mismas.

❷ *Razón de Cambio y Función No Lineal.*

Comenzamos investigando un *´caso simple´*: $f(x) = x^2$ **.** Para ello procedemos a:

- ***elegir*** un x_o → $x_o = 1$
- ***calcular*** Δy para distintos Δx; hacer esto de la forma más apropiada al caso.
- ***calcular*** Δy/Δx; ***organizar*** la información de modo que permita detectar algún hecho o dato peculiar en el comportamiento del cociente incremental.

Cálculo de Δy **:** disponemos de dos procesos para concretar este cálculo,

(I) *cálculo por definición*: $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$

(II) *cálculo por fórmula:* consiste en obtener Δ***y*** como función de Δ***x*****.** O sea, hallar φ tal que Δ***y*** = φ (Δx)**.** Hallada φ**,** disponemos de una fórmula de cálculo.

Si el objetivo es hallar un único Δ***y,*** no se justifica el uso del proceso (II).
Pero si el objetivo es hallar Δ***y*** para varios Δ***x***, el proceso (II) es más conveniente pues provee de una *´fórmula´* que facilita y agiliza la tarea.

Usamos (II) para investigar la razón de cambio para $f(x) = x^2$ y $x_o = 1$.

$$\Delta x \in \mathbf{R} \ \rightarrow \ \Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - (1)^2 = \mathbf{2}.\Delta x + \Delta x^2$$

Luego**:** $\Delta y = \varphi(\Delta x)$ con $\varphi(\Delta x) = \mathbf{2}.\Delta x + \Delta x^2$

- Obtenida φ, la usamos para calcular rápida y sistemáticamente los Δy correspondientes a distintos Δx (elegidos según el caso).
- Organizamos los resultados en una tabla.
- Calculamos y registramos el cociente $\Delta y/\Delta x$. Procedemos a investigar el comportamiento de dicho cociente; o sea, de la *razón de cambio*.

Δx	$\Delta y = 2.\ \Delta x + \Delta x^2$	$\Delta y / \Delta x$
2	**8**	**4**
1. 5	**5.25**	**3. 5**
1	**3**	**3**
0. 5	**1.25**	**2. 5**
0.25	**0.56**	**2. 24**

$\Delta x \rightarrow 0$

$\Delta y \rightarrow 0$??

$\Delta y / \Delta x \neq$ constante
$\Delta y / \Delta x$, ¿decrecen??

Observaciones:

1) La lectura de la tabla muestra una *tendencia* en el comportamiento de los **Δy**; estos pareciera que *decrecen a medida que Δx → 0.*
2) Nos preguntamos, *¿tendrán los* **Δy** *un comportamiento definido*?,
   ¿se acercarán "tanto como quieran" a un único número?
   De continuar la tabla con **Δx** cada vez más chicos (Δx = *0.1*; *0.01;...*) veríamos que los **Δy** siguen acercándose a *"cero"* y, aparentemente, *"tanto como quieran"*.
   ¿Cómo corroboramos o refutamos esta hipótesis?: calculando $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\, 2\ \Delta x + (\Delta x)^2 \,\right] = \mathbf{0} \ \checkmark$$

Conclusiones:

* **Δy** es un infinitésimo para Δx → 0 (según lo demostrado)

* **Δx** es un infinitésimo para Δx → 0 (trivial)

* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, la ***razón de cambio***, es un ***cociente de infinitésimos*.**

El trabajo hecho permite descubrir que la ***razón de cambio*** además de ser vista como un ***cociente de incrementos*** puede ser visualizada como un, ***cociente de infinitésimos***.
La cuestión es si esta nueva forma de visualizar la razón de cambio habilita un camino útil a nuestros fines; o sea, un método para investigar ***el cambio en y en relación al cambio en x,*** en un entorno de x_o. En el Cap.2 vimos que una forma de investigar el ***comportamiento ´relativo´ de dos infinitésimos*** era a través de evaluar el límite del cociente entre ambos (lo que llamamos, "comparación de infinitésimos"). Luego, visualizar la razón de cambio como cociente de infinitésimos, proporciona un método útil a nuestro propósito: ***evaluar el límite del cociente entre los respectivos incrementos***.
Concluimos así que una forma de resolver el interrogante planteado para el caso de las funciones no lineales es a través del cálculo y evaluación del $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

El estudio y cálculo de este límite constituye en su momento el desvelo y objetivo de grandes matemáticos como Newton o Leibniz; da lugar al desarrollo de una de las dos ramas fundamentales en las que se divide el Cálculo o Análisis Matemático: el ***CÁLCULO DIFERENCIAL****.*
La importancia de este límite radica en que da respuesta a problemas de muchas y muy diversas ciencias (matemática, física, química, biología, economía, ecología, etc.). Así, y debido a ello, se le da nombre propio, ***derivada****, y se crean distintos símbolos para representarlo.*

Algunos de ellos: $f'(x_o)$; $y'(x_o)$; $\dfrac{dy}{dx}(x_o)$

Luego, y en definitiva, de lo que nos ocupamos en este capítulo es de la **DERIVADA.** Comenzamos con la definición.

DEFINICIÓN de DERIVADA:

Derivada de una función en un punto $f'(x_o)$	Dada $y = f(x)$, $x_o \in \mathrm{D}f$ con $f'(x_o)$ indicamos la derivada de f en x_o, la que definimos como: $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (si el límite existe finito)

***Observaciones*:**

1) El proceso de hallar la derivada de una función se llama ***derivación***.
2) Si existe $f'(x_o)$, decimos que la función es ***derivable en x_o***.
3) Si existe $f'(x_o)$, $\forall\, x_o \in D$, decimos que la función es ***derivable en D***.
4) Existen otras notaciones para la derivada , alguna de las cuales son:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{derivada}} f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = Df(x)$$

5) Al cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, lo llamamos *cociente incremental* (**CI**).
6) El ***cálculo*** de derivadas es, en principio y básicamente un ***cálculo de límite*** ya que ***la derivada*** no es otra cosa que el ***límite*** del cociente incremental $\Delta y / \Delta x$.

7) El cociente incremental se puede expresar de distintas formas según como se escriba el ***incremento en x*** (Δx ó $x - x_o$) y el ***punto incrementado*** (x ó $x_o + \Delta x$). La elección que se haga determina dos formas para Δy, por ende, para el CI :

☞ $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \mathbf{CI}_{(1)}$$

☞ $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathbf{CI}_{(2)}$$

La diferencia entre ambas formas, es *la variable* en la que queda expresado el CI en cada caso:
CI $_{(1)}$ → queda en función de Δx.
CI $_{(2)}$ → queda en función de x.

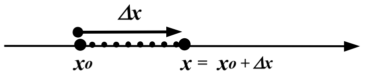
➢ *Cálculo "por definición" de* $f'(x_o)$

Con $\mathbf{CI}_{(1)}$ → $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Con $\mathbf{CI}_{(2)}$ → $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En (*) el cociente incremental queda en función de ´x´ ; luego, es necesario *cambiar la variable del límite*. Para hacer esto tenemos en cuenta que:

$\Delta x \to 0$ si y sólo si $x \to x_o$



- Como $x = x_o + \Delta x$, es evidente que: ***si $\Delta x \to 0$ entonces $x \to x_o$.***
- Como $\Delta x = x - x_o$, es evidente que: ***si $x \to x_o$ entonces $\Delta x \to 0$.***

ⓘ Para hallar la derivada de una función, por ejemplo $f(x) = x^{n}$; procedemos a:

☞ elegir alguna forma de expresar el CI → $\mathbf{CI}_{(2)} = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{x^n - x_o^n}{x-x_o}$,

☞ calcular el límite del CI elegido → $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \frac{x^n - x_o^n}{x-x_o}$

ⓘ Cualquiera sea la forma en que planteemos el límite, debe quedar una indeterminación del tipo 0/0 (**CI:** ***cociente de infinitésimos***).

<u>Ejemplo</u>: cálculo por definición de f´(5) para $f(x) = x^{n}$ con $n = 2; 3; 4$

▸ $f(x) = x^2$ → $f'(5) = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-5^2}{x-5} \underset{ind.\left(\frac{0}{0}\right)}{\underbrace{=}}$ *(dividimos)*

$$= \lim_{x\to 5}(x+5) = 5+5 = \mathbf{10}$$

▸ $f(x) = x^3$ → $f'(5) = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x^3-5^3}{x-5}$ = *(dividimos)*

$$= \lim_{x\to 5}(x^2+5.x+5^2) = 5^2+5^2+5^2 = \mathbf{75}$$

▸ $f(x) = x^4$ → $f'(5) = \lim\limits_{x\to 5} \frac{x^4-5^4}{x-5}$ = *(dividimos)*

$$= \lim_{x\to 5}(x^3+5.x^2+5^2.x+5^3) = 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3 = \mathbf{500}$$

ⓘ El análisis retrospectivo y en conjunto de los pasos realizados para obtener ***f´(5)*** para distintos ***n***´s permite apreciar un ***´patrón´*** en el ***proceso de cálculo*** de los respectivos límites. O sea, posibilita la detección de un *esquema* que se repite potencia a potencia y que, de ser válido para todo ***n***, permitiría *generalizar el proceso*, ***simplificar el cálculo de la derivada***.

Generalizar un proceso requiere trabajar con método; es decir, *proceder a la observación y registro sistemático de casos según ciertos principios básicos como*:

* expresar algunos resultados sin realizar los cálculos, aunque estos sean obvios.
(si efectivamente existe un esquema o patrón de cálculo, dicho patrón se hace visible, no queda *enmascarado por el resultado particular del caso*).

* organizar el trabajo de modo que facilite la detección del ***patrón*** que se busca.

n	***f(x)***	$\lim\limits_{x\to x_o} \frac{x^n-x_o^n}{x-x_o} =$	***f´(5)***	***f´(5)***	***f´(5)***
2	x^2	$= \lim\limits_{x\to 5}(x+5)$	= 5 +5	= **2** .5	= ***10***
3	x^3	$= \lim\limits_{x\to 5}(x^2+5.x+5^2)$	$= 5^2 + 5^2 + 5^2$	$= \mathbf{3}\ .5^{2}$	= ***75***
4	x^4	$= \lim\limits_{x\to 5}(x^3+5.x^2+5^2.x+5^3)$	$= 5^3 + 5^3 + 5^3 + 5^3$	$= \mathbf{4}\ .5^{3}$	= ***500***
…	**…….**	*vemos así como se va configurando*	*el ´resultado´*	**……………….**	**…………**
n	x^n	…….. *que, para* ***n*** *genérico*	*el ´resultado´ sería*	$= \mathbf{n}\ .5^{\mathbf{n-1}}$	
		…….. *que, para* x_o y ***n*** *genérico*	*el ´resultado´ sería*	$= \mathbf{n}\ .x_o^{\mathbf{n-1}}$	

ⓘ El trabajo realizado permite *´inducir´* una *´fórmula´* para el cálculo de la derivada de una potencia. Como esta fórmula resulta de un *´proceso inductivo´* no podemos afirmar que sea válida $\forall \boldsymbol{n}$. Para ello debemos *´demostrar´* que vale $\forall \boldsymbol{n}$.

Regla de la potencia	Si $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbf{N}$, entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$; $\forall\, x \in \mathfrak{R}$

Demostración: $$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{x^n - (x_o)^n}{x - x_o} \underset{(\textit{dividiendo por Ruffini})}{=}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \underbrace{(x^{n-1} + x_o \,.\, x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_o)^{n-2}.\, x + (x_o)^{n-1}}_{n\ \ sumandos})$$

$$= \underbrace{(x_o)^{n-1} + x_o \,.\, (x_o)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_o)^{n-2}.\, x_o + (x_o)^{n-1}}_{\boldsymbol{n\ \ veces}\ (x_o)^{n-1}}) = \boldsymbol{n.\ (x_o)^{n-1}}$$

Conclusión: x_o valor genérico; luego, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$; $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

➢ El resultado hallado para exponentes *naturales* nos lleva a preguntar si la regla no valdrá para otros exponentes. Para ver esto calculamos y concluimos:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $[= x^{-1}]$. Calculando por *def.* → $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $[= (-1)\, x^{-2}]$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $[= x^{1/2}]$. Calculando por *def.* → $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $[= ½\ x^{-½}]$

Para estos ejemplo (exponente negativo y fraccionario), la regla se cumple.
Si bien dos ejemplos no permiten sacar conclusiones generales, más adelante, vistos otros resultados teóricos, demostraremos que esta regla vale para todo exponente real.
O sea, demostraremos la siguiente regla de derivación:

Regla de la potencia *(generalizada)*	Si $f(x) = x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbf{R}$, entonces $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in \mathbf{Dom}_f$

ⓘ En muchos casos, antes de derivar, conviene simplificar la función; de ser posible, trasformar la misma en una potencia. Los siguientes ejemplos ilustran esta idea:

- $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}}$ → $\mathbf{f'(x) = (-2)\, x^{-3}}$
- $\mathbf{g(x) = x.\sqrt{x} = x^{3/2}}$ → $\mathbf{g'(x) = (3/2).\ x^{1/2}}$
- $\mathbf{h(x) = \frac{x.\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{5}{4}}}$ → $\mathbf{h'(x) = (5/4).\ x^{1/4}}$

ⓘ Dado que el cálculo *'por definición'* de una derivada desemboca siempre en una indeterminación del tipo *0/0* en lo que sigue vamos a buscar formas alternativas de cálculo; en particular, ***reglas de cálculo*** del estilo de las halladas para las potencias. O sea, vamos a buscar ***reglas de derivación*** que faciliten el ***cálculo de derivadas.***

ⓘ ***Pero, ¿ porqué o para qué calculamos derivadas?***
Ocupados en el *cálculo en sí* quizás hemos perdido de vista ***el problema que dio origen al concepto de derivada***; no hemos analizado aún si ***la derivada*** es efectivamente una respuesta apropiada a dicho problema. Conviene entonces detenerse y reflexionar acerca de esta cuestión; es decir, si la derivada resuelve el problema planteado al inicio de este capítulo, permite cuantificar o cuanto menos estimar el ***"cambio en y relativo a un cambio en x"*** para toda ***f.***
Revisamos los resultados obtenidos y tratamos de concluir algo al respecto.

➢ $y = x^2$; $x_o = 5$ $\xrightarrow{pag.208}$ $y'(5) = 10$; ***¿qué nos dice este valor? :***

- ● $y\,'(5) = 10 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 10$,
- ● $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 10$ indica, por *definición de límite*, que:

"si $\Delta x \approx 0$ entonces $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx 10$ " ; equivalentemente que,

"si $\Delta x \approx 0$ entonces $\Delta\, y \approx 10 .\Delta\, x$ ".

o sea, que al ***incrementar x*** a partir de ***xo = 5***

"***y*** $(= x^2)$ ***se incrementa aproximadamente* 10 *veces lo que x*** ".

➢ $y = x^3$; $x_o = 5$ $\xrightarrow{pag.208}$ $y\,'(5) = 75$. En forma análoga que para x^2,

concluimos que al ***incrementar x*** a partir de ***xo = 5***,

"***y*** $(= x^3)$ ***se incrementa aproximadamente* 75 *veces lo que x*** ".

Vemos así que ***f'(xo)*** da la información buscada; o sea, informa acerca del ***cambio en y en relación al cambio en x*** (al menos da una *aproximación* en un entorno de ***xo***).

ⓘ En su momento, al ***comparar infinitos p/ x*** → $+\infty$, en particular potencias, concluimos que la de mayor grado (*ej*: x^3) le *ganaba* a la de menor grado (*ej*: x^2) (es decir, aumentaba más *rápido*, a mayor *velocidad*).
Y esto es lo que corroboramos aquí. Más aún, ahora estamos en condiciones de dar una estimación de *cuanto más* crece una potencia que otra en el entorno de ***xo*** .
Efectivamente, y por ejemplo, del análisis hecho vemos que,
en el entorno de 5 y ***para un mismo*** Δx ,

x^2 *se* ***incrementa*** (*aprox.*) **10** *veces lo que* ***x*** ;

x^3 *se* ***incrementa*** (*aprox.*) **75** *veces lo que* ***x*** ; y,

x^4 *casi* ***500*** *veces!!!* .

3.2 Función Derivada

En la definición de derivada, al punto fijo lo indicamos con x_o. Dado que x_o representa un valor genérico, lo podemos reemplazar por x, escribir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Luego, para cada ´*x*´ donde este límite existe finito queda definida una ***función***.

DEFINICIÓN:

función derivada f'	Dados $y = f(x)$ y $\mathbf{D} = \{x \in \mathbf{R}$ / existe $f'(x)$ }; llamamos ***función derivada*** , que indicamos f' , a la siguiente función**:** $f' : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{R}$ $x \longrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ejemplos:

1) $\mathbf{f}(x) = k$ (cte); $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $\mathbf{f}'(x) = 0$; $\mathbf{D}f' = R$
2) $\mathbf{f}(x) = x$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{regla de la potencia}}$ $\mathbf{f}'(x) = 1$; $\mathbf{D}f' = R$
3) $\mathbf{f}(x) = x^5$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{regla de la potencia}}$ $\mathbf{f}'(x) = 5\,x^4$; $\mathbf{D}f' = R$
4) $\mathbf{f}(x) = \sqrt{x}$; $D_f = \mathbf{R}_{\mathbf{o}}^{+}$ $\xrightarrow{\text{regla de la potencia}}$ $\mathbf{f}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\mathbf{D}f' = R^+$
5) $\mathbf{f}(x) = x^5 + x^2$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $\mathbf{f}'(x) = 5\,x^4 + 2\,x$; $\mathbf{D}f' = R$
6) $\mathbf{f}(x) = \text{sen}\, x$; $D_f = R$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $\mathbf{f}'(x) = \cos x$; $\mathbf{D}f' = R$
7) $\mathbf{f}(x) = \ln x$; $D_f = R^+$ $\xrightarrow{\text{calculando por definición}}$ $\mathbf{f}'(x) = 1/x$; $\mathbf{D}f' = R^+$

Observaciones:

1) Las demostraciones de las derivadas *por definición* se hallan en el apéndice.
2) Respecto al dominio de la función derivada es importante destacar que calcular **Δy** requiere calcular ***f***(x+Δx) y ***f***(x); que, en consecuencia, el dominio de la derivada puede ser menor o igual que el de la función, nunca mayor al mismo. Así, y por ejemplo, en el caso del logaritmo vemos que su derivada, ***1/x*** , puede ser calculada para cualquier ***x´s*** distinto de cero pero dado que la función ***ln x*** no existe para ***x´s*** negativos, estos números deben ser descartados del dominio de la derivada. O sea que: $Df' = R\text{-}\{0\} \cap R^+ = R^+$.
3) En general, el dominio de la función derivada es: $Df' = D(\text{ley de } f') \cap Df$.
4) En el ejemplo (5) vemos que la **f** es ***suma de dos funciones*** (dos potencias), que **f´** resulta ser ***la suma de las derivadas*** de esas dos potencias.

Luego cabe preguntarnos si esta no será una propiedad de la derivación; o sea, *la derivada de una suma de funciones*, ¿será siempre *la suma de las derivadas*? .Y en el caso de un producto de funciones, ¿qué pasará?
En lo que sigue vemos estas cuestiones.

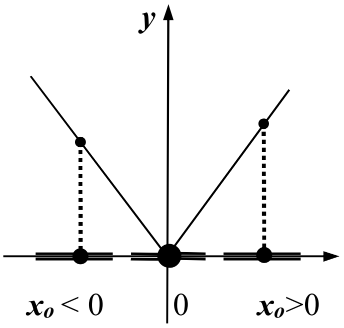
3.3 Propiedades de la Derivada – Reglas de Derivación

Continuidad y derivabilidad son propiedades deseables para una función; luego, debemos:

* idear criterios *rápidos* para hallar dominio de continuidad y derivabilidad de *f*.
* determinar si existe alguna relación entre ambos conceptos.

Por otro lado una función puede venir dada por su gráfico o ser fácil de graficar con el auxilio de alguno de los tantos dispositivos que hoy existen; así, conviene disponer de *criterios gráficos* que permitan detectar fácilmente del gráfico los puntos de discontinuidad y no derivabilidad.
Respecto al *dominio de derivabilidad*, este depende de cómo esté dada la función. Así, si la ley viene dada por una ecuación: Df′ = Df $\cap$ D(ley de f′).
¿Y si la ley viene dada por más de una ecuación? Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Hallar dominio de derivabilidad de $f(x) = |x|$.



- si $x_o > 0$; existe un entorno de x_o donde $x > 0$;
  o sea, donde $|x| = x$. Luego:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{|x| - |x_o|}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{x - x_o}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} 1 = 1 \ .$$

- si $x_o < 0$; existe un entorno de x_o donde $x<0$;
  o sea, donde $|x| = -x$. Luego:

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{|x| - |x_o|}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{(-x) - (-x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} -1 = -1$$

- si $x_o = 0$; no existe ningún entorno donde los x′s *no cambien de signo* ; luego el cálculo del límite debe hacerse a través de *límites laterales*.

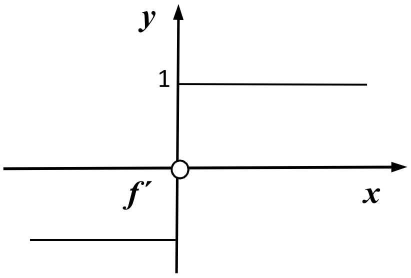
$$(*) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1$$

$$(*) \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to x_0} -1 = -1$$

Límite laterales distintos.
$\Rightarrow$ no existe el límite del CI;
$\Rightarrow$ no existe derivada;
$\Rightarrow$ no existe $f'(0)$.

Conclusión: $f(x) = |x|$ es derivable en $\mathbf{R} - \{0\}$:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & si \ x < 0 \\ 1 & si \ x > 0 \end{cases}$$



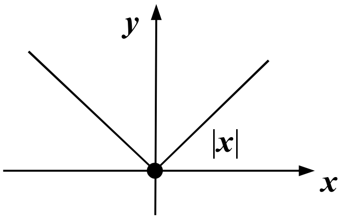
ⓘ Si observamos la gráfica de $f(x) = |x|$ resulta notorio que en $x_o = 0$, punto donde f no es derivable (y sólo allí), la gráfica presenta un ´*ángulo*´ o ´*esquina*´.
En razón de ello a este tipo de punto lo llamamos ´***punto anguloso***´.

ⓘ Se puede probar que un *punto anguloso* señala un punto donde *la derivada no existe.*

ⓘ Si observamos la gráfica de $f(x) = |x|$ con el objeto de detectar alguna relación

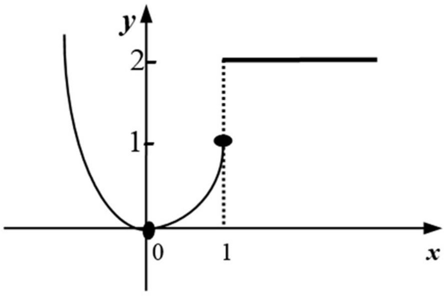
Entre *derivabilidad* y *continuidad*, claramente vemos que ***f*** *es continua en cero*.
Esto indica que ***la continuidad*** ***<u>no es condición suficiente</u>*** ***para la derivabilidad***.

- ➢ f continua en $x_o = 0$
- ➢ f no derivable en $x_o = 0$



<u>Ejemplo</u>:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \; x \leq 1 \\ 2 & ; \; x > 1 \end{cases}$$



- $\forall \, \mathbf{x_o} < 1$; existe δ tal que $\forall \, x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x \;\Rightarrow\; \mathbf{f'(x_o) = 2x_o}$
- $\forall \, \mathbf{x_o} > 1$; existe δ tal que $\forall \, x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = 2$; $f'(x) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{f'(x_o) = 0}$;
- $\mathbf{x_o = 1}$; f cambia de ley en **1** → calculamos límites laterales.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1-} (x+1) = \mathbf{2}$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Límite laterales <u>distintos</u>.
⇒ <u>no existe</u> el límite del CI;
⇒ <u>no existe derivada;</u>
⇒ no existe f' **(1)** .

ⓘ Si observamos la gráfica de ***f*** ; vemos que ***f*** es discontinua en $\mathbf{x_o = 1}$.
Luego, ***la continuidad*** en el punto parece ser ***<u>condición necesaria</u>*** para la existencia de derivada en el punto. En lo que sigue vemos esto.

TEOREMAS FUNDAMENTALES del CÁLCULO DIFERENCIAL

TEOREMA 1 (relación entre derivabilidad y continuidad)
Si f es derivable en x_o, entonces f es continua en x_o.

Demostración: f *derivable en* $x_o \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o)$

Luego, por el teorema de escritura fuera del límite (teorema 18, capítulo 2), el cociente incremental se puede escribir como el límite, $f'(x_o)$, más un infinitésimo para $x \rightarrow x_o$;

o sea: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o) + \varepsilon(x)$; con $\lim\limits_{x \to x_o} \varepsilon(x) = 0$

$$f(x) - f(x_o) = (f'(x_o) + \varepsilon(x)).(x - x_o)$$

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o).(x - x_o) + \varepsilon(x).(x - x_o).$$

Recordando que, f continua en $x_o \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$; calculamos el límite:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} [\, f(x_o) + f'(x_o).(x - x_o) + \varepsilon(x).(x - x_o)\,] =$$

$$= f(x_o) + f'(x_o).\,0 + 0 = f(x_o)$$

Luego: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) \Rightarrow$ *f continua en* x_o. **(q.e.d)✓**

***Observación*:**

Probada la *verdad* de una afirmación del tipo $p \Rightarrow q$ inmediatamente debemos investigar la verdad de las proposiciones derivadas de ella.

1) directa*:* $p \rightarrow q$; $\underbrace{f \text{ derivable en } x_o}_{p} \Rightarrow \underbrace{f \text{ continua en } x_o}_{q}$ *(V)*

2) recíproca**:** **q → p** ; f continua en x_o ⇒ f derivable en x_o. **(F)**

3) *inversa:* *~p → ~q* ; *f no derivable en* $x_o \Rightarrow$ *f discontinua en* x_o. ***(F)***

4) *contra-recíproca*: ~q → ~p; *f discontinua en* $x_o \Rightarrow$ *f no derivable en* x_o. (V)

Justificación

2) La *recíproca* es *falsa*: $f(x) = |x|$ es continua en cero y no es derivable en cero.

4) La *contra-recíproca* es *verdadera* porque la *directa es verdadera*.
O sea, ***discontinuidad implica no derivabilidad***. Y tenemos otro parámetro para detectar puntos donde no exista la derivada: ***la discontinuidad***. Luego, ***f no derivable*** en los puntos donde el ***graf f*** presente ***ángulos***; ***saltos*** ó ***agujeros***.

TEOREMAS: REGLAS de DERIVACIÓN

En esta sección vamos a ver ´reglas´ para calcular la derivada de funciones obtenidas a partir de otras, a través de operaciones algebraicas, composición o inversión.
La demostración de las mismas se encuentra en el apéndice de este capítulo.

TEOREMA 2 (derivada de la suma o resta)

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces $f \pm g$ es derivable en x,

y vale que: $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

TEOREMA 3 (derivada del producto)

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces f.g es derivable en x,

y vale que: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Corolario teorema 3:

Si f es derivable en x y k = cte, entonces k.f es derivable en x,

y vale que: $(k f)'(x) = k \cdot f'(x)$

TEOREMA 4 (derivada del cociente)

Si f y g son dos funciones derivables en x y $g(x) \neq 0$, entonces f /g es derivable en x, y vale que:

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

TEOREMA 5 (derivada de la composición o ´regla de la cadena´)

Si **f** es derivable en $g(x)$; **g** es derivable en x y la función compuesta **h** = f o g está definida en x, entonces **h** es derivable en x, y vale que:

$$\mathbf{h}'(x) = \mathbf{f}'(g(x)) \cdot \mathbf{g}'(x)$$

ó

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(x) = \mathbf{f}'(g(x)) \cdot \mathbf{g}'(x)$$

TEOREMA 6 (derivada de la función inversa)

Si **f** es inyectiva, derivable en y con $\mathbf{f}'(y) \neq 0$ y **g** es la inversa de **f** definida por, $g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$; entonces **g** es derivable en x, y vale que:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{y})} = \frac{1}{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))}$$

Ejemplos:

1) $f(x) = x + 6 \xrightarrow{\text{teorema } 2} f'(x) = (x)' + (6)' = 1 + 0 = 1$

2) $f(x) = x^4 + \sqrt{x} \xrightarrow{\text{teorema } 2} f'(x) = (x^4)' + (\sqrt{x})' = 4x^3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = 5\sqrt{x} \xrightarrow{\text{corolario teorema 3}} f'(x) = 5\,(\sqrt{x})' = 5.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $f(x) = m\,\mathbf{x} + h \xrightarrow{\text{corolario teorema 3}} f'(\mathbf{x}) = m\,.(\mathbf{x})' + (h)' = \mathbf{m\,.\,1} + \mathbf{0}$

$$\boxed{\mathbf{f(x) = m\,x + h \longrightarrow f'(x) = m}}$$

5) $f(x) = 3\,.\,x^{100} \xrightarrow{\text{corolario teorema 3}} f'(x) = 3\,.\,(x^{100})' = 3.\,100\,x^{99} = 300\,x^{99}$

6) $p(x) = 3x^5 - x^4 + 5x^2 + 3 \xrightarrow{\text{teor 2 y corolario 3}} p'(x) = 15x^4 - 4x^3 + 10x$

7) $f(x) = x^2\,.\,\text{sen}\,x \xrightarrow{\text{teorema } 3} f'(x) = (x^2)'.\,\text{sen}\,x + x^2\,.\,(\text{sen}\,x)'$

$f'(x) = 2x\,.\,\text{sen}\,x + x^2\,.\,\cos x$

8) $f(x) = x^2 / \text{sen}\,x \xrightarrow{\text{teorema } 4} f'(x) = \dfrac{(x^2)'\,\text{sen}\,x - x^2\,(\text{sen}\,x)'}{\text{sen}^2\,x}$

$f'(x) = \dfrac{2x\,.\,\text{sen}\,x - x^2\,.\,\cos x}{\text{sen}^2\,x}$

9) $f(x) = \underbrace{\text{sen}}_{\substack{\textbf{función}\\ \textbf{exterior}}}\,(\underbrace{\mathbf{x}^2}_{\substack{\textbf{función}\\ \text{interior}}}) \xrightarrow{\text{teorema } 5} f'(x) = \underbrace{\text{sen}'}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la f.}\\ \text{exterior}}}\,(\underbrace{x^2}_{\substack{\text{evaluada}\\ \text{en la f.}\\ \text{interior}}}).(\underbrace{x^2}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{de la f.}\\ \text{interior}}})'$

$f(x) = \text{sen}\,(x^2) \xrightarrow{\text{teorema } 5} f'(x) = \cos(x^2)\,.\,2x$

10) $f(x) = \text{sen}^2(x) = \underbrace{(\text{sen}\,x)}_{\text{f.int.}}{}^{\underbrace{\mathbf{2}}_{\text{f.ext.}}} \xrightarrow{\text{teorema } 5} f'(x) = \underbrace{2.(\text{sen}\,\mathbf{x})}_{\substack{\textbf{derivada}\\ \textbf{f.ext.evaluada}\\ \textbf{en la f.int.}}}\,.\underbrace{(\text{sen}\,\mathbf{x})'}_{\substack{\textbf{derivada}\\ \textbf{de la}\\ \textbf{f.int.}}}$

$f(x) = (\text{sen}\,x)^2 \xrightarrow{\text{teorema } 5} f'(x) = 2.\,\text{sen}\,x\,.\,\cos x$

11) $f(x) = \cos x = \text{sen}\,(x + \pi/2) \xrightarrow{\textbf{teorema}\ \ 5} f'(x) = \cos(x + \pi/2).1 = -\,\text{sen}\ x$

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\ sen\ x}}$$

12) $f(x) = tg\, x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x} \xrightarrow{\textbf{teorema}\ \ 4} f'(x) = \dfrac{(sen\ x)'.cos\ x - sen\ x.(cos\ x)'}{cos^2\ x}$

$$f'(x) = \frac{cos\ x.cos\ x - sen\ x.(-sen\ x)}{cos^2\ x}$$

$$\boxed{\mathbf{f(x) = tg\ x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{cos^2\ x}}}$$

13) $g(x) = e^{x} \xrightarrow{\textbf{teorema}\ \ 6} g(x) = y \Leftrightarrow \ln y = x \ ; \quad (\ln y)' = 1/y$

Luego; $\mathbf{g'(x)} = \dfrac{1}{(\ln \mathbf{y})'} = \dfrac{1}{1/\mathbf{y}} = \mathbf{y = e^{x}}$

$$\boxed{\mathbf{f(x) = e^{x} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^{x}}}$$

14) $f(x) = e^{\text{sen}\ x} \xrightarrow{\textbf{teorema}\ \ 5} f'(x) = e^{\text{sen}\ x}.(\text{sen}\ x)' = e^{\text{sen}\ x}.\cos x$

$$\boxed{\mathbf{f(x) = e^{g(x)} \xrightarrow{\textbf{teorema}\ \ 5} f'(x) = e^{g(x)}.g'(x)}}$$

15) $f(x) = \boldsymbol{a}^{x} \quad (\boldsymbol{a} > 0)$

$f(x) = \boldsymbol{a}^{x} = e^{\ln a^{x}} = e^{x \ln a} \xrightarrow{\textbf{teorema}\ \ 5} f'(x) = e^{x \ln a}.(x.\ln a)'$

$$\boxed{\mathbf{f(x) = \boldsymbol{a}^{x} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \boldsymbol{a}^{x}.\ ln\boldsymbol{a}}}$$

16) $f(x) = \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} \xrightarrow{\textit{corolario teorema } 3} f'(x) = \dfrac{1}{\ln 10}.(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln 10}.\dfrac{1}{x}$

Observaciones:

1) De los ejemplos vemos que las reglas de derivación permiten calcular la derivada de las funciones obtenidas al ´operar´ o ´componer´ dos o más funciones elementales. Así, con estas reglas y conociendo la derivada de las funciones elementales (seno, logaritmo natural, potencias, etc) podemos obtener la derivada de cualquier otra función. Luego, resulta conveniente tabular las funciones derivadas correspondientes a las funciones elementales, disponer así de una **TABLA de DERIVADAS** (apéndice).

<u>A partir de conocer la derivada de las funciones elementales y las reglas de derivación, el proceso de derivar se resume a la aplicación de estas reglas</u>; o sea, se obvia el cálculo del límite y se usa, en cada caso, los resultados ya probados.

2) Los teoremas de suma, resta, producto o composición se presentan para dos funciones pero se pueden extender a tres o más funciones. Así:

a) $(f + g + h)' = f' + g' + h'$

b) $(f . g . h)' = f' . g . h + f . g' . h + f . g. h'$

c) $$\left(\underbrace{\mathbf{f}}_{\mathbf{f.ext}} \circ \underbrace{\mathbf{g}}_{\mathbf{f.media}} \circ \underbrace{\mathbf{h}}_{\mathbf{f.int}} \right)'(x) = \underbrace{f'}_{\substack{\textit{derivada}\\ \textit{de la f.}\\ \textit{exterior}}} (g(h(x)) . \underbrace{g'}_{\substack{\textit{derivada}\\ \textit{de la f.}\\ \textit{media}}} (\underbrace{h(x))}_{\substack{\textit{evaluada}\\ \textit{en la f.}\\ \textit{interior}}} . \underbrace{h'(x)}_{\substack{\textit{derivada}\\ \textit{de la f.}\\ \textit{interior}}}$$

<u>Ejemplo</u>: $\mathbf{k}(x) = \boldsymbol{ln}\ (\boldsymbol{sen}\ (x^3))$ → $\mathbf{k}'(x) = \dfrac{1}{sen(x^3)} .cos(x^3).\ 3.x^2$

3) En el caso de la función compuesta **h = f o g** si hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} z = f(y) \\ y = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow z = f(g(x)) = f \circ g(x) \Rightarrow z = h(x)$$

y usamos la notación de Leibniz : $g' = \dfrac{dy}{dx}$; $f' = \dfrac{dz}{dy}$; $h' = \dfrac{dz}{dx}$

la <u>regla de la cadena</u> queda expresada como:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Escrita la regla de la cadena de esta manera queda claro que, en esencia, la derivada de la función compuesta de f y g es el *´producto´* de las derivadas de f y g (*¡en su variable!*). Esta forma de expresar la regla resulta *´consistente´* con la interpretación que hemos hecho de la *´razón de cambio´* como *´ incremento aproximado de la variable dependiente en relación al de la independiente´.*

Así, y por ejemplo, si *´z* se incrementa aproximadamente ***5*** veces más rápido que ***y***´ e *´**y*** se incrementa aproximadamente el ***doble*** de rápido que ***x***´ entonces es intuitivamente razonable suponer que para ***z*** como función de ***x*** resulte que *´z* se incrementa aproximadamente ***10*** veces más rápido que ***x***´.

4) Para ciertos casos de funciones compuestas, aquellos donde una de las funciones es una función elemental, podemos establecer las que llamamos *reglas ´generalizadas´ de derivación* (ver ejemplo14). Así tenemos:

- **<u>Regla 1</u>**: <u>*generalizada para la potencia*</u>: sea α cualquier número real , $\mathbf{(}\ [f(x)]^{\alpha}\ \mathbf{)}' = \alpha\ [f(x)]^{\alpha - 1} \mathbf{.}\ f'(x)$
- **<u>Regla 2</u>**: <u>*generalizada para la exponencial*</u>: $\mathbf{(}\ e^{f(x)}\ \mathbf{)}' = e^{f(x)}.\ f'(x)$
- **<u>Regla 3</u>**: <u>*generalizada para el logaritmo*</u>: $(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)}.f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

5) Un caso especial de composición de funciones es el de una potencia donde tanto base como exponente son funciones: $\boldsymbol{h}\,(\mathrm{x}) = [\boldsymbol{f}\,(\mathrm{x})]^{\,g\,(\mathrm{x})}$.

En este caso debemos escribir ***h*** de otra forma a los efectos de poder detectar cuales son las funciones que la *´componen´*. Para ello debemos *´bajar´* ***g*** del exponente. Acudimos entonces al logaritmo y su inversa la exponencial, aplicamos una a continuación de la otra (y así, dado que la exponencial deshace lo que el logaritmo hace, podemos escribir la igualdad de otra forma, preservándola.)

$$\boldsymbol{h}\,(x) = [\boldsymbol{f}\,(\mathrm{x})]^{\,g(\mathrm{x})} \quad\Rightarrow\quad h(x) = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} \quad\Rightarrow\quad h(x) = e^{g(x).\ln f(x)}$$

Reconocemos así que ***h***, en esencia, es la ***composición*** de dos funciones: la exponencial e^{x} y el producto, $\boldsymbol{g}(\mathrm{x}).\ \ln \boldsymbol{f}(\mathrm{x})$

- **Regla 4**: *derivada de* f^{g} :

  Si $\boldsymbol{h}\,(\mathrm{x}) = [\boldsymbol{f}\,(\mathrm{x})]^{\,g(\mathrm{x})}$,

  * expresamos ***h*** como exponencial: $h(x) = e^{g(x).\ln f(x)}$,

  * derivamos aplicando la Regla-2 y expresamos ***h*** en su forma original:

  $$h´(x) = e^{g(x).\ln(f(x))}\,.\,[\,g(\mathrm{x})\,.\,\ln f(\mathrm{x})]´ \;=\; [f\,(\mathrm{x})]^{\,g(\mathrm{x})}\,.\,[\,g(\mathrm{x})\,.\,\ln f(\mathrm{x})]´$$

  *derivamos el producto e informamos el resultado (Teor. 3 y Regla-3).

<u>Ejemplo</u>: $h(x) = x^{\,sen\,x} = e^{\,senx.\ln x}$

$$h´(x) = e^{senx.\ln x}\,.(sen\,x\,.\,lnx)´ \;=\; \mathrm{x}^{\,\mathrm{sen\,x}}.\;(cos\,x\,.\,ln\,x + sen\,x\,.\,1/x)$$

<u>Derivada de potencias</u>: podemos ahora justificar la regla de derivación de las potencias.

$$h(x) = x^{\,\alpha} = e^{\alpha.\ln x}$$

$$h´(x) = e^{\alpha.\ln x}\,.\,(\alpha\,.\,\ln x)´ \;=\; x^{\alpha}.\,(\alpha\,.\,\frac{1}{x}) = \;\alpha\,.\,x^{\,\alpha-1}$$

6) La regla de la cadena facilita el cálculo de la derivada de funciones inversas ya que, si ***g*** es la inversa de ***f***, tenemos que $f\,o\,g = id$, con $id(x) = x$.
Luego, derivando miembro a miembro, tenemos que:

$$[\,f\,o\,g\,]´ = [\mathrm{id}\,]´$$; aplicando las reglas de derivación,

$$f´(\,g\,(x)).\,g´\,(x) \;=\; 1,$$ de donde despejamos $g´\,(x)$.

<u>Ejemplo</u>: recordando que $y = arc\,sen\,x \;\Leftrightarrow\; x = sen\,y,\;\; y \in [-\pi/2;\ \pi/2]$; vamos a hallar la derivada de ***g(x) = arc sen x,*** a partir de considerar esta función como la inversa de ***f***. ($f(y) = sen\,y$, $\mathrm{Df} = [-\pi/2;\ \pi/2]$)

- $id(\mathrm{x}) = f\,o\,g\,(\mathrm{x})$
- $\mathrm{x} \;= \mathrm{sen}\,(arc\,sen\,x)$
- $(\mathrm{x})´ = [\mathrm{sen}\,(arc\,sen\,x)]´$
- $1 \;=\; \cos\,(arc\,sen\,x)\,.(arc\,sen\,x)´ \;\Rightarrow\;$ $(arc\,sen\,x)´ = \dfrac{1}{cos\,(\,arc\,sen\,x\,)}$ **(1)**

Esta derivada puede expresarse de otra forma acudiendo a la identidad Pitagórica:

$$sen^2 y + cos^2 y = 1 \quad \underset{-\pi/2 \le y \le \pi/2}{\Rightarrow} \quad cos\, y = \sqrt{1 - sen^2 y}$$

Como $y = arc\ sen\ x \Rightarrow cos\,(arc\ sen\ x) = \sqrt{1 - sen^2\,(arc\ sen\ x)} = \sqrt{1 - x^2}$

Reemplazando en **(1)** $\boxed{(arc\ sen\ x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$

De igual manera hallamos las derivadas de las otras funciones trigonométricas inversas.

3.4 Derivadas Sucesivas

Si f es una función derivable en cierto dominio D su derivada, f', es una función con dominio en D; luego, puede ser derivada a su vez, obteniéndose así otra función la que llamamos ***derivada segunda de f*** y denotamos f''.

Así: $\mathbf{f(x) = 3x^4 + 5x^2 + 2x \rightarrow f'(x) = 12x^3 + 10x + 2 \rightarrow f''(x) = 36x^2 + 10}$

Otras notaciones: $f'' = y''$ ó $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ (notación de Leibniz)

El proceso puede continuar; obteniéndose así las *derivadas sucesivas de f*:

- ***derivada tercera de f***: $f''' = (f'')'$
- ***derivada cuarta de f***: $f^{(4)} = (f''')'$

- ***derivada n-ésima de f***: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ (derivada de f "*n veces*").

3.5 Derivadas Laterales

☐ Por definición: $f'(x_o) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

☐ Por teorema: $\lim\limits_{x \to xo} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to xo+} f(x) = \lim\limits_{x \to xo-} f(x) = L$

Luego: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ existe $\iff \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (finitos)

☐ Los límites laterales del cociente incremental se indican y conocen como:

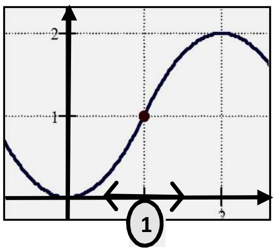
Derivada lateral por derecha: $f'(x_o^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Derivada lateral por izquierda: $f'(x_o^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

☐ Conclusión: $\boxed{\textbf{f derivable en } x_o \iff f'(x_o^+) = f'(x_o^-)}$

Ejemplo 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & ; \ x > 1 \end{cases}$$



- $x_o < 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \ \mathbf{f'(x_o) = 2x_o}$
- $x_o > 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta) \rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 2$ y $f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow \mathbf{f'(x_o) = -2x_o + 4}$
- $x_o = 1$; si $x \in E(1;\delta)$, $f(x) = ?$ .... $f'(1) = ?$ ⇒ ***debemos acudir a la definición***.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \ ?$$

f cambia de ley en **1** → calculamos derivadas laterales.

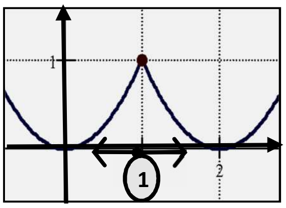
$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (-(x - 3)) = 2$$

$$\boxed{f'(1^-) = f'(1^+) =} \ \Rightarrow \ \boxed{f'(1) = 2}$$

Ejemplo 2:

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & ; \ x > 1 \end{cases}$$



- $x_o < 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta) \ \rightarrow q(x) = x^2$; $q'(x) = 2x \quad \Rightarrow \ \mathbf{q'(x_o) = 2x_o}$
- $x_o > 1$; $\forall x \in E(x_o;\delta) \ \rightarrow q(x) = x^2 - 4x + 4$; $q'(x) = 2x - 4 \ \Rightarrow \ \mathbf{q'(x_o) = 2x_o - 4}$
- $x = 1$; $x \in E(1;\delta) \ \rightarrow \mathbf{q(x) = ??} \ \Rightarrow \ q'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = \ ?$

q cambia de ley en **1** → calculamos derivadas laterales y concluimos

$$q'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

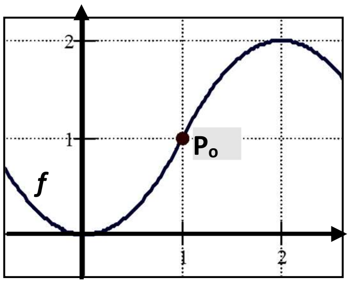
$$q'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{q(x) - q(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x - 3) = -2$$

$$\boxed{q'(1^-) \neq q'(1^+)} \ \Rightarrow \ \boxed{\nexists \ q'(1)}$$

Observaciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \; x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & ; \; x > 1 \end{cases}$$

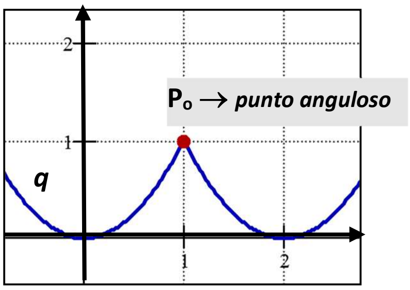
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \; x < 1 \\ 2 & ; \; x = 1 \\ -2x + 4 & ; \; x > 1 \end{cases}$$



f derivable en todo su dominio ⇒ ***graf f curva "suave"***.

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & ; \; x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & ; \; x > 1 \end{cases}$$

$$q'(x) = \begin{cases} 2x & ; \; x < 1 \\ \nexists & ; \; x = 1 \\ 2x - 4 & ; \; x > 1 \end{cases}$$

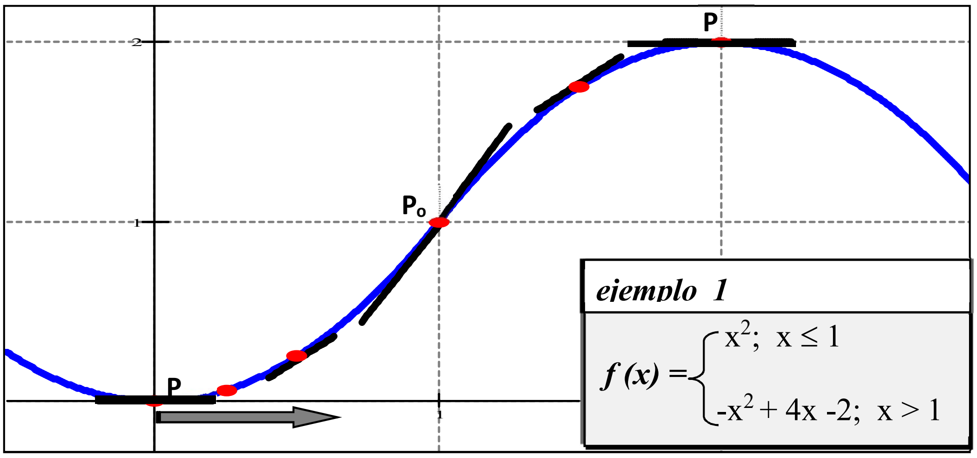


Pₒ (1;1) "*punto anguloso*" ⇒ *q* no derivable en $x_o = 1$

ⓘ Como en la gráfica de ***f*** con ***f*** **(x)** = **|x|**, nuevamente observamos que ***puntos angulosos en la gráfica de f se corresponden con valores del dominio donde f no es derivable.*** Para verificar o refutar esta afirmación debemos precisar la noción de ***punto anguloso***; es decir, ***establecer con claridad que es aquello que los caracteriza***.

A tal efecto, dada una curva **C** y un punto **P** en **C**, procedemos a investigar como se desplaza la ***recta tangente*** a **C** en **P** a medida que movemos **P** sobre la curva. Para ello, cada tanto y con un pequeño segmento, graficamos la ***recta tangente en* P**. Marcadas varias tangentes, las suficientes para detectar algún *´patrón´*, estamos en condiciones de analizar *´el comportamiento de las rectas tangentes´*.

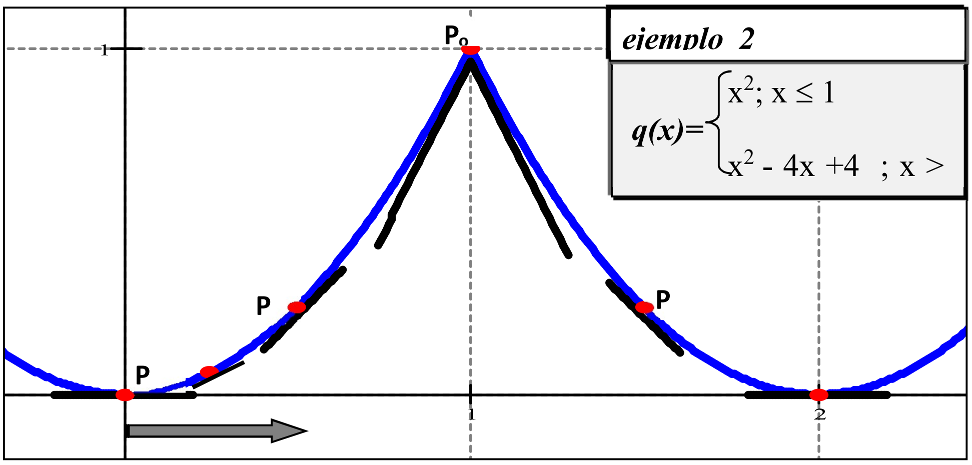
➲ **C, *curva suave*** (sin puntos angulosos). En este caso el desplazamiento de las tangentes sobre la curva también es *´suave´* ; o sea, las rectas van cambiando de posición en forma lenta, ***con ´continuidad´, no se aprecian cambios ´abruptos´ en sus pendientes al pasar de un punto a otro muy próximo***.



ejemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2; \; x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2; \; x > 1 \end{cases}$$

➲ **C,** ***no suave*** (presenta un punto anguloso en **P₀**). En este caso el desplazamiento de las tangentes es *suave* hasta llegar a **P₀** donde se produce un ***cambio ´abrupto´ en las pendientes de las rectas***. Luego de **P₀** vuelven a cambiar en forma *suave,* con continuidad.



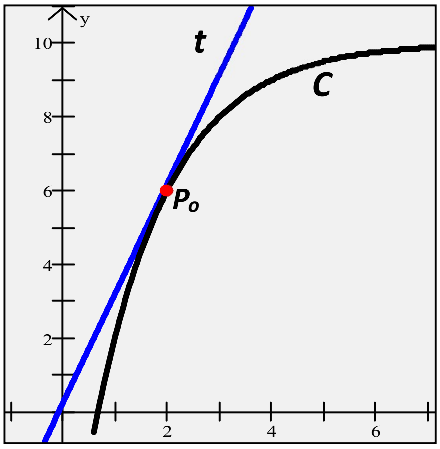
ejemplo 2

$$q(x)=\begin{cases} x^2;\ x \le 1 \\ x^2 - 4x + 4\ \ ;\ x > \end{cases}$$

- ***Punto anguloso:*** ***punto donde una recta tangente que se desplaza sobre la curva cambia en forma abrupta su pendiente al pasar por él*** .
- ***Problema:*** ***¿Y en*** **P₀** ***?, ¿hay tangente?***
  Pero, ¿qué es una recta tangente?, ¿ lo sabemos?

3.6 Recta Tangente

En el gráfico adjunto fácilmente reconocemos a ***t*** como la ***recta tangente*** a ***C***, en ***P₀***



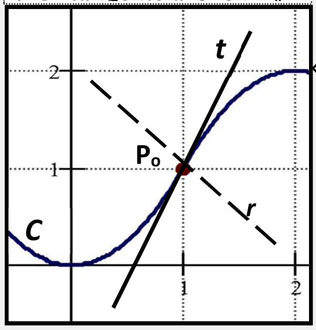
Las posiciones relativas de ***C*** y ***t*** concuerdan con la idea intuitiva que tenemos de recta tangente, de allí que fácilmente reconocemos ***t*** como la recta tangente. O sea, ***la intuición alcanza al efecto de reconocer rectas tangentes. Pero, ¿alcanza al efecto de establecer que es lo que las ´caracteriza´ ?.***

Desde lo intuitivo diríamos que, *´**t** es la recta que interseca a **C** en un único punto´*

pero esta afirmación no es *´totalmente correcta´*. Que ***C*** y ***t*** se toquen en un único punto no es condición suficiente (ni necesaria) para ***distinguir a t*** de otra recta que pase por ***P₀***

Veamos algunos ejemplos:

r → *no es* tangente en P₀
t → *tangente a C en* P₀



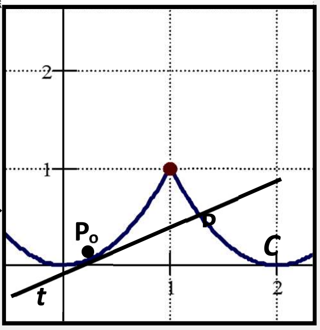
***CS** → Condición Suficiente
***CN** → Condición Necesaria

intersecar a ***C*** en un único punto, ***no es CS*** para ser tangente a ***C.***

Intersecar a ***C*** en un único punto ***no es CN*** para ser tangente a ***C*** ..

Conclusión: no fiarnos de la intuición

t → ***tangente a C en*** **P₀**



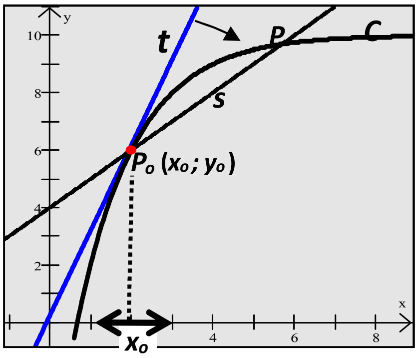
Dada ***t***, recta tangente a ***C*** en P_o **(**x_o**;**y_o**),** para hallar aquello que caracteriza a ***t*** debemos analizar la cuestión en forma ***local***; o sea, trabajar en ***entornos de*** x_o. Concluimos así la:

Condición de tangencia.

t es tangente a ***C*** en $\mathbf{P_o}$ sí y sólo sí :

(1) ***existe un entorno de*** $\mathbf{P_o}$, **E(**$\mathbf{P_o}$**)**, donde ***t*** y ***C*** se intersecan en el único punto $\mathbf{P_o}$.

(2) ***todo giro de t sobre*** $\mathbf{P_o}$**,** aunque pequeño, hace que ***t*** corte a ***C*** en **P**, otro punto de **C**. O sea, que ***t*** pase de ***tangente*** a ***secante*** (***s***).



¿Ecuación de t ? : $y - y_o = m_t\,(x - x_o)$; [ecuación pto-pendiente]

Datos requeridos: $P_o\,(x_o\,;\,y_o) \in t$ (*conocido*); m_t = ***pendiente de t*** (***desconocida***)

Sólo conocemos un punto de la recta, este único dato no alcanza para hallar m_t.

ⓘ La condición (2) de tangencia indica que si ***t*** es tangente a ***C*** en P_o entonces deben existir ***muy próximas a t,*** secantes a ***C*** que pasen por P_o ; más aún, ***tan próximas como se quiera***. Esto indica que ***t*** sería la ***posición límite de las secantes***; señala un camino para definir en forma rigurosa el concepto de ***recta tangente***. Para explorar esta conjetura ***investigamos el comportamiento de las secantes cuando*** $P \rightarrow P_0$ **;** o sea, si "***s***" tiende a una ***posición límite.***

En general, dada $y = f(x)$, $C = graf\,f$ y $P_o\,(x_o\,;\,f\,(x_o))$, existen tres situaciones posibles:

CASO I : ***f derivable en*** x_o

☞ ***Cuando*** $\mathbf{P \rightarrow P_0}$ (*por izq. o derecha*), ***las rectas secantes se acercan, y tanto como quieran, a una única recta*** (***r***)

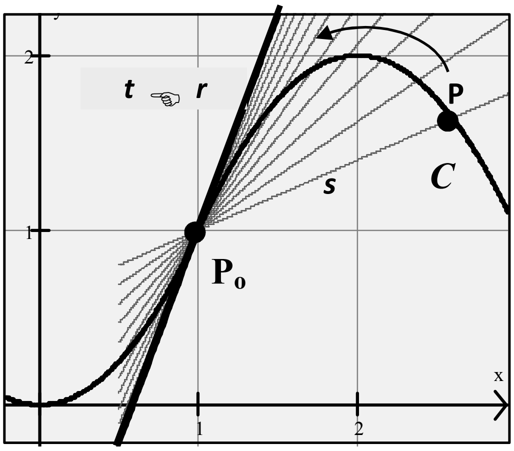
O sea; si $\mathbf{P \rightarrow P_o}$ entonces $s \rightarrow r$

☞ ***r cumple la condición de tangencia en*** P_o

Luego:

✓ ***r = t, recta tangente a C en*** P_o

✓ $\mathbf{P_o}$ ***no es punto anguloso.***



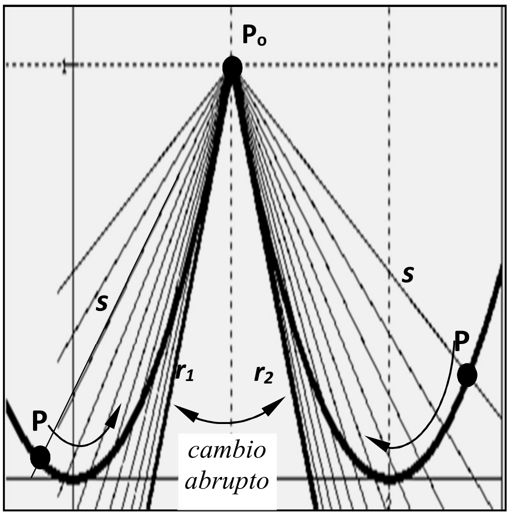
CASO II- a: ***f* no derivable en x_o**

☞ $P \to P_o^-$ entonces $s \to r_1$ } $r_1 \neq r_2$
$P \to P_o^+$ entonces $s \to r_2$ }

Las rectas secantes no tienden a una única posición límite.

☞ r_1, r_2 ; no cumplen la condición de tangencia.
(se pueden girar sin cortar a **C** en otro pto).
Luego:

✓ ***no existe t, recta tangente a C en P_o***
✓ **P_o *punto anguloso*** *(cambio abrupto pend.)*



CASO II-b: ***f* no derivable en x_o**

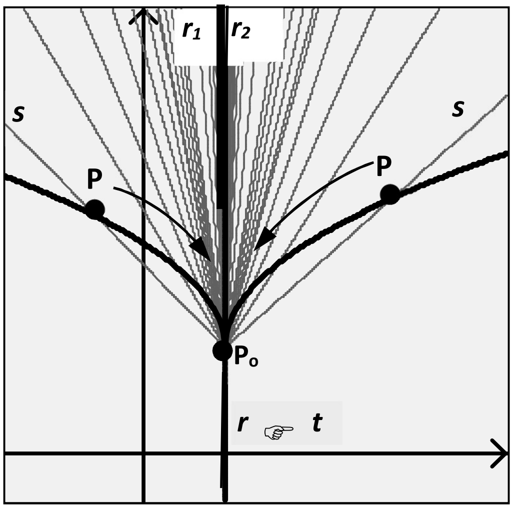
☞ $P \to P_o^-$ entonces $s \to r_1$ } $r_1 = r_2 = r$
$P \to P_o^+$ entonces $s \to r_2$ }

***Cuando* $P \to P_0$ (*por izq. o derecha*), *las rectas secantes se acercan, y tanto como quieran, a una única recta* (*r*).**

O sea, si $P \to P_o$ entonces $s \to r$

☞ ***r cumple la condición de tangencia en P_o***
Luego:

✓ ***r = t, recta tangente a C en P_o.***
✓ **P_o *punto anguloso ´extremo´***



Conclusión: si ***t*** existe, entonces ***t*** es ***la posición límite de las secantes.***

DEFINICIÓN: ***´recta tangente´***

t es la recta tangente a ***C*** en ***P_o*** ⇔ cuando ***$P \to P_o$***, por ambos lados y sobre ***C***, las rectas secantes (***s***) se acercan tanto como quieran a la ***única recta t***.
O sea ***t*** , es la ***posición límite de las secantes cuando $P \to P_o$***

$$\boxed{t = \lim_{P \to P_o} s}$$ (*si el límite existe*)

Nota:

Como en el límite ordinario, definimos ***tangente lateral*** como la posición límite de las secantes cuando ***$P \to P_o$*** *´por un solo lado´* (izquierda o derecha de ***P_o***.).

- t^- = tangente en P_o, *por izquierda* (***r_1*** *del ej.*); $t^- = \lim\limits_{P \to P_o^-} s$
- t^+ = tangente en P_o, *por derecha* (***r_2*** *del ej.*); $t^+ = \lim\limits_{P \to P_o^+} s$

Como en el límite ordinario, tenemos la siguiente propiedad para las tangentes:

➲ **Propiedad 1:** ***t*, *recta tangente a C en* P_o,** existe ⇔ $t^- \equiv t^+$

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y DERIVADA

> *Hallar la recta tangente a una curva,* ***su ecuación*** *es, históricamente, el problema que da origen al concepto de* ***derivada****. Este concepto aparece muy tarde en la historia de la Matemática; mucho tiempo después que el de integral (200 A.C; con Arquímedes).*
> *El concepto de derivada no se formula hasta el siglo XVII, cuando el matemático francés Pierre de Fermat, tratando de determinar máximos y mínimos de funciones descubre que el problema de localizar valores extremos se podía reducir al de localizar " tangente horizontales".*

Retomamos ahora el problema de hallar (si existe) la ecuación de ***t*,** recta tangente a ***C*** en $P_o\ (x_o\ ;\ y_o) \in C$. En particular, el de hallar su pendiente m_t , la que hasta ahora no conocemos ni estamos en condiciones de calcular pues sólo tenemos un dato: $P_o\,(x_o\,;y_o)$.

Ecuación de t : $y - y_o = m_t\,(x - x_o)$ (*ecuación pto-pendiente, la más apropiada al caso*)

Datos requeridos: $P_o\,(x_o\,;y_o) \in t$ (*conocido:* $y_o = f(x_o)$)

m_t ***= pendiente de t*** (***desconocida***) → ¿ m_t ?.

Por definición de recta tangente tenemos que: $\mathbf{t} = \lim\limits_{P \to P_o} \mathbf{s}$.

Así, y desde lo intuitivo, diríamos que si existen ***s*** próximas a ***t*** y ***tan próximas como se quiera*** entonces sus pendientes, m_s, deben de estar próximas a m_t , la pendiente de ***t ;*** y más aún, ***tan próximas como se quiera***.
Esta apreciación da pie entonces a la siguiente definición de m_t.

Definición: ***pendiente de la recta tangente:***

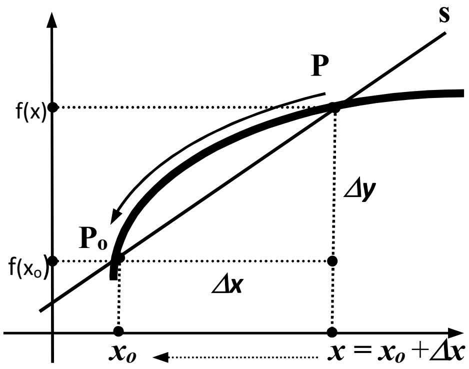
$$m_t = \lim_{P \to P_o} m_s \qquad \textit{(si este límite existe)}$$

Por la misma apreciación, establecemos que:

- si t^- = *tangente ´por izq.´* entonces $m_{t^-} = \lim\limits_{P \to P_o^-} m_s$
- si t^+ = *tangente ´por der.´* entonces $m_{t^+} = \lim\limits_{P \to P_o^+} m_s$

➲ **Propiedad 2:** m_t existe ⇔ $m_{t^-} = m_{t^+}$

➢ ***Cálculo de*** $\mathbf{m}_t$ ***, pendiente de la recta tangente***



$$y = \mathbf{m}_s .\, x + h_s$$

$$\mathbf{m}_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

$$\mathbf{m}_t = \lim_{P \to P_o} \mathbf{m}_s$$

$$P \to Po \Leftrightarrow x \to x_o \Leftrightarrow \Delta x \to 0$$

$$\mathbf{m}_t = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Conclusión: $\mathbf{m}_t$, por definición, es el límite del ***cociente incremental***; o sea, el límite con el que definimos ***f´(x₀) ,*** la ***derivada de f en x₀***.
Luego:

" ***f*** derivable en $x_o \Rightarrow \mathbf{m}_t = f'(x_o)$ "

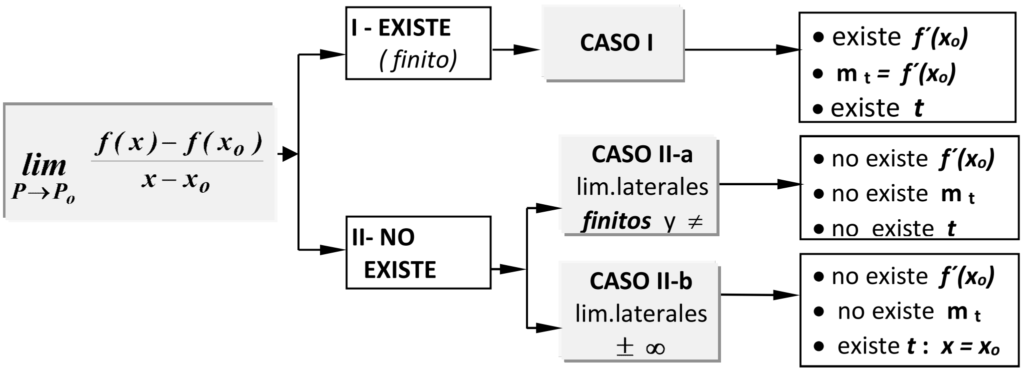
Observación: si calculamos los límites laterales, obtenemos las derivadas laterales y, en consecuencia, las pendientes de las tangentes laterales

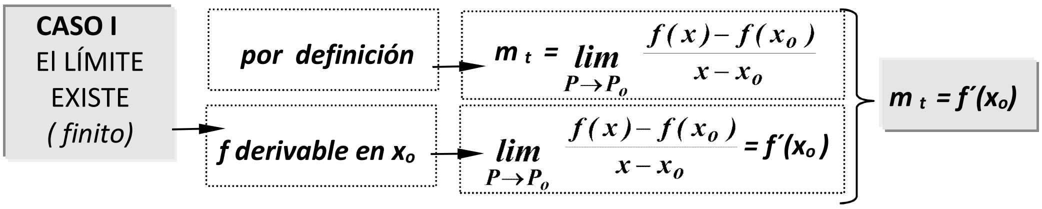
$$\mathbf{m}_{t-} = \lim_{P \to P_o^-} \mathbf{m}_s = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{t-} = f'(x_o^-)$$

$$\mathbf{m}_{t+} = \lim_{P \to P_o^+} \mathbf{m}_s = \lim_{x \to x_o^+} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{t+} = f'(x_o^+)$$

Interrogante: ¿ y si ***f no*** es derivable en ***x₀ ?.***

En lo que sigue resumimos las situaciones que se pueden presentar en la búsqueda de la ***tangente***, su ecuación; situaciones que, según vimos, están ligadas al límite de Δy/Δx.





Ecuación de t, recta tangente a C en $P_o(xo\,;\,yo)$.

$$y - y_o = m_t\,.(x - x_o) \xrightarrow[y_o\,=\,f\,(x_o)]{m_t\,=\,f'\,(x_o)} y - f(x_o) = f\,'(x_o).\,(x - x_o)$$

$$\boxed{t:\quad y = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)}$$

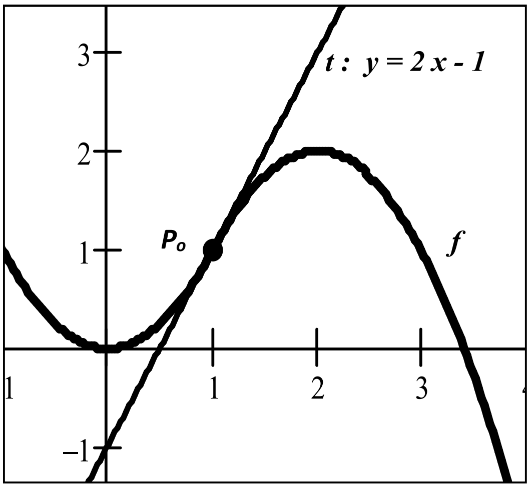
➲ **Propiedad 3:** f *derivable en* $x_o \Rightarrow$ *existe* t*, recta tangente a* C *en* P_o*,* $m_t = f'(x_o)$ *y* P_o *no es pto anguloso*

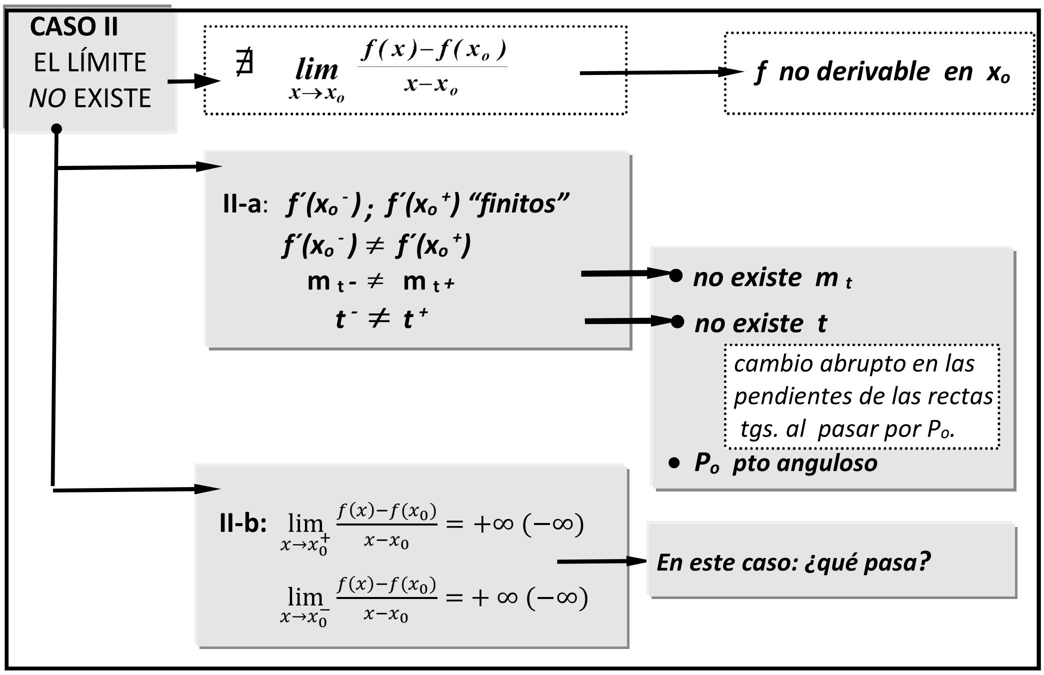
Ejemplo 1 → hallar la recta tangente a $C = graf\,f$ en $P_o(1; y_o)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & ;\ x > 1 \end{cases}$$

$x_o = 1$; $y_o = 1$; $m_t = f\,'(1) = 2$ (pag. 220)

$$t:\quad y = f(1) + f'(1)\,(x - 1)$$
$$t:\quad y = 1 + 2\,(x - 1)$$
$$t:\quad y = 1 + 2x - 2$$
$$t:\quad y = 2x - 1$$





CASO II
EL LÍMITE
NO EXISTE

$\nexists \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ → f ***no derivable en*** x_o

II-a: $f'(x_o^-)$; $f'(x_o^+)$ *"finitos"*
$f'(x_o^-) \neq f'(x_o^+)$
$m_{t^-} \neq m_{t^+}$
$t^- \neq t^+$

- ***no existe*** m_t
- ***no existe*** t

cambio abrupto en las pendientes de las rectas tgs. al pasar por P_o*.*

- P_o ***pto anguloso***

II-b: $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty\ (-\infty)$

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty\ (-\infty)$

En este caso: ¿qué pasa?

Caso II-a: ***ejemplo.*** Hallar t, tangente a $C = graf\ q$ en $P_o(1; y_o)$.

$$q(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 2 & ;\ x > 1 \end{cases}$$

$x_o = 1 \rightarrow P_o(1;1)$.

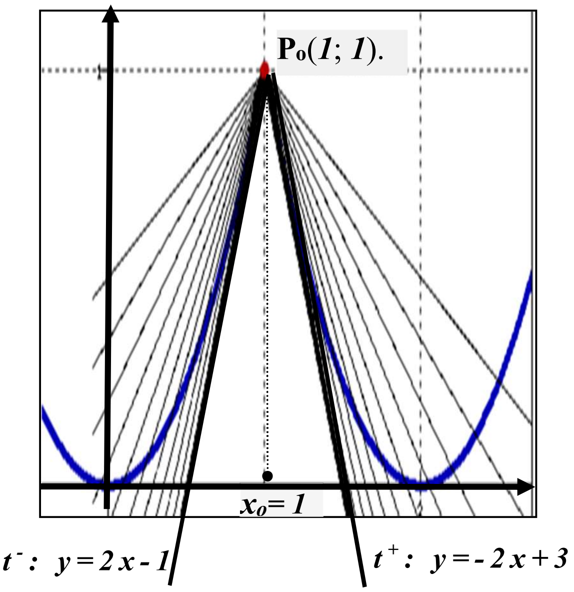
$\mathbf{m_t} = q'(1) = ??$ (pag. 221)

$\mathbf{m_{t^-}} = q'(1^-) = 2$

$\mathbf{m_{t^+}} = q'(1^+) = -2$

$\Rightarrow q'(1)\ \nexists \quad \Rightarrow \mathbf{m_t}\ \nexists$

$\Rightarrow$ ***NO EXISTE "t",***
recta tg en P_o;
$P_o(1; 1)$ pto anguloso



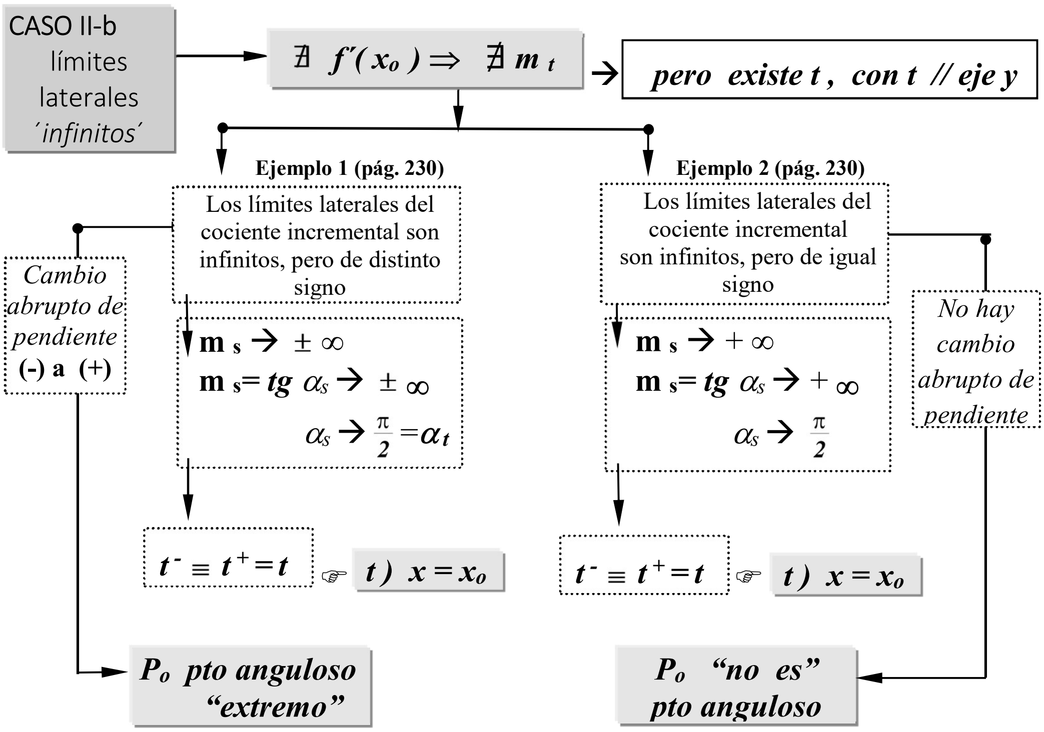
****Cálculo de una recta tangente lateral***

$t^-: \quad y = q(1) + q'(1^-)(x-1)$

$t^-: \quad y = 1 + 2(x-1)$

$t^-: \quad y = 1 + 2x - 2$

$t^-: \quad y = 2x - 1$



CASO II-b
límites laterales ´infinitos´

$\nexists\ f'(x_o) \Rightarrow \nexists\ m_t$

→ *pero existe t, con t // eje y*

Ejemplo 1 (pág. 230)

Los límites laterales del cociente incremental son infinitos, pero de distinto signo

$\mathbf{m_s} \rightarrow \pm\infty$
$\mathbf{m_s} = tg\ \alpha_s \rightarrow \pm\infty$
$\alpha_s \rightarrow \frac{\pi}{2} = \alpha_t$

Cambio abrupto de pendiente (-) a (+)

$t^- \equiv t^+ = t$ ☞ $t)\ x = x_o$

P_o pto anguloso "extremo"

Ejemplo 2 (pág. 230)

Los límites laterales del cociente incremental son infinitos, pero de igual signo

$\mathbf{m_s} \rightarrow +\infty$
$\mathbf{m_s} = tg\ \alpha_s \rightarrow +\infty$
$\alpha_s \rightarrow \frac{\pi}{2}$

No hay cambio abrupto de pendiente

$t^- \equiv t^+ = t$ ☞ $t)\ x = x_o$

P_o "no es" pto anguloso

Ejemplo 1 **Ejemplo 2**

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}+1 & ;\ x\le 1\\ \sqrt{x-1}+1 & ;\ x>1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=+\infty$$

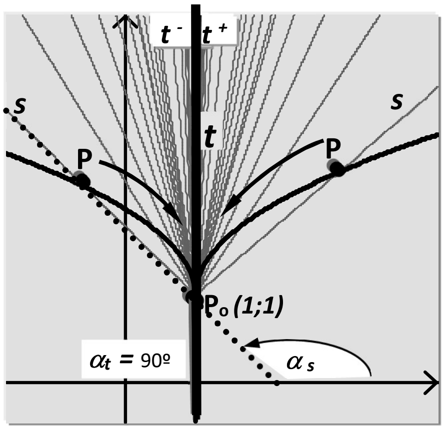
$h'(1)\ \nexists$; t *existe* → *t: x = 1*

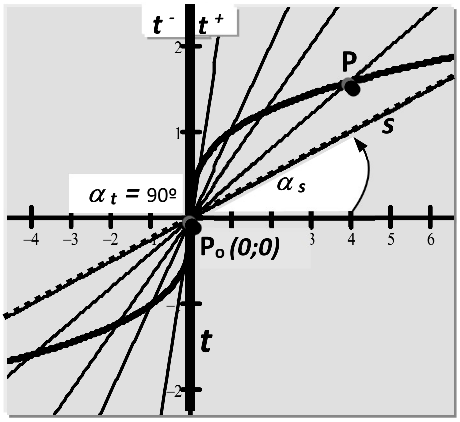
$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=+\infty$$

$f'(0)\ \nexists$; t *existe* → *t: x = 0*





Prop. 4: ***P_o punto anguloso*** (cambio abrupto de las tangentes al pasar por P_o

Caso II-a: $\nexists$ **recta tangente en P_0** $\Rightarrow\ \nexists$ **m_t** $\Rightarrow\ \nexists\ f'(x_o)$.

Caso II-b1: $\exists$ **recta tangente en P_0 ;** $\alpha_t = 90^o \Rightarrow \nexists$ **m_t** $\Rightarrow \nexists\ f'(x_o)$.

Caso II-b2: **no** hay punto anguloso; $\exists$ **recta tangente en P_0 ;** $\alpha_t = 90^o \Rightarrow \nexists$ **m_t** $\Rightarrow \nexists\ f'(x_o)$.

Observaciones **:** analizamos la ***propiedad 3*** y las afirmaciones derivadas de ella.

$$\underbrace{f\ derivable\ en\ x_o}_{p} \Rightarrow \underbrace{existe\ t,\ recta\ tangente\ en\ P_o}_{q}$$

* ***directa*** **p ⇒ q** **(** ***Verdadera - Prop. 3*** **)**

* ***contra-recíproca***: **~q ⇒ ~p** ; "***no existe t en P_o ⇒ f no es derivable en x_o*** "
(***Verdadera,*** la directa es verdadera **)**

* ***recíproca*** ; **q ⇒ p** ; " ***existe t en P_o ⇒ f es derivable en x_o*** "
(*Falsa*, contraejemplo: $f(x)=\sqrt[3]{x}$)

NOTAS **:** $f : D \to \mathbf{R}$; $C = graf\,f$

(*) ***f*** continua en D ⇒ **C** curva "continua" ⇒ **C** sin "saltos" ni "agujeros".

(*) ***f*** derivable en D ⇒ **C** curva "suave sin recta tangente vertical" ⇒ **C** sin "ptos angulosos", "saltos", "agujeros" ni "recta tangente vertical".

<u>Criterio gráfico para la detección de puntos de no derivabilidad</u>:

(*) **P**(x_o; f(x_o)) punto anguloso de $\boldsymbol{C = graf\, f}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{f}$ no es derivable en $\boldsymbol{x_o}$. (***Prop. 4***)

(*) $\boldsymbol{f}$ derivable en D $\Rightarrow$existe $\boldsymbol{t}$, recta tangente a $\boldsymbol{C}$ en **P**, no vertical, $\forall$**P**$\in$$\boldsymbol{C}$ (***Prop. 3***)$\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{C = graf\, f}$ no tiene puntos angulosos en D $\Rightarrow$ $\boldsymbol{C}$ curva ***<u>suave</u>*** sin rectas tangentes verticales.

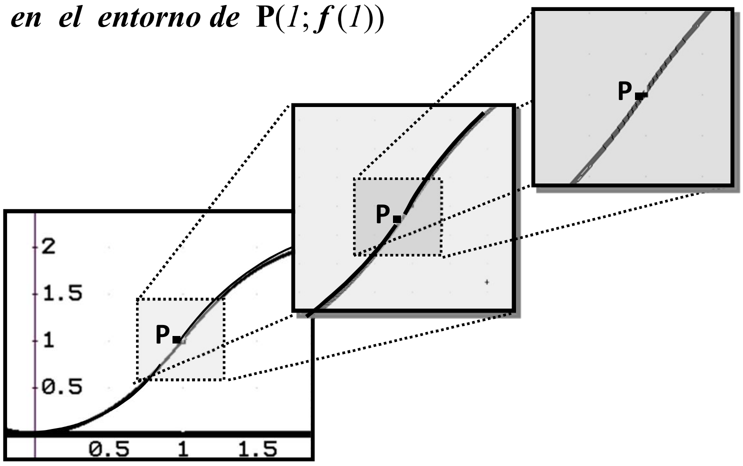
NOTA:
Un ´*punto anguloso*´ no siempre es detectable a simple vista.
¿Cómo resolvemos esta cuestión en el caso que el carácter de **P**(x_o; f(x_o)) sea dudoso?.
→ Si conocemos la ley de f, calculamos la derivada por definición y concluimos.

→ Si estamos trabajando con un dispositivo graficador seleccionamos un entorno de **P** y nos ´*acercarnos*´ más y más a **P** haciendo ´*zoom*´ con centro en **P**.

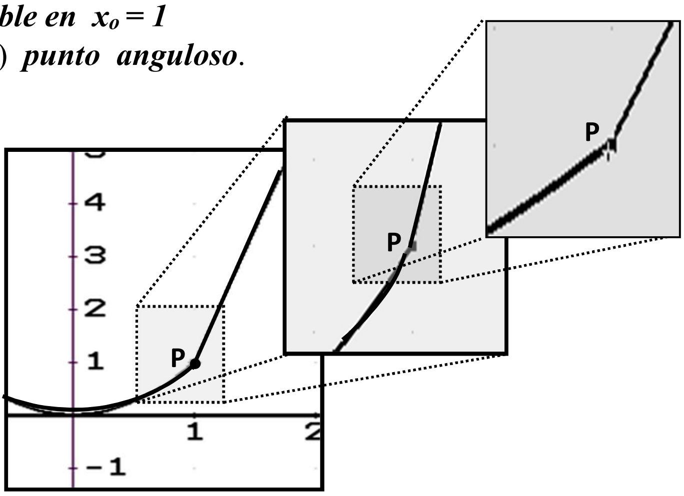
Entonces:

- Si **P** ***no es pto anguloso,*** la curva en la pantalla se irá ´*enderezando*´ cada vez más; o sea, se irá asemejando cada vez más a una ´*recta*´.
- Si **P** ***es pto anguloso***; el ángulo en **P** irá haciéndose cada vez más pronunciado y notorio, no quedarán dudas acerca del carácter de **P.**

➢ ***f derivable en*** $\boldsymbol{x_o = 1}$
$\Rightarrow$ ***C ´suave´ en el entorno de*** **P**(*1*; *f* (*1*))



➢ ***f no derivable en*** $\boldsymbol{x_o = 1}$
$\Rightarrow$ **P**(*1*; *f* (*1*)) ***punto anguloso.***



Cálculo de derivadas según la forma en que este dada la función:

1) ***forma gráfica*** ➔ se acude a la DERIVACIÓN GRÁFICA

2) ***tabla de valores*** ➔ se acude a los METODOS NUMÉRICOS (*en la práctica*)

3) ***forma explícita*** ($y = f(x)$) ➔ se acude a las reglas de derivación.

4) ***ecuaciones paramétricas***: (*en la práctica*)

$$C \begin{cases} x = f(\mathrm{t}) \\ y = g(\mathrm{t}) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{si } y = \varphi(\mathrm{x}) \text{ entonces:} \\ \varphi'(\mathrm{x}) = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} \text{ con } t = f^{-1}(\mathrm{x}) \end{array} \right]$$

DERIVACIÓN GRÁFICA:

$$C = graf\ f \quad \to \quad f: \quad \left(\begin{array}{l} \mathbf{D_f} = \text{proy. sobre eje x} \\ Im\ f = \text{proy. sobre eje y} \\ Ley\ f: \quad y = f(x) \Leftrightarrow (x; y) \in \mathbf{C} \end{array} \right)$$

C suave y continua → *f* continua y derivable en $\mathbf{D_f}$ → $f'(\mathrm{x_0}) = \boxed{?}$

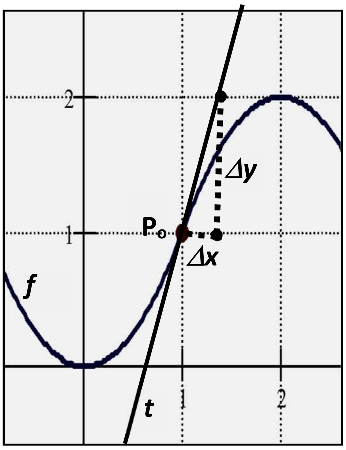
$f'(\mathrm{x_0}) = m_t$; luego obtenemos la derivada determinando m_t "***gráficamente***".

1) trazamos ***t*** ; recta tg a **C** en $\mathrm{P_o}$ ($\mathrm{x_o}$; $\mathrm{y_o}$).

2) en ***t***, marcamos Δx y su correspondiente Δy.

3) determinamos Δx y Δy , ***leyendo del gráfico***.

4) calculamos $m_t = \Delta y/\Delta x$ e informamos:
   $\mathbf{f'(x_0) \cong \Delta y/\Delta x.}$
   ↘ errores gráficos y de apreciación



Ejemplo: $\mathbf{P_o}$ **(1;1)**

$\mathbf{x_o = 1} \to \mathbf{\Delta x} = 0.5$; $\mathbf{\Delta y} = \mathrm{y} - \mathrm{y_o} = 1$

$\to \mathbf{m_t} = 1/\,0.5 = \mathbf{2}$

$\to \mathbf{f'(1) \cong 2}$

3.7 La derivada como *razón de cambio.* Interpretación física de la derivada

El objetivo esencial de este capítulo fue hallar una forma significativa de ***cuantificar el cambio en y.*** Para ello, en un principio estudiamos la ***razón de cambio***, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- f ***lineal***, $f(x) = m\,x + h \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = m\ ;\ \forall\ \Delta x \Rightarrow$ ***razón de cambio ´constante´.***

  Concluimos que, "***y varía a velocidad constante, e igual a m***"; en otras palabras que "***y cambia exactamente m unidades por cada cambio unitario en x***".

- f ***no lineal*** $\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq cte \Rightarrow$ ***y no varía a ´velocidad´ constante*** $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ el ***cambio en y***, aún el relativo a ***x***, depende del x_o y Δx considerados.

Procedimos entonces a buscar una herramienta que, para ***f*** no lineales, permitiera *estimar* en forma sistemática y simple el ***cambio relativo en y***, en un entorno de $x_o \in \mathrm{D}f$. Concluimos que esta herramienta era la ***derivada*** de la función en x_o; o sea, $f\,'(x_0)$.

Definida y estudiada la derivada, resta aún verificar sí esta herramienta efectivamente brinda información significativa en cuanto al ***cambio relativo en y***. En lo que sigue nos ocupamos de resolver esta última cuestión.

- f ***lineal*** $\Rightarrow f(x) = m\,x + h \Rightarrow f'(x) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ ;\ \forall\ x\ ,\ \forall \Delta x.$

  Conclusión: en este caso $f'(x)$ indica el ***valor exacto*** del cambio en ***y*** en por cada cambio unitario en ***x*** **:**

  "***y cambia a razón de ´m´ unidades, por cada cambio unitario en x***".

  O sea, indica la ***velocidad*** a la que se produce el cambio en cualquier intervalo o punto del Dom ***f***.

Ejemplo 1: Si $V = 2\,t + 1$, $[V] = ls$, $[t] = hs$, indica el volumen de agua en un tanque en cada instante ***t***, entonces $V\,'(t) = 2\ (= \Delta V/\Delta t\,)$ indica que el agua, en cualquier instante que se considere, está entrando al tanque a ***razón de 2 ls por hora***. O, dicho de otra forma, entra a una ***velocidad*** (***cte***) de ***2 ls / h.***

Ejemplo 2: Si $m = 5\,t + 20$, $[m] = mg$, $[t] = seg$, indica la masa de soluto disuelta en un solvente al instante ***t***, entonces $m'(t) = 5\ (= \Delta m/\Delta t\,)$ indica que el soluto, en cualquier instante que se considere, se está disolviendo a ***razón de 5 mg por seg***. Dicho de otra forma, a una ***velocidad*** (***cte***) de ***5 mg / seg***. (***v*** = *vel. de ´disolución´*)

Ejemplo 3: Si $x = 50\,t + 20$, $[x] = Km$, $[t] = hs.$, indica la posición al instante ***t*** de un móvil que se desplaza según un movimiento rectilíneo, entonces $x'(t) = 50\ (= \Delta m/\Delta t\,)$ indica que el móvil, en cualquier instante que se considere, se está moviendo a ***razón de 50 Km por hora***. O sea, a una ***velocidad*** (***cte***) de ***50 Km / h***.

Ejemplo 4: Si ***T = - t + 39*** , [***T***]= *ºC,* [***t***]= *hs.*, indica la temperatura de un niño al instante ***t*** , entonces ***T´(t) = - 1 (=*** Δ***T/***Δ***t)*** indica que la temperatura está ***´bajando´*** a ***razón de 1ºC por hora*** . Dicho de otra forma, a una ***´rapidez´ constante*** de ***1ºC / h*** .

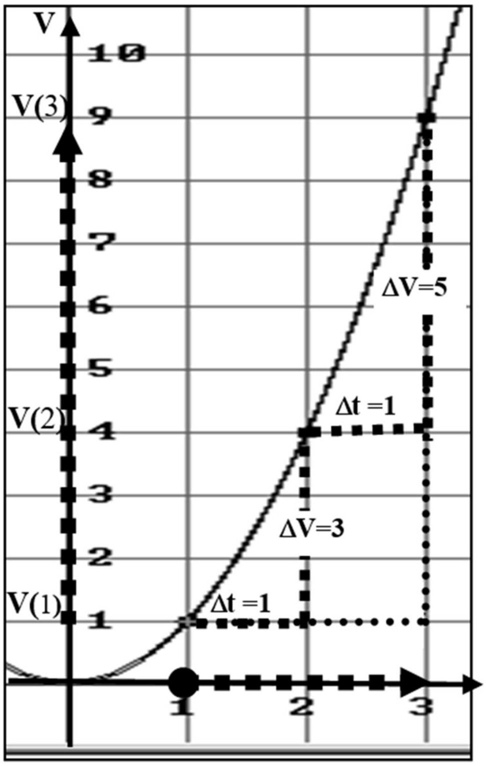
$$\blacktriangleright\ f \text{ no lineal } \Rightarrow f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \boxed{f'(x_o) \neq \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

$$f \text{ no lineal } \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq cte, \text{ depende de } x_o \text{ y } \Delta x.$$

Nos preguntamos entonces; para x_o y Δx , ***fijos***, la ***razón de cambio***, *¿ qué nos informa es este caso ?.*

Ejemplo 5:

Si ***V = t*** ^{2} [***V***]= *lts,* [***t***]= *hs.*, indica el volumen de agua en un tanque en cada instante ***t***, fácilmente vemos que Δ***V/***Δ***t*** ≠ ***cte*** ; que la razón de cambio depende de t_o y **Δt.** Para t_o y **Δt** , fijos, la ***razón de cambio***, ¿qué nos dice acerca del proceso de llenado? Consideramos un t_o y un **Δt**, analizamos el caso.



$$\begin{tikzcd}
t_o = 1 \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\Delta t = 2"'] & V(1) = 1 \arrow[d, "\Delta V = 8"] \\
t = 3 \arrow[r, dotted] & V(3) = 9
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\text{RAZÓN de CAMBIO en } [1;3]} \longrightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4\ (ls/h)}$$

En el [1;3], *V*, *¿aumenta a razón de* ***4 ls./h.*** *?*

Analizamos lo que entra por hora al tanque en distintos *subintervalos* del [*1* ; *3*] y concluimos:

$$[1;2] \xrightarrow{\Delta t = 1} \Delta V = 3 \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = 3\ (ls/h)$$

$$[2;3] \xrightarrow{\Delta t = 1} \Delta V = 5 \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = 5\ (ls/h)$$

Conclusión: en el [*1* ; *3*] , ***V no aumenta*** a razón de ***4 ls/h*** .
A poco que observamos los valores hallados en los *subintervalos* analizados, vemos que ***4,*** la razón de cambio en [1;3], es el ***promedio*** de dichos valores: $\frac{3+5}{2} = 4$.

$$\boxed{\frac{\Delta V}{\Delta t} = 4} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{en el } [1;3], \\ \text{el volumen varía,} \\ \textbf{\underline{en promedio,}} \\ \text{a } \textbf{razón de 4 ls/h}\end{array}} \xrightarrow[\text{lo llamamos}]{\frac{\Delta V}{\Delta t}} \boxed{\begin{array}{l}\text{☞ razón ´media´ de cambio en } [1; 3]; \text{ ó,} \\ \text{☞ velocidad ´media´ en } [1; 3] = v_m\ [1; 3]\end{array}}$$

En general dada $y = f(x)$, $x_o \in Df$; definimos la ***razón media de cambio*** como el cociente incremental asociado a un Δx dado.

***Definición:* razón media de cambio ó velocidad media, en** $[x_o; \ x_o+\Delta x]$

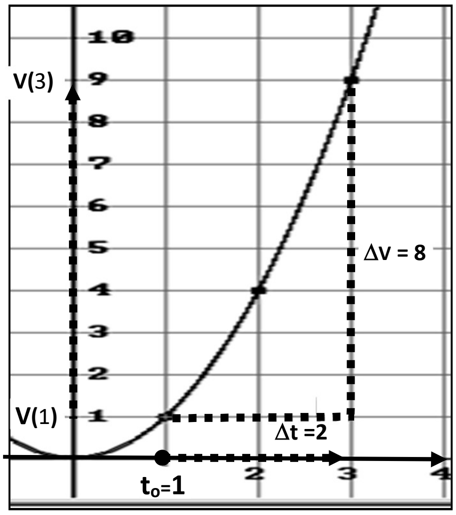
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *lo llamamos*
☞ ***razón 'media' de cambio en*** $[x_o; \ x_o+\Delta x]$; ó,
☞ ***velocidad 'media' en*** $[x_o; \ x_o+\Delta x] = v_m[x_o; \ x_o+\Delta x]$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$ *signfica que*
en $[x_o; \ x_o+\Delta x]$,
y varía, en promedio, a razón de 'k' unidades por cada cambio unitario en x.

Para **Δx** cada vez más chicos (**Δx** ≈ 0), es de suponer que el *'promedio'* se ajuste cada vez mejor a la razón media de cambio en cada subintervalo del intervalo seleccionado (o sea, que el *promedio* esté cada vez *más próximo* a los valores promediados).

En el ej. 5, en el [1;*3*] el agua entra al tanque a una ***razón promedio*** de ***4 ls/h***.; valor que difiere en ***1 unidad*** del correspondiente a los subintervalos [1; 2] y [2; 3]. Por otro lado, en el [1; *2*] el agua entra a una ***razón promedio*** de ***3 ls/h***.; valor que difiere en ***0.5 unidades*** de los correspondientes a los subintervalos [1;1.5] y [1.5;2] (respectivamente 2.5 y 3.5 ls/h.).

Vemos así que para **Δt** cada vez más chico, la *velocidad media* o *razón 'promedio' de cambio* ($3 = \frac{2.5+3.5}{2}$) está efectivamente cada vez más próxima de los valores promediados.



Δt	***t*** **=1+Δt**	**ΔV=f(t)-f(1)**	**ΔV/Δt** = $v_m[1; 1+\Delta t]$
2	3	**8**	**4** = $v_m[1; 3]$
1.5	2.5	**5.25**	**3.5** = $v_m[1; 2.5]$
1	2	**3**	**3** = $v_m[1; 2]$
0.5	1.5	**1.25**	**2.5** = $v_m[1; 1.5]$
0.25	1.25	**0.56**	**2.24**= $v_m[1; 1.25]$
0.1	1.1	**0.21**	**2.1** = $v_m[1; 1.1]$
0.05	1.05		

Por otro lado, del cuadro observamos que las velocidades medias ***se acercan cada vez más a 2***; en otras palabras, que para **Δt ≅ 0** la $v_m[1; 1+\Delta t]$ sería ***'casi'* 2**.

Concluimos finalmente que: **"**en un intervalo [1; 1+**Δt**] de longitud *"infinitesimal"* (**Δt ≅ 0**), el agua estaría entrando al tanque *aproximadamente* a una *razón promedio* de ***2*** ls/h.; siendo este valor una *muy buena aproximación de lo que realmente pasa en el intervalo "infinitesimal".*

En función de esta observación, a este valor ***límite de las velocidades medias*** lo llamamos ***velocidad instantánea*** *en* $t_o = 1$ y lo indicamos, $v(t_o)$.

En el ejemplo 5: $v\,(1) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_m\,[1;\, 1 + \Delta t]$

$$v\,(1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2$$

v (1) = 2, indica que a la hora de iniciado el proceso, el agua está entrando al tanque, ***aproximadamente*** a razón de ***2 ls/h.***

***Observación**:* el uso y costumbre ha llevado a que la palabra *´aproximadamente´* se la dé por *´sobreentendida´*, se la omita por lo tanto al hablar de velocidad instantánea.

En general dada $y = f(x)$, $x_o \in Df$; definimos la ***velocidad instantánea en*** x_o , que indicamos $v(x_o)$, como el límite para **Δx → 0** de las velocidades medias.

***Definición**: velocidad instantánea en* x_o *, v(x₀)* *(o razón instántanea de cambio)*

$$v(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} v_m\,[x_o;\, x_o + \Delta x] \qquad \text{(si existe finito)}$$

Interpretación física:

$v(x_o) = k$, indica que en x_o ; y esta variando, ***aproximadamente,*** a razón de k unidades por cada cambio unitario en x .

Cálculo de la velocidad instantánea: $y = f(x)$, x_o 0 Df

$$v(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} v_m\,[x_o;\, x_o + \Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$$

** Concluimos finalmente que ***la derivada*** es la herramienta que estábamos buscando ya que brinda información *significativa* del cambio en y en relación al cambio en x : permite hallar, ***aproximadamente y en un entorno de*** x_o , ***el cambio en y por cada cambio unitario en x .***

Ejemplo 6:

Si sabemos que la ecuación del movimiento de un cuerpo que cae del reposo es $y = 16\,t^2$; [*t*]= seg , [y]= pies; *¿podemos entonces establecer a razón de cuantos pies/seg. estará cayendo este cuerpo a los* ***t*** *seg. de haber comenzado a caer ?.*

ⓘ En este caso, como el anterior, ***f*** *no es lineal*, la razón de cambio, *no es constante.* Luego, y en analogía al otro caso, para responder el interrogante planteado lo que podemos hacer es calcular la ***razón ´media´ de cambio*** en el intervalo [***t*** ; ***t*** + **Δt**], el límite de las mismas para **Δt** → 0.

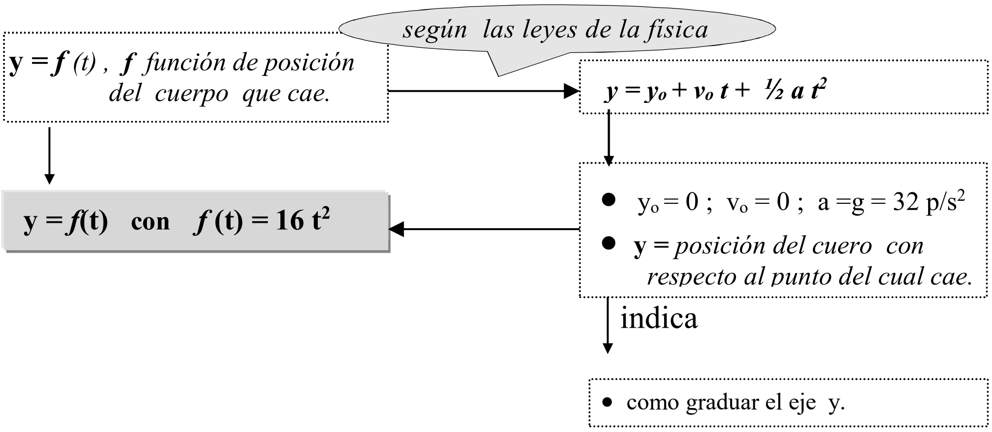
(Cabe aclarar que en el caso de la *función de posición* lo habitual es el uso de la expresión ***´velocidad media´*** antes que la de ***´razón media de cambio´***).

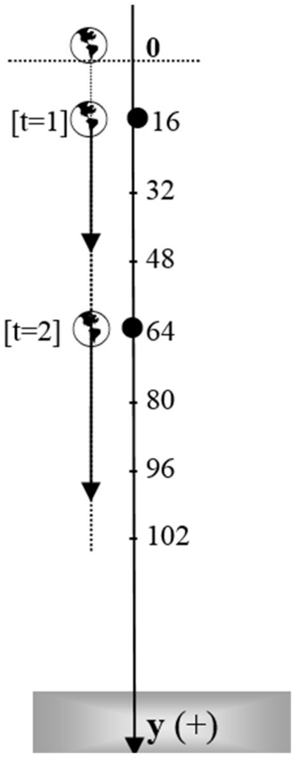
Así, y por ejemplo, para hallar cómo estaría cayendo el cuerpo luego de **1 seg.** (***t =1***) que comenzara a caer , podemos proceder a:

1º) calcular la ***´velocidad media´*** del cuerpo en el [***1***; ***1***+**Δt**]; o sea, a obtener la velocidad *´promedio´* con la que el cuerpo estaría cayendo en dicho intervalo. Hacer esto de la forma más conveniente al caso; o sea, buscando una ley que permita realizar el cálculo para distintos **Δt ,** en forma sistemática y organizada.

2º) calcular $\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_m\,[1\,;\,1+\Delta t]$ y concluir.

En lo que sigue, previo un reconocimiento de la función, concretamos este proceso.





1º) $v_m\,[1\,;\,1+\Delta t] = \dfrac{f(1+\Delta t)-f(1)}{\Delta t} = 32 + 16\,\Delta t = \varphi\,(\Delta t)$

Calculamos para distintos Δt, usando $\varphi\,(\Delta t)$ **:**

- $\Delta t = 1$ ➔ $v_m\,[1\,;\,2] = 48$
  En [1;*2*] el cuerpo cae a una ***razón ´promedio´*** de ***48*** pies/seg.
- $\Delta t = 0.5$ ➔ $v_m\,[1;\,1.5] = 40$ pies/seg
  En [1;*1.5*] el cuerpo cae a una ***razón ´promedio´*** de ***40*** pies/seg
- $\Delta t = 0.1$ ➔ $v_m\,[1;1.1] = 33.6$ pies/seg
  En [1;*1.1*] el cuerpo cae a una ***razón ´promedio´*** de ***33.6*** pies/sg

……………………………………………………………………………………

para $\Delta t \to 0$, ***las velocidades medias, ¿tienden a un límite?*** .

2º) $\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_m\,[1\,;\,1+\Delta t] = \lim\limits_{\Delta t\to 0} 32 + 16\,\Delta t = 32$

Podemos decir entonces que la *velocidad media* se acerca tanto como quiera a **32** pies/seg.; o sea, que en el caso de un intervalo [1;1+**Δt**] de longitud *"infinitesimal"* (**Δt** ≅ **0**), ***32*** pies/seg. es una muy buena aproximación de lo que ***"cae" el cuerpo por segundo.***

Concluimos así que: "***a 1 seg. de haber comenzado a caer, el cuerpo está cayendo ´aproximadamente´ a razón de 32 pies por segundo*** ".
Equivalentemente: "***que la velocidad ´instantánea´ en $t_o = 1$ es de 32 pies/seg*** ".

Nota: por uso y costumbre omitimos el *´aproximadamente´*, decimos que en ***$t_o = 1$*** el cuerpo cae a razón de **32** pies/seg. También es común omitir el término *´instantánea´*, decir que a 1seg. de comenzar a caer la velocidad del cuerpo es de **32** pies/seg .

Observaciones

1) La resolución de los problemas 2 y 3 termina pasando por el cálculo de un *límite*; el del cociente incremental de la función para el incremento de la v. i → 0.
Este límite es el mismo con el que definimos derivada de una función en un punto.

Así, para ***y = f(x)*** y ***x_o*** un punto del Dom.***f*** , tenemos que:

$$\underline{\textit{Razón 'instantánea' de cambio}}\ (x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$$

$$\underline{\textit{velocidad 'instantánea'}}\ (x_o) = v_i\,(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$$

2) Si en el ejemplo 3 nos preguntaran a que velocidad está cayendo el cuerpo a los ***2 segs***., un simple cálculo, el de $f'(2)$, basta para contestar esta pregunta:

$$v_i\,(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(2) = 64$$

Es decir, si ***f*** **(t) = 16 t²** es la función de posición de un cuerpo en caída libre, entonces $f'(2)$ informa sobre la velocidad instantánea del cuerpo a los ***2 segs***.;
o sea., en este caso, informa que a los 2 segs.,

* la ***velocidad instantánea*** del cuerpo es de ***64*** *pies/seg.*
* el cuerpo cae *aproximadamente* ***64*** pies, en un seg.

3) Dada ***y = f(x),*** independientemente de cual sea el carácter de las variables,

$f'(x_o)$ informa sobre la ***´variación instantánea de y´*** *;* o sea,
la razón a la que aproximadamente está variando ***y*** , *en un entorno de* ***x_o***.*;*
o sea*; cuanto varía aproximadamente* ***y***, *por cada cambio unitario en* ***x*** , *a partir de* ***x_o***.

ⓘ Con este resultado queda con firmada la validez de los supuestos en los que nos apoyamos para desarrollar los temas de este capítulo.

4) Los siguientes términos son de uso habitual:

$$\blacktriangleright \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_o} \longrightarrow \longrightarrow$$

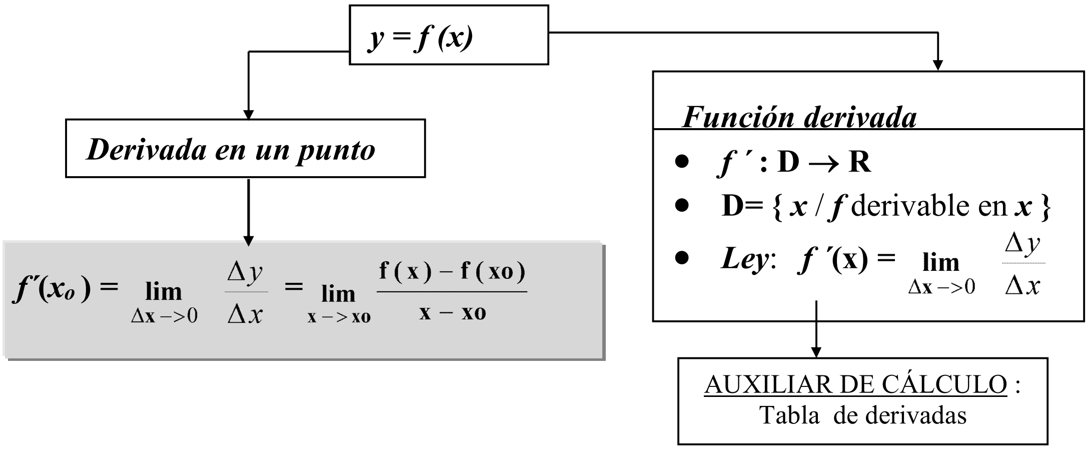
velocidad media
razón media de cambio
tasa de variación media
variación media

$$\blacktriangleright \quad f'(x_o) = \frac{dy}{dx}(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow$$

velocidad (instantánea)
razón de cambio (inst.)
tasa de variación (inst.)
variación instantánea

$\blacktriangleright \quad |f'(x_0)| \longrightarrow \longrightarrow$ rapidez de cambio (instantánea)

RESUMEN:



y = f (x)

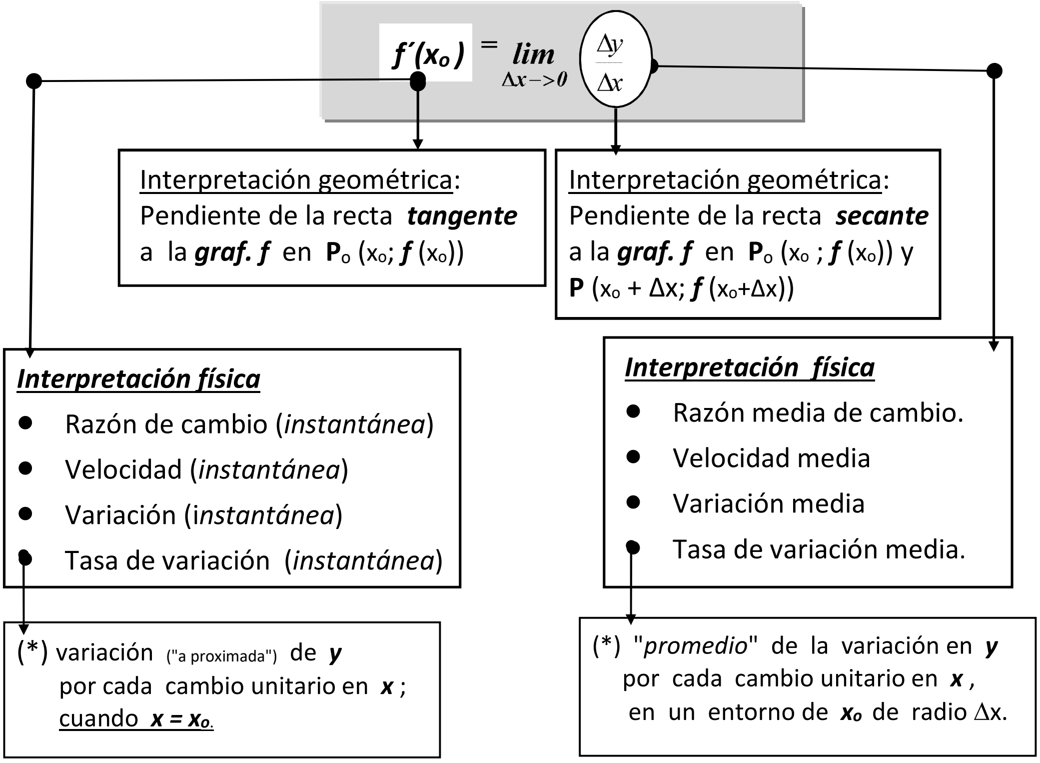
Derivada en un punto

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to xo} \frac{f(x) - f(xo)}{x - xo}$$

Función derivada

- $f\,' : D \to R$
- D= { x / f derivable en x }
- *Ley*: $f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

AUXILIAR DE CÁLCULO :
Tabla de derivadas



$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interpretación geométrica:
Pendiente de la recta ***tangente*** a la ***graf. f*** en **P**$_o$ (x_o; f (x_o))

Interpretación geométrica:
Pendiente de la recta ***secante*** a la ***graf. f*** en **P**$_o$ (x_o ; f (x_o)) y **P** ($x_o + \Delta x$; f ($x_o+\Delta x$))

Interpretación física

- Razón de cambio (*instantánea*)
- Velocidad (*instantánea*)
- Variación (*instantánea*)
- Tasa de variación (*instantánea*)

(*) variación ("a proximada") de ***y*** por cada cambio unitario en ***x*** ; cuando $x = x_o$.

Interpretación física

- Razón media de cambio.
- Velocidad media
- Variación media
- Tasa de variación media.

(*) "*promedio*" de la variación en ***y*** por cada cambio unitario en ***x*** , en un entorno de x_o de radio Δx.

3.8 Apéndice

Cálculo de derivadas por definición:

En lo que sigue calculamos la derivada *'por definición'* de algunas de las funciones elementales (usamos la definición que más convenga al cálculo, según el caso):

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- ***Derivada de la constante***: $f(\mathrm{x})=k \rightarrow f'(\mathrm{x})=\mathbf{0}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

- ***Derivada de la raíz cuadrada***: $f(\mathrm{x})=\sqrt{x} \rightarrow f'(\mathrm{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\overset{(\times,\div,\text{por el conjugado})}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- ***Derivada del 'seno'***: $f(\mathrm{x})=\mathbf{sen\ x} \rightarrow f'(\mathrm{x})=\mathbf{cos\ x}$

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{sen(x)-sen(x_o)}{x-x_o}\overset{(*)}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{2\,sen(\frac{x-x_o}{2}).cos(\frac{x+x_o}{2})}{x-x_o}=$$

$$=\lim_{x\to x_o}\left[\frac{sen(\frac{x-x_o}{2})}{\frac{x-x_o}{2}}\right]\cdot\lim_{x\to x_o}\left\lfloor cos(\frac{x+x_o}{2})\right\rfloor=1\,.\,cos\,x_0\;=\;cos\,x_o$$

$(*)$ usamos la siguiente identidad trigonométrica, con $a=x$ y $b=x_o$:

$$sen\,a-sen\,b\;=\;2\cdot sen(\frac{a-b}{2})\cdot cos(\frac{a+b}{2})$$

➢ ***Derivada del ´logaritmo natural´´***: $f(x) = \ln x \;\rightarrow\; f'(x) = 1/x$

$$f'(x)= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} \overset{(prop.log.)}{=}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \overset{prop.log.}{=} \lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} =$$

$$= \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\right] \overset{(**)}{=} \ln\ e^{1/x} = \frac{1}{x}$$

El cálculo de la derivada del logaritmo requiere considerar los siguientes resultados:

» $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ (con ∞ indicamos $\pm\infty$)

» $\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

$$f(x) = \frac{k}{x} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{k/x} = e \quad ;$$

Este último resultado permite resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)^{k/x}\right]^{1/k} = e^{1/k}$$

Resultado que aplicamos en $(**)$ haciendo $x=h$ (*variable*) y $k=x$ (*cte*)

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} = e^{1/x}$$

TEOREMAS: *Reglas de Derivación*

TEOREMA 2 (derivada de la suma o resta)

Si f y g son derivables en x , entonces f ±g es derivable en x , y vale:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) .$$

Demostración: (demostramos para la suma ´f+g´ ; para la resta es igual).

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)_{(x+h)} - (f+g)_{(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x) \quad \text{(q.e.d.)}$$

Por hip, f y g son derivables en x. Luego existe el límite de cada sumando, se puede aplicar el Teorema del límite la suma.

TEOREMA 3 (derivada del producto)
Si f y g son derivables en x , entonces f .g es derivable en x , y vale :

$$(f\,.\,g)'(x) = f'(x).\,g(x) + f(x).\,g'(x)\,.$$

Demostración: x_o punto genérico, donde f y g son derivables.

$$(f\,.g)'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f.g(x) - f.g(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{f_{(x)}.g(x) - f(x_o).g_{(x_o)}}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{f_{(x)}.g(x) - [f(x_o).g(x) - f(x_o).g(x)] - f(x_o).g_{(x_o)}}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{[f(x) - f(x_o)].g(x) + f(x_o).[g(x) - g(x_o)]}{x - x_o} =$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x - x_o}.\,g(x) + f(x_o).\frac{g(x)-g(x_o)}{x - x_o} \right] \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \quad f'(x_o)\,.\,g(x_o) + f(x_o).\, g'(x_o)\,. \qquad \text{(q.e.d.)}$$

(*) f derivable en x_o $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)$

g derivable en x_o $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{g(x)-g(x_o)}{x - x_o} = g'(x_o)$

g derivable en x_o $\Rightarrow$ g continua en x_o $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to x_o} g(x) = g(x_o)$

COROLARIO TEOREMA 3 : $(\boldsymbol{k}\,\mathbf{f})'(x) = \boldsymbol{k}\,.\;\mathbf{f}'(x)$

» $(\boldsymbol{k}\,\mathbf{f})'(x) \underset{T.3}{=} (\boldsymbol{k})'.\,f(x) + k\,.\;f'(x) = 0\,.\,f(x) + \boldsymbol{k}\,.\;f'(x) = \boldsymbol{k}\,.\,\mathbf{f'(x)}$

TEOREMA 4 (derivada del cociente)

Si f y g son derivables en x y $g(x)\neq 0$, entonces f/g es derivable en x , y vale:

$$(f/g)'(x) = \frac{f'(x).\,g(x) - f(x).\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Demostración: la demostración la dividimos en dos partes:

a) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h).\,g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-[g(x+h)-g(x)]}{h}.\frac{1}{g(x+h).g(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

b) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' \underset{T.3}{=} f'(x).\frac{1}{g(x)} + f(x).\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$\underset{(a)}{=} f'(x).\frac{1}{g(x)} + f(x).\frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

(q.e.d.)

TEOREMA 5 (derivada de la composición o *´regla de la cadena´*)

Si f es derivable en g(x); g es derivable en x ,

y $h = f \circ g$ es la función compuesta, entonces h es derivable en x, y vale:

$$h'(x) = f'(g(x))\,.\,g'(x)$$

ó $$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,.\,g'(x)$$

En la demostración usamos las siguientes notaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \text{» } z = f(y) \\ \text{» } y = g(x) \end{array}\right\} z = f(g(x)) = f\,og\,(x) \Rightarrow z = h(x)$$

» $f'(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}$; $g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}$

Demostración:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \overset{(\Delta y \neq 0)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{(*)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot g'(x) \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot g'(x) \overset{(*)}{=} f'(y) \cdot g'(x) = \mathbf{f'(g(x)) \,.\, g'(x)}$$

(q.e.d.)

(*) justificación de las igualdades:

- g derivable en x $\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(x)$
- $g(x) = \boldsymbol{k}, \ \forall x \Rightarrow h(x) = \boldsymbol{cte}, \ \forall x \Rightarrow h'(x) = 0 = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$
- $g(x) \neq \boldsymbol{k} \Rightarrow \Delta y = g(x+\Delta x) - g(x) \neq 0$

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [\, g(x+\Delta x) - g(x)\,] = 0$; [g derivable en x $\Rightarrow$ g cont. en x].

Luego; $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$

TEOREMA 6 (derivada de ***g*** , inversa de ***f***)

Sea ***f*** biyectiva en su dominio, ***f*** derivable en ***y*** con $f'(y) \neq 0$; entonces si ***g*** es la inversa de ***f*** definida por: ***g(x) = y*** $\Leftrightarrow$ ***f (y) = x*** ; ***g*** es derivable en ***x*** , y la derivada es:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Demostración:

Si ***g*** es la inversa de ***f***, tenemos que ***f o g = id*** , con ***id(x) = x***.
Luego, derivando miembro a miembro, tenemos que:

- ***f o g*** (x) = ***id*** (x).
- (***f o g***)´ (x) = (x)´
- $f'(g(x)) . g'(x) = 1$
- $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

(q.e.d.)

TABLA DE DERIVADAS

1) $\mathbf{f}(x) = k\ (\text{cte}) \xrightarrow{\textbf{\textit{calculando por definición}}} \mathbf{f}'(x) = 0 \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = R$

2) $\mathbf{f}(x) = x \xrightarrow{\textbf{\textit{calculando por definición}}} \mathbf{f}'(x) = 1 \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = R$

3) $\mathbf{f}(x) = x^{\alpha}\ ;\ \alpha \in R \xrightarrow{\textit{regla de la potencia}} \mathbf{f}'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$

4) $\mathbf{f}(x) = \sqrt{\mathbf{x}} \xrightarrow{\textit{regla de la potencia}} \mathbf{f}'(x) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{x}}} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = \mathbf{R}^{+}$

6) $\mathbf{f}(x) = \ln x \xrightarrow{\textit{calculando por definición}} \mathbf{f}'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = \mathbf{R}^{+}$

7) $\mathbf{f}(x) = \log x \xrightarrow{\textit{corolario teorema } 3} \mathbf{f}'(x) = \dfrac{1}{\ln 10}\dfrac{1}{x} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = \mathbf{R}^{+}$

8) $\mathbf{f}(x) = e^{x} \xrightarrow{\textit{teorema. } 6} \mathbf{f}'(x) = e^{x} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = R$

9) $\mathbf{f}(x) = a^{x}\ (a > 0) \xrightarrow[\text{corolario teorema } 3]{a^{x} = e^{x.\ln a}} \mathbf{f}'(x) = a^{x} . \ln a \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = R$

10) $\mathbf{f}(x) = \operatorname{sen} x \xrightarrow{\textit{calculando por definición}} \mathbf{f}'(x) = \cos x \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = R$

11) $\mathbf{f}(x) = \cos x \xrightarrow[\text{teorema } 5]{\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})} \mathbf{f}'(x) = \mathbf{-} \operatorname{sen} x \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = R$

12) $\mathbf{f}(x) = \operatorname{tg} x \xrightarrow{\textit{teorema. } 4} \mathbf{f}'(x) = \dfrac{1}{\mathbf{cos}^{2} x} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = D_f$

13) $\mathbf{f}(x) = \operatorname{arc\,sen} x \xrightarrow{\text{teorema. } 6} \mathbf{f}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = (-1;1)$

14) $\mathbf{f}(x) = \operatorname{arc\,cos} x \xrightarrow{\text{teorema. } 6} \mathbf{f}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^{2}}} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = (-1;1)$

15) $\mathbf{f}(x) = \operatorname{arc\,tg} x \xrightarrow{\text{teorema. } 6} \mathbf{f}'(x) = \dfrac{1}{1 + x^{2}} \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{f}'} = R$

3.9 Actividades

1) Realizar las actividades que se proponen a continuación al efecto de estudiar el *comportamiento tendencial* para **Δx→** 0 del cociente de incrementos **Δy/Δx.**

En las actividades propuestas: $f(x) = x^3$; **xo** = **1** ; $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$

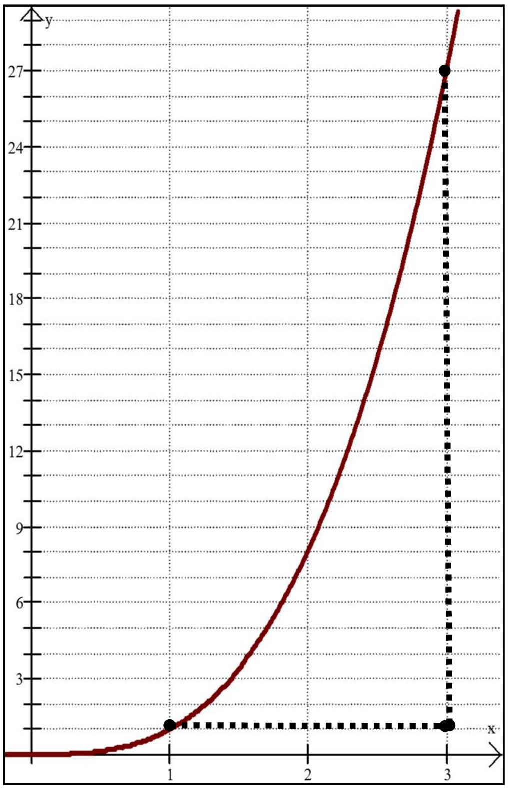
a) Indicar V ó F , justificar la repuesta:

i) "$\Delta y = \varphi(\Delta x)$ con $\varphi(\Delta x) = 3\,\Delta x + 3\,\Delta x^2 + \Delta x^3$ ";

ii) "**Δy** es un infinitésimos para **Δx→** 0 ";

b) graficar el **Δy** correspondiente a **Δx =** 1.5, 1, 0.5. Estimar el valor de **Δy/Δx**. Completar la tabla y formular una *conjetura* acerca del comportamiento *tendencial* del *cociente incremental.* Validar o refutar dicha conjetura.

c) Indicar V o F ; justificar la respuesta: *"$f'(1) = 3$"*.



Δx	$x = x_o + \Delta x$	$[x_o;\, x]$	$\Delta y = f(x) - f(x_o)$	**Δy /Δx**
Δx	$x = 1 + \Delta x$	[1; x]	$\Delta y = f(x) - f(1)$	**Δy /Δx**
2	3	[1; 3]	$f(3) - f(1) = 26$	**13**
1.5				
1	2	[1; 2]	$f(2) - f(1) =$	**7**
0.5		[1; 1.5]		**4.75**
0.25				
0.1				
0.05	1.05		**0.157**	
0.01				

Δy / Δx → ....

2) Calcular *por definición* la derivada de las siguientes funciones en los puntos dados. Acudir para ello al cociente incremental más conveniente al caso:

a) $f(x) = 7\,x^2$; $x_0 = 2$; $x_0 = a$

b) $f(x) = x^2 + 3$; $x_0 = 1$; $x_0 = a$

c) $f(x) = (x-3)^2$; $x_0 = 2$; $x_0 = a$

d) $f(x) = mx + h$; $x_0 = 2$; $x_0 = \pi$

e) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$; $x_0 = a$

f) $f(x) = 1/\,x^2$; $x_0 = 2$; $x_0 = a$

g) $f(x) = (x+1)/(x-1)$; $x_0 = 0$

3) En lo que sigue, el límite presentado corresponde al cociente incremental de una función ***f*** en un punto x_0. Se pide identificar quienes son ***f*** y x_0 en cada caso.

a) $\displaystyle \mathbf{lim}_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

b) $\displaystyle \mathbf{lim}_{x \to \pi} \frac{(\mathbf{cos}\ x) + 1}{x - \pi}$

c) $\displaystyle \mathbf{lim}_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

d) $\displaystyle \mathbf{lim}_{x \to 2} \frac{3^x - 9}{x - 2}$

e) $\displaystyle \mathbf{lim}_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

f) $\displaystyle \mathbf{lim}_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^3 - 8}{\Delta x}$

g) $\displaystyle \mathbf{lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{ln}\,(1 + \Delta x)}{\Delta x}$

h) $\displaystyle \mathbf{lim}_{\Delta x \to 0} \frac{(\mathbf{cos}\ \Delta x) - 1}{\Delta x}$

4) "*La derivada de una función par es impar".* Demostrar que el enunciado es verdadero completando para ello la argumentación que sigue a continuación:

$$\mathbf{F'(-a)} = \lim_{x \to \ldots\ldots} \frac{F(x) - F(-a)}{x - \ldots\ldots\ldots} \overset{\substack{\boxed{t = -x}\\ \Updownarrow}}{=} \lim_{t \to \ldots\ldots\ldots} \frac{F(-t) - F(-a)}{-t + a} =$$

$$\overset{\substack{\boxed{\text{F par}}\\ \Updownarrow}}{=} \lim_{t \to a} \frac{F(\ldots\ldots) - F(\ldots\ldots)}{-t + a} = \lim_{t \to a} \frac{F(t) - F(a)}{-(\ldots - a)} = \mathbf{-}\,[\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ] = \mathbf{-\,F'(a)}$$

5) Calcular la función derivada de las funciones que se indican a continuación:

a) $f(x) = x^4 + 3x^2 + \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = 3x\,.\operatorname{sen} x + \ln 10$

c) $f(x) = \dfrac{2.x^2 + x + 7}{\operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = \dfrac{m.x^2 + n.x + k}{k.\operatorname{sen} x}$

e) $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{x^2}{5}$

f) $f(x) = 4\sqrt{x} + \sqrt{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

g) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x$

h) $f(x) = e^x + e^3 + x^3 + 3^x$

i) $f(x) = \cos x.\, e^x + 5.x^2 .\ln x$

j) $f(x) = \operatorname{sen} x.\sqrt{x}.\ln x$

k) $f(x) = \dfrac{2.x}{\sqrt{x}} + 2^x$

l) $f(x) = e^x .(\ln x + \cos t)$

m) $f(t) = e^t .(\ln t + \cos x)$

n) $f(x) = \frac{2.x^3 + 5}{\text{sen}\, x} + \frac{\text{sen } x}{x^3}$

o) $f(x) = \frac{(2.x^3 + 5).\cos x}{5}$

p) $f(x) = \frac{\cos x}{x + \text{sen } x}$

q) $f(x) = \frac{x.\text{sen } x}{1 + x^2}$

r) $f(x) = \frac{e^3 + x^6.\ln x}{3 - x + \cos x}$

s) $f(x) = \frac{\sqrt{t} + t.\text{sen}\, t}{3.t^2 + 4} + \ln x$

t) $f(t) = \frac{\sqrt{t} + t.\text{sen}\, t}{3.t^2 + 4} + \ln x$

u) $f(\boldsymbol{V}) = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{a}}}$

6) Calcular las derivadas de:

a) $f(x) = \text{sen}^4 x$

b) $f(x) = \ln(\text{sen}x)$

c) $f(x) = \cos^2 x + \cos(2x)$

d) $f(x) = \ln(4x) + \text{sen}(\sqrt{x})$

e) $f(x) = e^{2x} + e^{-x} + e^{x^2}$

f) $f(x) = \text{sen}^2 x + (\text{sen}\, x)^3 + \text{sen}\, x^3$

g) $f(x) = \text{arctg}(3x) + \log x$

h) $f(x) = \ln(\frac{x}{3}) + \ln(\frac{3}{x}) + \frac{\ln 3}{\ln(3x)}$

i) $f(x) = (\text{sen}(3x))^{1/2} + 3.\text{sen}^2(3x)$

j) $f(x) = \sqrt{\ln x} + \ln \sqrt{x}$

k) $f(x) = \ln(x + x^4) + \sqrt{\text{sen}(x^3)}$

l) $f(x) = \ln(\text{sen}(x + \sqrt{x^3}))$

m) $f(x) = \ln\left(\frac{4x - 16x^2}{2 - 5x}\right)$

n) $f(x) = \left[\text{sen}(\frac{x}{2}) + \ln(2x)\right]^2$

o) $f(x) = \left[\cos(\text{tg}(2x))\right]^{-4/5}$

p) $f(x) = e^{\ln 3x} + \ln(e^{3x}) + e^{3 \ln x}$

7) **a)** Justificar que $\log x = 0.4342 \cdot \ln x$ y $(\log x)' = 0.4342 / x$.

b) Justificar que $\forall\, a > 0$, $a^x = e^{x.\ln a}$ y $(a^x)' = a^x . \ln a$

c) Verificar, <u>*aplicando regla de la cadena*</u>, propiedades y/o teoremas, que si **g** es la inversa de ***f*** y ***f'*** no se anula en su dominio, entonces:

$(\boldsymbol{f} \circ \mathbf{g})'(x) = \boldsymbol{1}$ $\forall$ x donde $\boldsymbol{f} \circ \mathbf{g}$ exista y sea derivable.

d) Verificar, <u>*aplicando regla de la cadena*</u>, propiedades y/o teoremas que $(\boldsymbol{arctg} \circ \mathbf{tg})'(x) = \boldsymbol{1}$ $\forall x \in D_{(f \circ g)'}$.

8) Calcular (si existe) f´(a) para cada una de las funciones a continuación:

a) $f(x) = 3x + 2$; $a = 7$

b) $f(x) = \text{arctg } x^5$; $a = 1$

c) $f(x) = e^{5x} + e^5$; $a = 0$, $a = 1$, $a = \ln \lambda^2$

d) $f(x) = \text{sen}^3 x + \cos (x - \frac{\pi}{2})^3 + 3 \text{ sen } x$; $a = 0$, $a = \frac{\pi}{2}$, $a = 1$

e) $f(x) = 2. \ln\sqrt{x}$; $a = 1$, $a = 10^{-2}$

f) $f(x) = 2.\sqrt{\ln x}$; $a = e^4$, $a = e^{-4}$, $a = 1$

g) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$; $a = -8$, $a = 8$, $a = 0$, $a = 10$, $a = 11$

h) $f(x) = \ln(100 - x^2)$; $a = -8$, $a = 8$, $a = 0$, $a = 10$, $a =11$

☞Indicar V ó F, justificar: i) $a \in Df \Rightarrow a \in Df'$.

ii) $f'(a) =$ ***nro real*** $\Rightarrow a \in Df$.

iii) $Df' \subseteq Df$.

9) Dada f se pide realizar la actividad indicada en cada caso:

$a)$ $f(x) = sen^2(x) + 1$; $calcular\ f''(0)$

$b)$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $calcular\ f''(2)$

$c)$ $f(x) = \sec x + x^3 - 2x + \ln 5$; $calcular\ f''(x)$

$d)$ $f(x) = \ln x . senx$; $calcular\ f''(x)$

$e)$ $f(x) = 2.x\ e^{4x}$; $hallar\ "a"\ /\ f'''(a) = 0$

$f)$ $f(x) = x^3 + x + 7$; $calcular\ f'(x); f''(x); f'''(x); f^{(4)}(x); f^{(20)}(x)$

$g)$ $f(x) = x^7$; $calcular\ \ f'(1); f''(1); .... f^{(6)}(1); f^{(7)}(1); f^{(8)}(1)$

$h)$ $f(x) = e^{2x}$; $calcular\ \ f'(x); f''(x); f'''(x); f^{(4)}(x)$

10) Analizar la validez de las siguientes fórmulas para la *derivada enésima* de las funciones que se indican a continuación. (**n !** = 1.2.3......n ; *factorial de n*)

Sugerencia: en cada caso, obtener las derivadas sucesivas correspondientes a n = 1, 2, 3, ... ; registrar las mismas en forma apropiadamente organizada. Buscar un "*patrón*", inducir de ello la fórmula correspondiente a "n" genérico.

a) $f(x) = e^{k\,x} \rightarrow f^{(n)}(x) = k^{n}\, e^{kx}$

b) $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 \rightarrow f^{(n)}(x) = n!.a_{\,n}$

c) $f(x) = \text{sen } x \rightarrow f^{(n)}(x) = \text{sen}\,(x + n\,\frac{\pi}{2})$

Sugerencia: escribir las derivadas sucesivas como ***corrimientos*** de ***sen x***.

11) a) Indicar **V ó F**. Justificar la respuesta.
"Si $y(x) = e^{-3\,x}$ entonces y satisface la ecuación: $y'' + y' - 6\,y = 0$ "

b) Dada $y\,(x) = \mathbf{A}.\,\textbf{\textit{sen}}(2x)$,
determinar **A** de modo que $y'' + 3\,y = 3.\textbf{\textit{sen}}\,(2x)$. Verificar.

c) Dada $y\,(x) = e^{r\,x}$, determinar si existe $r \in$ R para el cual la exponencial satisface la ecuación:

i) $y'' + y' - 6\,y = 0$ [verificar].
ii) $y''' - 3\,y'' + 2\,y' = 0$ [verificar].
iii) $y'' + \pi\,y' + \pi^2\,y = 0$ [verificar].
iv) $y'' + \pi\,y' = 0$ [verificar].
v) $y'' + \pi^2\,y = 0$ [verificar].

12) ***Derivada de funciones del tipo*** $f\,(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(x)^{\mathbf{b}(x)}$.

Para obtener la derivada de este tipo de funciones es necesario escribir f de modo que queden "a la vista" las funciones que "la componen". Para ello:

1°) acudimos a la exponencial, a su inversa (logaritmo), a propiedades de las funciones.

$$\mathbf{a^b} = \mathbf{e}^{\ln(\mathbf{a^b})} = \mathbf{e}^{\mathbf{b}.\ln \mathbf{a}} \quad \Rightarrow \quad f\,(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{b}(\mathbf{x}).\ln \mathbf{a}(\mathbf{x})}$$

2°) Derivamos $f\,(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{b}(\mathbf{x}).\ln \mathbf{a}(\mathbf{x})}$, aplicando regla de la cadena.

Aplicando en proceso indicado hallar las derivadas de:

a) $f(x) = x^{x}$

b) $f(x) = (\text{sen}\, x)^{x}$

c) $f(x) = (\cos x)^{\text{senx}} + 4x$

d) $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

e) $f(x) = (\ln x)^{\ln x} .\, \text{sen } x$

f) $f(x) = x^{x^{x}}$

13) Conociendo para **f** y **g** los datos que se dan en la tabla adjunta, se pide calcular (si fuera posible) las derivadas que se indican a continuación:

x	3	6	10
f (x)	9	3	1
f′(x)	2	7	10
g (x)	6	0	0
g′(x)	10	2	6

a) $\mathbf{(f+g)}'(3)$; $\mathbf{(f.g)}'(3)$; $\mathbf{(f/g)}'(3)$; $\mathbf{(g/f)}'(3)$

b) $\mathbf{(1/f)}'(6)$; $\mathbf{(1/g)}'(6)$; $\mathbf{(f^{2})}'(6)$; $\mathbf{(f/(f\text{-}g))}'(6)$

c) $\mathbf{h}'(3)$ si $\mathbf{h}(x) = e^{x} \,.\, \mathbf{f}(x)$

d) $\mathbf{h}'(3)$ si $\mathbf{h}(x) = f(x)/x$

e) $\mathbf{(f_{o}g)}'(3)$; $\mathbf{(g_{o}f)}'(3)$; $\mathbf{(f_{o}f)}'(3)$; $\mathbf{(g_{o}g)}'(3)$

f) $\mathbf{(f_{o}g)}'(6)$; $\mathbf{(g_{o}f)}'(6)$; $\mathbf{(f_{o}f)}'(6)$; $\mathbf{(g_{o}g)}'(6)$

14) Hallar la *función derivada* de las funciones indicadas a continuación.

* Analizar relación entre dominio de f y dominio de f′.

* Graficar f y f′. Inspeccionar los gráficos y en el caso que f *no sea derivable*

En x_o analizar el comportamiento de la ***función*** "***en*** x_o", indicar si presenta algún comportamiento característico (o más de uno).

a) $f(x) = \ln x$ **b)** $f(x) = \ln|x|$ **c)** $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^{2/3}$ **e)** $f(x) = |x|.x$ **f)** $f(x) = |x|.(x-1)$

g) $f(x) = \begin{cases} x^{2} + 4x & , x \le 0 \\ x^{2} - 4x & , x > 0 \end{cases}$ **h)** $f(x) = \begin{cases} \mathbf{x}^{2} - 2\mathbf{x} & , \mathbf{x} \ge 1 \\ -1 \;, & \mathbf{x} < 1 \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \mathbf{x}^{2} - 2\mathbf{x} & , \mathbf{x} \ge 1 \\ 1 \;, & \mathbf{x} < 1 \end{cases}$ **j)** $f(x) = \begin{cases} 2\mathbf{x} + 4 & , \mathbf{x} \ge 0 \\ 2\mathbf{x} - 4 & , \mathbf{x} < 0 \end{cases}$

k) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \mathbf{x} \le 0 \\ \cos \mathbf{x} & , \mathbf{x} > 0 \end{cases}$ **l)** $f(x) = \begin{cases} -x & , x \le 0 \\ \operatorname{sen} x & , x > 0 \end{cases}$

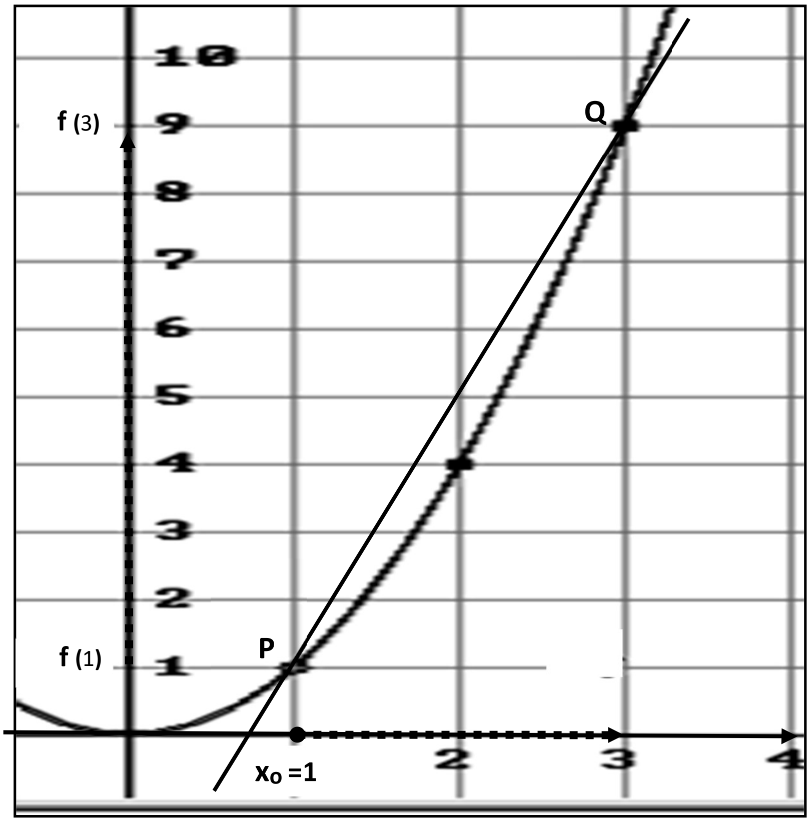
* <u>*La derivada como pendiente de la recta tangente*</u>

15) Dada *f* (x) = **x** ^{2} , **C** = ***graf f*** y ***s*** la recta secante a **C** que pasa por el punto fijo **P**(1; ***f***(1)) y el punto variable **Q**(1+**Δx**; ***f***(1+**Δx**)), se pide estudiar el *comportamiento tendencial* de las rectas secantes cuando **Δx** → 0.

a) Graficar las rectas secantes correspondientes a **Δx** = 2 ; 1.5 ; 1 ; 0.5.
Hallar las ***pendientes*** de dichas secantes.

b) Graficar la recta tangente a **C** en **P.** Estimar gráficamente su pendiente.

c) * Las *secantes,* ¿se acercan a la recta tangente graficada?
* Las *pendientes de las secantes,* ¿se acercan a la pendiente de la tangente*?*



16) Dada *f* por el gráfico que se indica a continuación del texto; se pide:

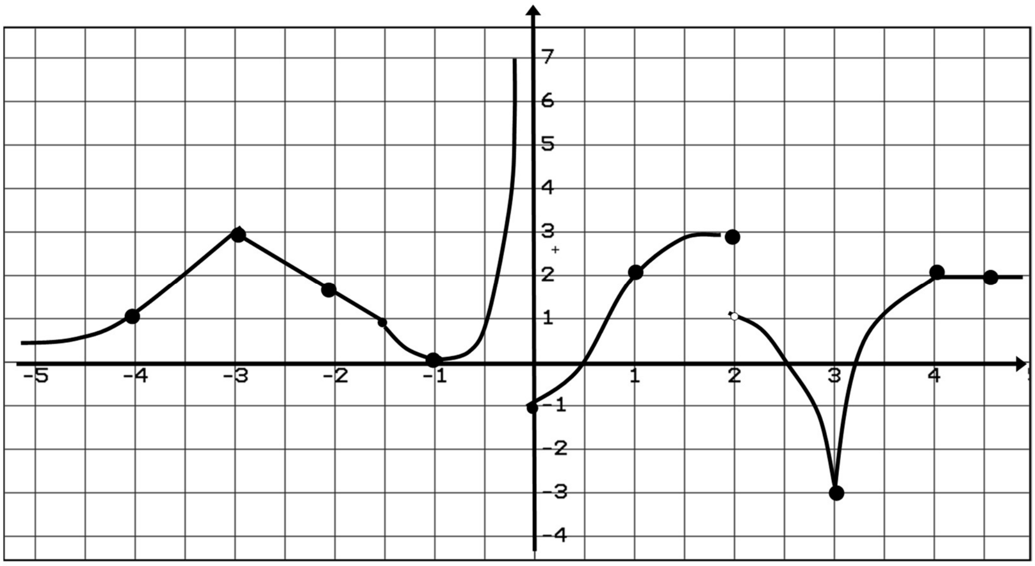
a) Identificar los ***x*´s** para los cuales ***f*** no es derivable. Justificar la respuesta.

b) <u>*graficar*</u> (si existe) la recta tangente al ***graf f*** en el punto **P** de abscisa x_o
con x_o = - 4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 4.5

c) Si $\mathbf{m_t}$ = pendiente de ***t***, recta tg al ***graf f*** en **P,** establecer para cada x_o en (b) y ***leyendo del gráfico***, si $\mathbf{m_t}$ es positiva, negativa, cero o no existe.

d) Analizar y discutir la validez de las siguientes afirmaciones:

i) si $\mathbf{m_t} > 0$, existe un entorno de x_o donde f es estrictamente creciente.
ii) si $\mathbf{m_t} < 0$, existe un entorno de x_o donde f es estrictamente decreciente.
iii) si $\mathbf{m_t} = 0$, existe un entorno de x_o donde f(x)= f(x$_o$); ∀x del entorno.



17) Dada **$f(x) = x^3 - 27$**, se pide:

- **a)** hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por **f**, en los puntos de abscisa: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$.
- **b)** Graficar la función y la recta tangente en cada caso.
- **c)** Analizar y discutir para esta **f** las afirmaciones del item (d) del ej. 16.

18) Dada **$f(x) = a x^2 + b x + c$** $(a \neq 0)$, demostrar que cualquiera sean a , b y c; la abscisa del vértice de la parábola **(x_v)**, es el único punto donde la derivada de **f** vale cero. Hallar la ecuación de la recta tg. a la parábola, en su vértice.

19) Para **$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$; $g(x) = x^3 - 4x$** se pide:

- **a)** analizar continuidad, derivabilidad, ceros y límites para $x \to \pm\infty$.
- **b)** determinar los intervalos ó ***x*´s** para los cuales la recta tg tiene pendiente: i) *cero*; ii) *positiva* ; iii) *negativa.*
  Establecer cual es el comportamiento de la función en dichos intervalos.
- **c)** hacer un bosquejo del gráfico de cada función.

20) Hallar las ecuaciones de las recta tangente y normal a la gráfica de la curva definida por f , en los *puntos cuyas abscisas* se indican. De ser posible realizar un esbozo de la curva y graficar, en el punto indicado la <u>*recta tangente*</u> obtenida.

a) $f(x) = 4x^3 - x$; $x_0 = 1$

b) $f(x) = (x+2) / (3x-2)$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = e^{2x}$; $x_0 = 0$
d) $f(x) = 2^{2x}$; $x_0 = 0$
Graficarlas en un mismo sistema

e) $f(x) = \ln x$; $x_0 = 1$
f) $f(x) = \log x$; $x_0 = 1$
Graficarlas en un mismo sistema

g) $f(x) = \cos(x/3)$; $x_0 = \pi$ y $x_1 = 3\pi$

h) $f(x) = (x^2 - 1) / (4x-3)$; $x_0 = -1$

21) Dada **f**(x) = $\sqrt{|\,x\,|}$, mostrar que existe recta tg en **P** (0; f(0)) aunque no existe **f´**(0).

22) Dada **f**(x) = $\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x-1$, hallar "a" de modo que la pendiente de la recta tg a la gráfica de **f** en **P**(a; f(a)), sea:

a) $m_t = 0$ **b)** $m_t = -1$ **c)** $m_t = 5$ **d)** $m_t = -2$ **e)** $m_t = -\frac{9}{8}$

23) Dada **f** (x) = x + **sen** x , Dom f = [0; 4π] se pide:

a) hallar todos los "a" para los cuales la recta tg. a la **graf. f** en el punto **A**(a; f(a)) sea paralela al eje x. Dar la ecuación de las rectas tg_s.

b) Hallar todos los "b" para los cuales la recta tg. a la **graf. f** en el punto **B**(b; f(b)) tenga pendiente "dos".

c) Hallar todos los "x" para los cuales la recta tg. a la **graf. f** en el punto **P**(x; f(x)) tenga pendiente positiva; ¿qué está haciendo **f** al pasar por **P** ?

d) Marcar en cada punto y con un pequeño trazo las rectas halladas en (a) y (b). Teniendo en cuenta (c) y la continuidad de **f**, hacer un bosquejo del **graf. f**.

24) Dos funciones se dicen que son "tangentes en **P**(x;y)" si sus gráficas se intersecan en **P** y sus rectas tgs. son coincidentes en ese punto. Hallar a, b y c tales que **f** (x)= $x^2 + a\,x + b$ y $g(x) = x^3 - c$, sean tangentes en **P**(1;2).

* ***La derivada como razón de cambio***

En la resolución de los ejercicios que se proponen a continuación se tendrán en cuenta las siguiente denominaciones alternativas del cociente incremental y de la derivada de y = f(x). (En todos los casos en [x_o ; x] ó [x ; x_o], según $sg\,\Delta x$)

▸ $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_o}{x-x_o} \longrightarrow \longrightarrow \left[\begin{array}{c} \textit{velocidad media} \\ \textit{razón media de cambio} \\ \textit{tasa de var iación media} \\ \textit{var iación media} \end{array}\right.$$

▸ $$f'(x_o) = \frac{dy}{dx}(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \left[\begin{array}{c} \textit{velocidad (ins tan tánea)} \\ \textit{razón de cambio (inst.)} \\ \textit{tasa de var iación (inst.)} \\ \textit{var iación ins tan tánea} \end{array}\right.$$

▸ $|\ f'(x_o)\ |$ = rapidez de variación de y respecto de x , en el punto x_o .

25) Si **L = 50 + 0.001 T** da la longitud en cm. de una barra de metal en función de T, su temperatura en grados centrígrados, se pide:

- **a.** Hallar la "razón media de cambio" de L respecto de T en un entorno de $T_o = 10$ y para $\Delta \boldsymbol{T} =$ 10 ; 5 ; 1 .
- **b.** Hallar la razón de cambio (*instantánea*) de L respecto de T en $T_o = 10$. ¿Qué observa?, ¿porqué?.

26) La masa "m" de cierto cultivo de bacterias crece en el tiempo según la ley: $m = ½ t^2 + 10$. ([m] = grs. ; [t] = hs.).

- **a)** ¿ Cuanto "aumenta" la masa durante el intervalo de tiempo que va de las 2 hs. de iniciada la experiencia a las 3 hs.?.
- **b)** Verificar que la *variación media* de masa en el intervalo [2; 3] es de 2,5 grs./h Según este resultado, ¿diría Ud. que en ½ hora y a partir de las 2, el aumento de masa es de 1,25 grs? Justifique su respuesta.
- **c)** ¿Cuál es su razón de crecimiento (*inst.*) a las ***2 hs***. ?. Interpretar físicamente el resultado.

27) La masa M de un isótopo radiactivo de un elemento químico está dada por $M = M_o e^{-kt}$, (k>0) (t = tiempo).

- **a)** Si su $t_{1/2} = 100$ (años), calcular el valor de k.
- **b)** Hallar la velocidad de descomposición del elemento en función del tiempo.
- **c)** Hallar la rapidez de descomposición de este elemento para t = 50.

¿Qué nos informa este valor? . ¿Depende de M_o?; ¿de qué forma?

28) Suponga que una población de bacterias se inicia con 500 y se triplica cada hora.

- **a)** ¿Cuál es la población después de 3 hs.? ; ¿después de 8 hs.?.
- **b)** ¿Cuál es la tasa de crecimiento de la población a las 3 hs.? ; ¿ a las 8 hs.?.

29) Resolver las siguientes cuestiones:

- **a)** Encuentre la *razón media de cambio* del área de un círculo con respecto a su radio "r", cuando este cambia de : i) 2 a 3 ; ii) 2 a 2.5 ; iii) 2 a 2.1
- **b)** Encuentre la razón instantánea de cambio cuando r = 2.
- **c)** Demuestre que la razón instantánea de cambio del área del círculo con respecto a su radio es igual al perímetro de la circunferencia borde del círculo.

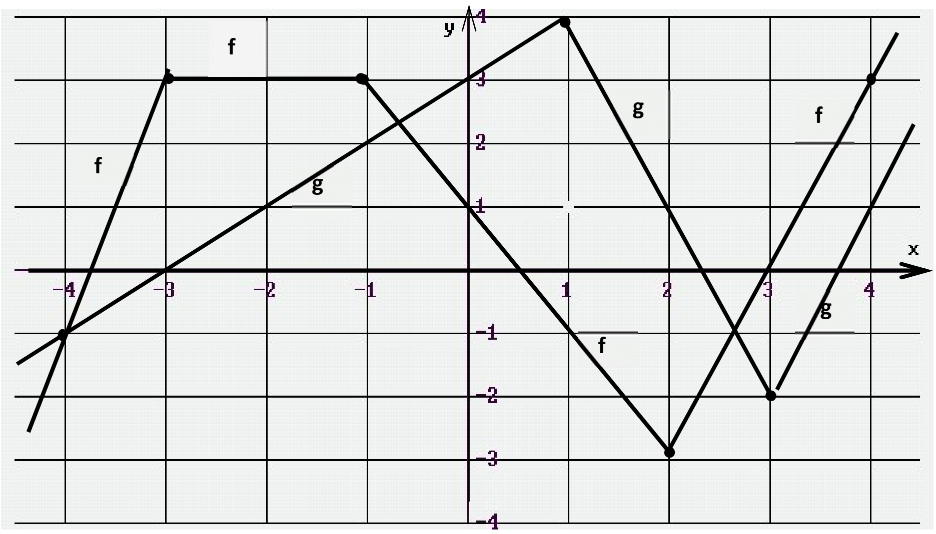
30) La Ley de Boyle establece que, a temperatura constante, PV= k (cte positiva).

- **a)** Hallar la razón de cambio (inst.) del volumen con respecto a la presión.
- **b)** Una muestra de gas se comprime a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Informar su conclusión, analizar la coherencia de la misma según contexto.

* ***Derivada de funciones numéricas y gráficas***

En esta instancia trabajamos con funciones cuyas leyes no están en forma algebraica sino como funciones numéricas o gráficas.

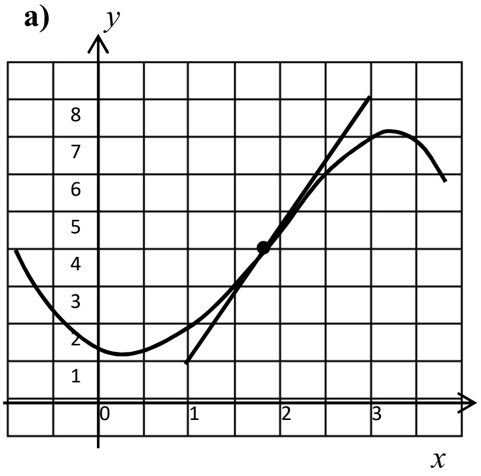
31) Dadas **f** y **g** por su gráfico, se pide hallar la derivada que se indica en cada caso. Si no existe explicar porqué.



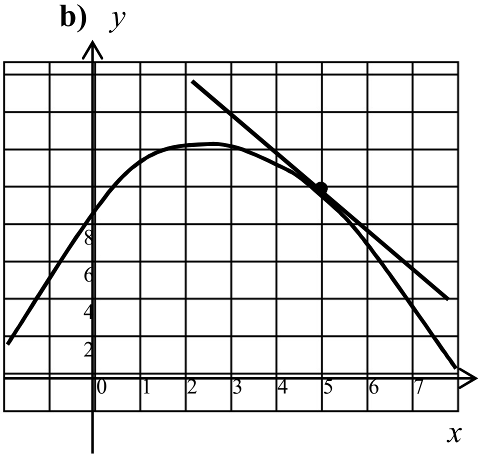
a) u' (0) si u = f .g **c)** w' (-4) si $w = f_{o}g$
b) v'(-2) si v = f /g **d)** z' (-4) si $z = g_{o}f$

32) En los siguientes gráficos se ha dibujado una recta tangente a la curva. Estimar su pendiente. Ser cuidadoso con la diferencia de escalas de los dos ejes.

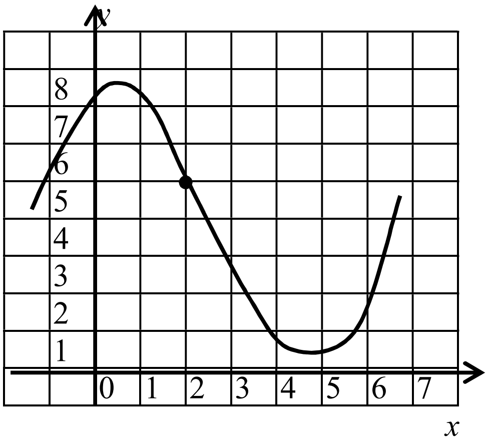
a)

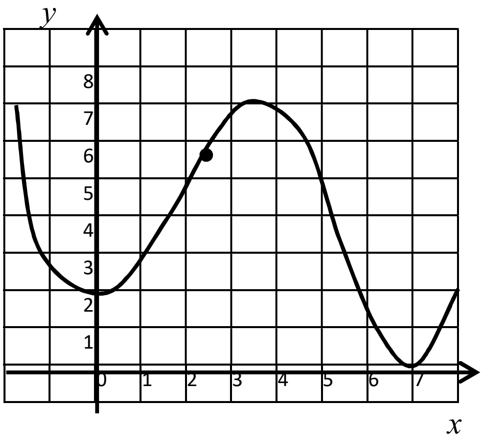


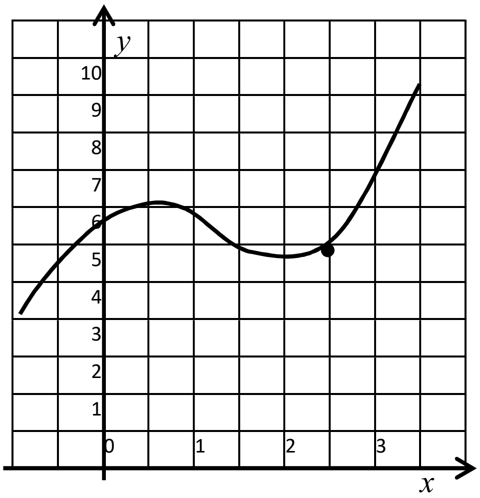
b)

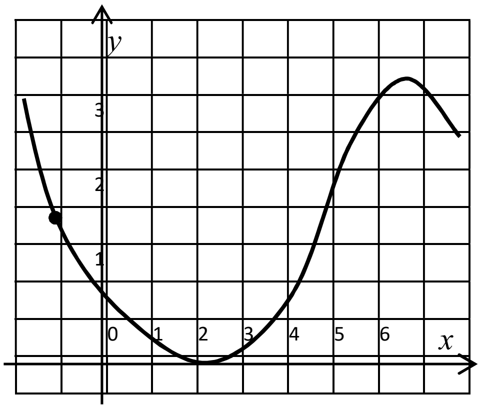


33) En las siguientes gráficas dibujar la recta tangente a la curva que pase por el punto indicado y estimar su pendiente. Luego estimar un valor para f´(x0).









34) **a)** Para f derivable en x0, indicar V ó F , justificar la respuesta:

i) $\dfrac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = f'(x_o) + \varepsilon(\Delta x)$; con $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$

ii) Si existe el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ entonces para $\Delta x \cong 0$

se tiene que $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cong \mathbf{f'(x_o)}$ **(*1*)**

b) Hallar $\varepsilon(\Delta x)$ para:

i) $f(x) = x^2$.

ii) $f(x) = x^3$.

35) *Estimación del valor de* **f´(x₀)** *para una función numérica*

a) Usando **(*1*)** del ejercicio 34 estimar el valor de **f´(8)** para la **f** que se adjunta. Para ello:

(i) Aproximar **f´(8)** tomando $\Delta x = -1$ (→ con velocidad media en [7;8])

(ii) Aproximar **f´(8)** tomando $\Delta x = 1$ (→ con velocidad media en [8;9])

(iii) Finalmente tomar el "promedio" entre las dos velocidades medias calculadas. (Experimentalmente se comprueba que este promedio proporciona una *´buena´* aproximación de **f´(8)**).

x	f (x)
2	9,57
3	7,19
4	5,97
5	5,83
6	6,67
7	8,11
8	7,51
9	5,41

b) Idem; estimar **f´(6)**. En ambos casos discutir el signo.

36) *<u>Cálculo de derivadas para el caso de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas</u>*

$$\textbf{C:} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t)\,; \quad t \in [a\,;b] \end{cases}$$

Demostrar que si **C** es gráfico de una función; o sea admite una ecuación cartesiana de la forma $y = \phi\,(x)$ entonces $\phi'(x) = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$ con $t = f^{-1}(x)$

<u>Sugerencias:</u>

***1º)* Pasar de paramétricas a cartesiana con la eliminación del parámetro t.**
Este proceso consiste en "despejar **t** " *en* una *de las ecuaciones paramétricas, reemplazar luego con este valor, el ó los* **t** *que aparezcan en la otra.*
Si despejamos en la ecuación correspondiente a **x** *, obtenemos ´* **y** *en función de* **x** *´.*

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{despejamos } t} \begin{cases} f^{-1}(x) = f^{-1}(f(t)) = t \\ y = g(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} t = f^{-1}(x) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} t = f^{-1}(x) \\ \boxed{y = g(f^{-1}(x))} \end{cases}$$

recordar que despejar equivale a,
¡¡ aplicar la <u>función inversa</u> de la dada !!

Si hacemos
$g \circ f^{-1} = \phi$
tenemos: $y = \phi\,(x)$

2º) $\phi\,(x) = g \circ f^{-1}(x)$; o sea, ϕ resulta de la composición de **g** con f^{-1}, Teniendo en cuenta esto, ***calcular*** ϕ' por aplicación de la "regla de la cadena" y el "teorema de la derivada de la función inversa"; demostrar que:

$$\phi'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \text{con} \quad t = f^{-1}(x)\,.$$

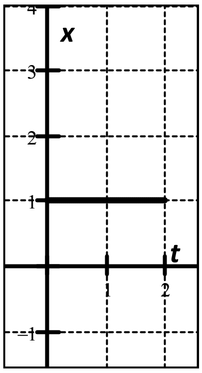
3.10 Problemas de aplicación

Problema 1:

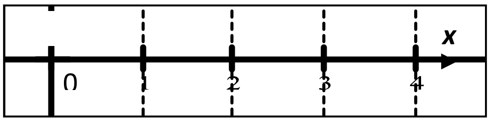
Las gráficas cartesianas dadas a continuación representan durante 2, 6 y 8 hs. respectivamente, la ***función de posición*** de una partícula **P** que se mueve sobre una recta horizontal, durante 8 hs. Para cada intervalo de tiempo dado, se pide:

a) Graficar la trayectoria de **P** sobre el eje del movimiento.
b) Hallar la ***ley*** de la función de posición de **P**, $x = x(t)$; [**t**]= hs., [x]= mts..
c) Obtener la ley de la función velocidad, $v = v(t)$.
d) Describir el movimiento de la partícula en el lenguaje coloquial.

*** I1 = [0;2]**



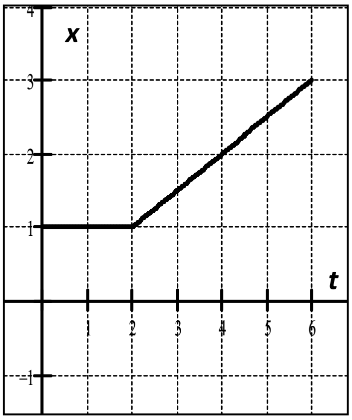
*** Trayectoria 1**

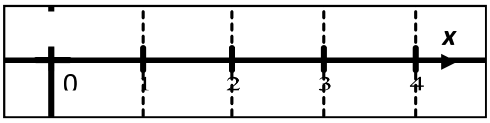


x = ...; ∀t∈[0;2] ; v = ...; ∀t∈[0;2]
Durante las 2 horas primeras, **P** está ....,
a ....mt. del O y a la (izq.?; der.?) del mismo.

*** I2 = [0;6]**

*** Trayectoria 2**

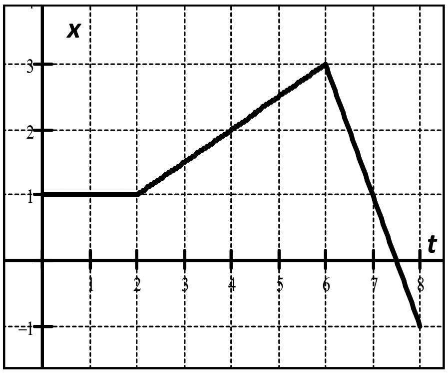




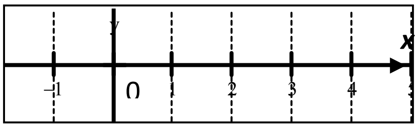
$$x = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots; & \forall t \in [\,0;2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; & \forall t \in (2;6] \end{cases} \qquad v = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots; & \forall t \in [\,0;2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots; & \forall t \in (2;6] \end{cases}$$

P está .... durante 2 hs.; luego , durante las cuatro horas siguientes, *avanza* en el sentido del semieje x .... a razón de .... por ....
A las 6 hs., la ***posición*** de **P** es x = ... ; está a .... mts. del punto de partida ($x = 1$) y a la .... del mismo.

*** I3 = [0;8]**



*** Trayectoria 3**



x = ... ; 0≤ **t** ≤ 2
.... ; 2< **t** ≤ 6
.... ; 6< **t** ≤ 8

v = ... ; 0≤ **t** ≤ 2
. ... ; 2< **t** ≤ 6
...... ; 6< **t** ≤ 8

P está (*parado*) durante 2 hs. ; luego, durante las cuatro horas siguientes, **P** *avanza* en el sentido del semieje ***x*** (+); a razón de (½) mt por (*hora*).
A las 6 hs., la ***posición*** de **P** es ***x* = (*3*)** y está a (*2*) mts. del punto de partida (***x* = *1*),** a la (derecha) del mismo.
A partir de las 6 hs.; **P** *avanza* en el sentido *contrario* al del semieje ***x*** .... ; a razón de ....mts por ....
A las 8 hs., la ***posición*** de **P** es ***x* = ...** y está a .... mts. del punto de partida (***x* = *1*)** ; a la .... del mismo.

Problema 2:

Sea **x = k t** (k<0 ; t ≥ 0) la ***función de posición*** de cierta partícula. Se pide:

a) Si la partícula se mueve sobre un eje horizontal graduado en la forma habitual, graficar la ***trayectoria de la partícula*** sobre el eje de movimiento, en el intervalo de tiempo [0; 6].
b) Calcular la $\mathbf{v_m}$ en el intervalo de tiempo 2 a 2 + Δt.
c) Calcular la velocidad (*inst.*) "**v**" en t = 2. Interpretar físicamente el resultado.
d) Indicar V o F, justificar:

Si **x = k t ; k** ∈**R** entonces $\mathbf{v = v_m = k}$

e) Graficar **v** versus **t** . Dar la ley de ***a* = *a(t)***, si con "***a***" indicamos el área entre la gráfica de **v** y el ***eje t*** en el intervalo [0; t].
f) Indicar **V** o **F**:
"el área de la región entre el gráfico de **v** y el ***eje t*** en el intervalo [0; t] *coincide*, en valor, con la ***posición*** de la partícula al instante t ".

Problema 3:

Dos automovilistas **A1** y **A2** se encuentran sobre una misma ruta. **A1** esta en la ciudad **C** (sobre esa ruta) mientras que **A2** está a 50 Km. de **C**. Ambos parten al mismo instante y en el mismo sentido, pero el que está en **C** lo hace a una velocidad constante de 100 km/h mientras que el otro lo hace a 75 km/h. Se pide:

a) contruir, al efecto de ***representar*** el movimiento de ambos automovilistas, un ***sistema de referencia*** asimilando la ruta a una ***recta horizontal*** ; hacer esto tomando **C** como origen del sistema y el sentido positivo del eje *hacia la derecha*.

b) para cada una de las situaciones a continuación, bosquejar la *trayectoria* de ambos automovilistas sobre el sistema de referencia (para cada caso, construir un sistema como el indicado en (a)). Decidir luego, por simple inspección y si no cambian las velocidades**,** si **A1** y **A2** pueden llegar a cruzarse en algún instante:

- b1) **A 2** está a la derecha de **A1;** y ambos parten hacia la derecha**.**
- b2) **A 2** está a la izquierda de **A1;** y ambos parten hacia la derecha**.**
- b1) **A 2** está a la derecha de **A1;** y ambos parten hacia la izquierda**.**
- b2) **A 2** está a la izquierda de **A1;** y ambos parten hacia la izquierda.

c) dar la ley de la *función de posición* correspondiente a cada móvil y para cada una de situaciones descriptas en el item (b),

d) hallar (en cada caso y si existe) el instante en que se cruzan; a que distancia de **C**.

e) para cada una de situaciones en el item (b), y en un mismo sistema cartesiano ortogonal, realizar el ***grafico cartesiano*** de la función de posición correspondiente a **A1** y **A2**. Comprobar si los resultados algebraicos coinciden con los gráficos.

Problema 4:

Si $\mathbf{x = 3\ t^2}$ es la ley de movimiento de cierta partícula durante **1 ½ hora,** si a partir de allí comienza a moverse con velocidad constante e igual a la que tiene en ese instante.

- **a)** ¿cuántos km se desplaza (a partir de allí) en 1 h?
- **b)** ¿cuántos km se desplaza en total, en las 2 ½ hs?

Problema 5:

Una pelota se lanza hacia arriba desde el suelo. Si la dirección positiva del eje del movimiento se toma hacia arriba, la ***función de posición*** para la pelota es:
$\mathbf{y = -16\ t^2 + 64\ t}$ **;** $t \geq 0$; [**y**] = pies; [**t**] = seg . Se pide:

- **a)** la trayectoria de la pelota (tomar un eje "vertical" como eje del movimiento)
- **b)** la gráfica cartesiana de **y** = **y**(t) y de la velocidad **v**(t) = y' (t)
- **c)** la velocidad instantánea al término de 1 seg. (la pelota: ¿sube o baja?)
- **d)** la velocidad instantánea a los 3 seg. (la pelota: ¿sube o baja?)
- **e)** el tiempo que hace que la pelota fue lanzada si, como dato, nos dicen que la "rapidez" de la misma en ese instante es de 32 pies/seg . (¿puede dar esta respuesta?; ¿porqué?. Si le dieran otro dato, ¿podría hacerlo?; ¿cuál?.)
- **f)** velocidad inicial y velocidad final (al tocar el suelo)
- **g)** Verificar que el instante en que la pelota alcanza la altura máxima es aquel donde la velocidad se hace "cero". ¿Es esto casual o tiene una explicación "física"? . Explicar la respuesta.

Comparando los gráficos de la función de posición y de la velocidad, completar las siguientes afirmaciones:

(I) la pelota "sube"; o sea, avanza en *"el sentido"* del semieje ...., en el intervalo de tiempo donde **v .... 0** (¿mayor, menor o igual a cero?)

(II) la pelota "baja"; o sea, avanza en *"el sentido contrario"* al semieje ...., en el intervalo de tiempo donde **v .... 0.**

Problema 6:

Atendiendo a las leyes de la Física, existen dos ecuaciones posibles para representar la ***función de posición*** que modeliza el fenómeno de un cuerpo que cae del reposo,

(I) $y = 16\,t^2$ **;** **(II)** $y = -16\,t^2$; [**y**] = pies; [**t**] = seg.

¿Porqué sucede esto?. Porque para modelizar cualquier fenómeno es necesario establecer un ***sistema de referencia***; luego, según el sistema que se elija las ecuaciones resultantes, aún cuando describan el mismo fenómeno, pueden ser distintas.

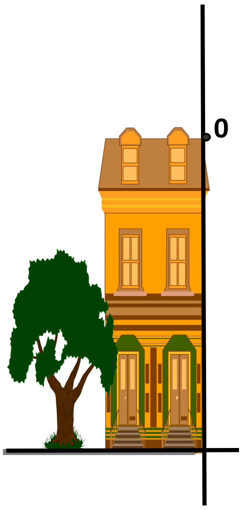
Si se deja caer una pelota de un edificio de 256 pies de altura, se pide:

a) Para los gráficos que se adjuntan, construir respectivamente el sistema de referencia para el cual se obtiene la función **(I)** y la función **(II)** . Dar en cada caso el dominio natural de la función; analizar si en ambos casos y = ***distancia*** de la pelota al techo del edificio al instante t.

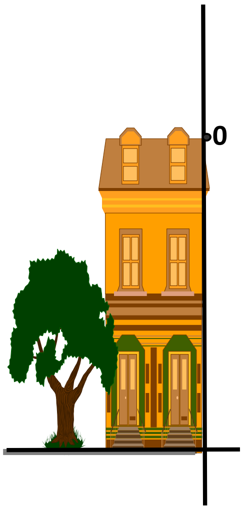
b) Para hallar el instante en que la pelota toca el suelo, ¿puede usar sólo una de las ecuaciones o puede usar cualquiera de las dos?. Justificar la respuesta.

c) hallar v_I y v_{II} , ***velocidad*** de la pelota para el caso (I) y (II) respectivamente. Calcular $v_I(2)$ y $v_{II}(2)$ y explicar porqué ambos valores informan lo mismo aún cuando tengan signos contrarios.

(I) $y = 16\,t^2$

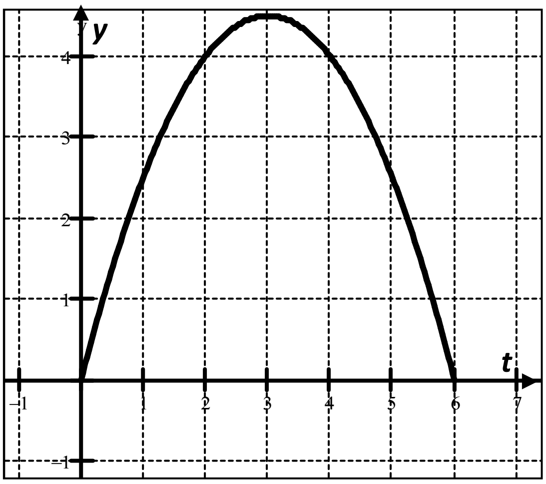


(II) $y = -16\,t^2$



Problema 7:

Para una partícula **P** que se mueve sobre un eje vertical las gráficas adjuntas representan, respectivamente, la ***función de posición*** ***$y = y(t)$*** y la ***velocidad*** ***$v = v(t)$*** de la misma. ***$[t] = seg.$***; ***$[y] = m$***; ***$[v] = m/seg.$***

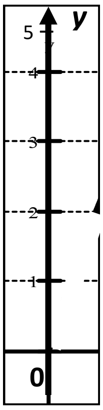


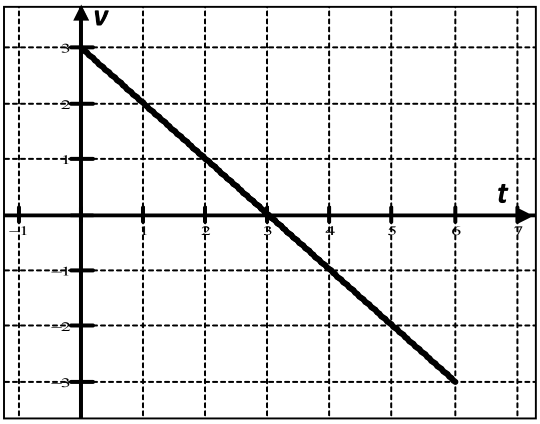
Al respecto se pide:

a) Ley y dominio de ***v*** e ***y***.

b) Verificar que $v = y'(t)$.

c) Dibujar la ***trayectoria*** de **P.**





d) Indicar V ó F; justificar respuesta.

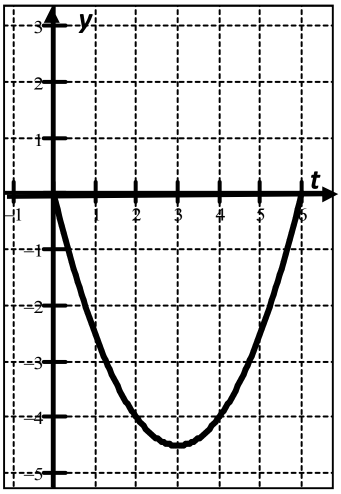
d1) si $v > 0$ entonces **P** avanza en el sentido del semieje positivo.

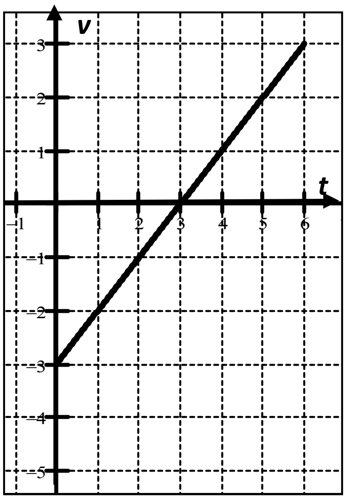
d2) si $v < 0$ entonces **P** avanza en el sentido ***contrario*** al del semieje positivo.

d3) en el instante en que $v = 0$; **P** cambia el sentido del movimiento.

Repetir el ejercicio anterior para el caso que los gráficos de $y = y(t)$ y $v = v(t)$ sean los que se dan a continuación.

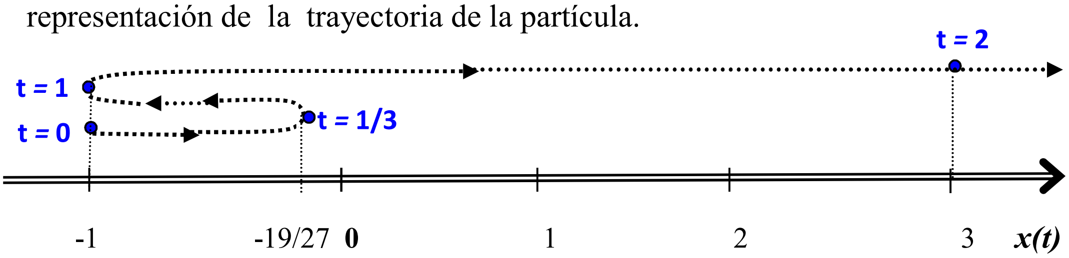
Previo a contestar los V ó F, graficar la *trayectoria* de la partícula (igual que antes en un eje vertical).





Problema 8 :

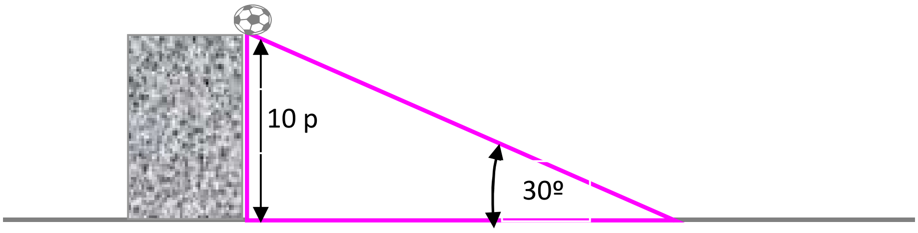
Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta horizontal de acuerdo a la siguiente ley de movimiento: $x = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$; $t \geq 0$.
Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores en cuanto a la relación entre el ***signo de la velocidad*** y el ***sentido del movimiento***, se pide determinar los instantes en que la partícula se está moviendo hacia la derecha o hacia la izquierda, y cuándo cambia de sentido. Analizar luego si el grafico que se adjunta es una buena representación de la trayectoria de la partícula.



Problema 9:

Una pelota se empuja hacia abajo sobre un plano inclinado 30º respecto de la horizontal. Si *la posición de la pelota sobre el plano inclinado* en función del tiempo viene dada por $\mathbf{x = 24\,t + 10\,t^2}$, con "**x**" en pies y "**t**" en segundos, se pide:

a) Construir un sistema de referencia (el más apropiado al caso) y dibujar sobre el mismo la trayectoria de la pelota si la misma se empuja hacia abajo cuando está a 10 pies del piso.
b) Hallar la velocidad (*inst.*) de la pelota durante su recorrido sobre el plano.
c) Hallar t_f (instante "final") ; o sea, cuando la pelota llega al piso y cambia la ley de la función posición.



Problema 10:

Se demostró que el producto $\boldsymbol{\eta}.(\boldsymbol{\theta} + 273)^3$ es ***constante*** para líquidos con viscosidad "**η**" a una temperatura "**θ**" . Si la constante es "**k**", hallar la razón de cambio instantánea de la viscosidad en función de la temperatura.

Problema 11:

Una fórmula empírica que da la relación entre la presión de vapor "**p**" y la temperatura "**θ**" es:

$$\log p = a + b\,\alpha^{\theta} - c\,\beta^{\theta} \qquad ; \quad \alpha, \beta \in R^{+}$$

Hallar la variación instantánea de "**p**" en función de "**θ**". ¿Cuál es tal variación si $\theta = 0$? ¿Qué podría decir de "**p**" para $\theta = 0$; si $\frac{\alpha^b}{\beta^c}$ fuera mayor que 1?

Problema 12:

Para $x > 1$; qué aumenta más rápido: ¿ x o $\log x$?

Problema 13:

Hallar la velocidad de un móvil en el momento de partida (t=0); si el mismo se mueve según la ley: $x = a\,e^{-\lambda t}\cos(2\pi t)$

Si todas las constantes que intervienen son positivas: ¿qué signo tiene la velocidad al momento de partir?; ¿qué nos dice este signo en cuanto al movimiento del móvil ?.

Problema 14:

La siguiente función da la cantidad **"x"** de una cierta sustancia formada a partir de dos reacciones unimoleculares consecutivas, según el tiempo **"t"** transcurrido desde el inicio de las reacciones: $x = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} e^{-k_1 t} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} e^{-k_2 t}$

Con k_1 y k_2 constantes propias de la reacción, ambas positivas.
Hallar la velocidad a la que cambia "**x**" en función del tiempo, **x**(0) y $\lim\limits_{t \to +\infty} x$.
Hallar $x'(0)$ y **signo** $v = x'(t)$ (velocidad de variación de la sustancia en cada instante t), hacer esto para el caso que $k_1 > k_2$. Con el dato obtenido, ¿qué se puede concluir respecto de **x** ?, ¿ se puede hacer un bosquejo del ***graf.*** **x** ?

Problema 15:

Si un tanque contiene 5000 ls de agua, la cual drena desde el fondo del tanque en 40 minutos, entonces **V** (volumen que <u>queda</u> en el tanque después de **t** minutos) es:

$$\mathbf{V = 5000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2} \qquad \text{(ley de Torricelli)}$$

a) Hallar la razón de drenado después de 5, 10, 20 y 40 minutos.
b) Hallar la rapidez de drenado después de 5, 10, 20 y 40 minutos.
c) ¿Cuándo fluye más rápido? ¿Y con mayor lentitud? ¿Es esto razonable?.

Problema 16:

La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura **T** (en Kelvins); la presión **P** (en atm.), con un volumen **V** (en litros) es,

P V = n R T (**n** = nº de moles del gas, **R** = 0,0821)

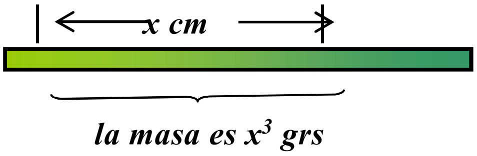
Las variables de estado P; V; T varían con el tiempo; o sea, **P= P (t) ; V= V(t)** y **T= T (t) .** Si en cierto instante $\mathbf{t_0}$ conocemos que:

→ **P** = 80 atm. y aumenta a razón de 0.1 atm/min.
→ **V** = 10 litros y disminuye a razón de 0,15 l/min.

Se pide hallar la razón de cambio de **T** respecto al tiempo en ese instante, si ***n = 10***.

Problema 17:

Un cable de 8 cm de longitud no es "homogéneo"; es tal que la masa entre su extremo izquierdo y un punto a **"x"** cm a la derecha del mismo es de **x^3 grs.**



a) ¿Cuál es la densidad media del segmento de 2 cm ubicado en el medio del cable?
b) ¿Cuál es la densidad en el punto que está a 3 cm del extremo izquierdo del cable?

Problema 18:

El peso en gr. de un tumor maligno en el momento **"t"** es **$W(t) = 0,2\, t^2 - 0,09\, t$**, con **t** medido en semanas. Hallar el índice de crecimiento del tumor para t = 10.

Problema 19:

Una ciudad es golpeada por una epidemia de gripe asiática. Las estimaciones oficiales son que el número de personas enfermas de gripe "**t**" días después del comienzo de la epidemia está dado por: **$P(t) = 120\, t^2 - 2\, t^3$** siendo $0 \leq t \leq 40$.
¿Cuál es el índice de difusión de la enfermedad en t = 10, t = 0, t = 40 y t = 50? ¿Cuándo se termina la epidemia?. Interpretar los resultados.

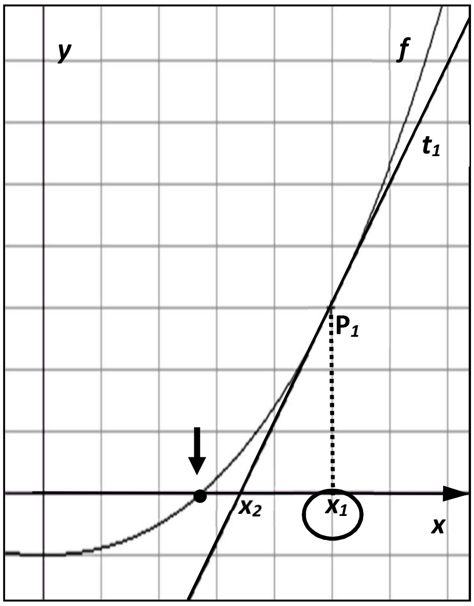
Problema 20:

Las aristas de un cubo variable aumentan a razón de 3 cm/segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cubo cuando la arista tiene 10 cm de longitud?.

3.11 Trabajo Práctico: Método de Newton

Objetivo : determinación de los ceros de una función.

Dada $y = f(x)$ el ***Método de Newton*** permite obtener ***raíces*** o ***ceros de f***.
La utilidad de este método radica en que permite *estimar raíces* en el caso que no se puedan obtener con los *métodos tradicionales del álgebra*. Por ejemplo si queremos resolver la ecuación $x + e^x = 0$, luego de algunos intentos veremos que esto es imposible de hacer si nos limitamos a realizar *sólo manipulaciones algebraicas*.



El ***Método de Newton*** consiste en esencia en un proceso recursivo a partir del cual se genera una ***sucesión de puntos*** que se van ***acercando, cada vez más, al cero buscado***.

Así, normalmente, este método no proporciona el valor exacto del cero, sino uno aproximado
La generación de la ***sucesión de puntos que aproxima al cero***, está basada en un concepto fundamental del cálculo diferencial, el de ***aproximación lineal*** ; es decir, en que, ***"toda curva suave, en las proximidades del punto de contacto, puede ser asimilada a su recta tangente "***.
Acorde a este principio *el cero de la recta tangente* debe estar *próximo* al de la función, pudiéndose así tomar *uno por otro*.

* ***Método de Newton***: ¿ x^*? / $f(x^*) = 0$

1) *Elegir* una aproximación inicial, *etiquetarla* x_1.
En este paso apoyarse en el graf **f** o teoremas aplicables al caso (ej: Bolzano).
2) Obtener t_1 recta tg en $P_1(x_1;\ f(x_1))$: $t_1(x) = f'(x_1)\,(x - x_1) + f(x_1)$
3) *Hallar* $x = t_1 \cap$ *eje x* ; *etiquetarlo* x_2

$$\rightarrow f'(x_1)\,(x - x_1) + f(x_1) = 0 \rightarrow x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

4) Obtener t_2 recta tg en $P_2(x_2;\ f(x_2))$: $t_2(x) = f'(x_2)\,(x - x_2) + f(x_2)$
5) *Hallar* $x = t_2 \cap$ *eje x* ; *etiquetarlo* x_3

$$\rightarrow f'(x_2)\,(x - x_2) + f(x_2) = 0 \rightarrow x = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

……..continuar en forma similar, generar la sucesión x_1 , x_2 , x_3 , x_4, x_5,.....

****¿Hasta cuándo se siguen generando puntos ??. ¿¿cuándo termina el proceso??***
En el caso que el método "converja", es decir, que la sucesión de puntos *tienda a un valor límite,* se presentan dos situaciones:
a) que en cierto momento los puntos comiencen a repetirse:
$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = ...= a$; en cuyo caso, $x^* = a$.
b) que no se repitan pero la distancia entre dos puntos consecutivos tienda a cero al aumentar n , $|x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0$. En este caso, para n "*grande*", cualquier x_n de la sucesión está próximo a x^*; luego, tomamos $x^* = x_n$ (con n "*grande*").

<u>Plan de trabajo</u> (para la búsqueda de x^* / $f(x^*) = 0$, con el Método de Newton)**:**

1) ***<u>Detectar</u>*** un intervalo donde pueda estar x^*; elegir una aproximación inicial, x_1.

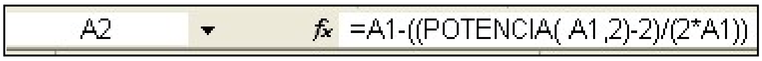
2) ***<u>Obtener</u>*** la sucesión x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,..... a partir de la ***fórmula de recurrencia*** que los genera. Trabajar en Excel.

⌧ *<u>Fórmula de recurrencia para los</u>* x_n :

A partir de <u>calcular</u> los *<u>ceros</u>* de las dos primeras rectas tangentes generadas al aplicar el método, se observa la existencia de cierta "regularidad" en la forma de cálculo de los mismos. Así, generalizando lo observado, se concluye la siguiente fórmula para el cálculo de los puntos de la sucesión: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; $\mathbf{n \in N}$

⌧ *<u>Programación de la fórmula en Excel</u>* (Ejemplo: $f(x) = x^2 - 2$; $f'(x) = 2x$)

1) Introducir en la celda **A1** , el x_1 elegido para el caso. (ej: $x_1 = 2$)
2) Escribir en la celda **A2** la fórmula para calcular x_2.



A2 =A1-((POTENCIA(A1,2)-2)/(2*A1))

3) Generar las siguientes aproximaciones x_3, x_4, x_5,...., x_n "arrastrando" **A2** .

3) ***<u>Informar</u>*** un valor aproximado de x^* cero de f.

Cualquiera de los x_n obtenidos con la fórmula de recurrencia da una aproximación del cero buscado. Normalmente esta aproximación será tanto mejor cuanto más grande sea n. Así, y por ej., tanto x_{15} como x_{20} dan una aproximación de x^*; pero x_{20} da una mejor aproximación que x_{15}.

<u>ACTIVIDADES</u>*:*

***Actividad 1*:**

Usando el Método de Newton y Excel, hallar una aproximación de $x^* = \sqrt{2}$.
Para ello tener en cuenta que x^* es un cero de $f(x) = x^2 - 2$.
Discutir el resultado hallado sabiendo que con otro utilitario se obtuvo
$\sqrt{2} \cong 1.4142135623730950488016 88$.

***Actividad 2*:**

Hallar x^* o una aproximación de x^* , único cero de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

***Actividad 3*:**

Usando el Método de Newton con $x_1 = 20$, hallar un cero de $f(x) = x^2 - 169$.

4— Aplicaciones de la Derivada

En el CAPÍTULO 3 vimos el concepto de *derivada*; en particular definición, reglas de cálculo e interpretación física y geométrica de la misma. En este capítulo nos ocupamos de *sus aplicaciones*; o sea, de ver donde, cuando y/o porqué resulta apropiado acudir a la derivada al efecto de resolver un problema.

Al respecto veremos dos problemas clásicos a los que da respuesta la derivada:

Parte I.- *"valores extremos" de una función* (→ *"estudio de funciones"*).

Parte II.- *"aproximación" de una función por otra más simple; en particular: lineales o polinómicas (polinomios de Taylor)*

Parte I - Aplicaciones de la derivada al "estudio de funciones"

La interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente al ***graf f*** proporciona información acerca de la propia ***f*** (comportamiento en D*f*, existencia de extremos, etc) permite hallar "*técnicas de graficación*" que faciliten el trazado de su gráfica. Así, el objetivo en esta instancia es ampliar las técnicas vistas en cap$_s$ 1 y 2 para poder *estudiar y graficar* cualquier tipo de función que se presente.

- Dada ***f*** con fórmula ***y = f(x)***, hasta ahora ***podemos determinar***:
  - a) *dominio natural de* ***f*** = D***f***
  - b) *continuidad de* ***f*** en D***f***. (→ saltos y/o agujeros en el ***graf f***).
  - c) *derivabilidad de* ***f*** en D***f***. (→ ptos angulosos en el ***graf f***).
  - d) *ceros de* ***f*** (***f*** (*x*)=***0***), o intervalos que contengan ceros de ***f*** (Bolzano).
  - e) *simetrías* (par o impar) o *período* (si fuera periódica).
  - f) *asíntotas*: vertical ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$) y/o horizontal ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\mathrm{L}$) .
  - g) *acotación* ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ *y/o* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty \Rightarrow$ no acotada).
- y en general, todavía ***no podemos***:
  - 1) determinar donde crece o decrece ***f*** ; o sea, ***intervalos de monotonía***.
  - 2) detectar extremos (***máximos y mínimos****), su valor.
  - 3) determinar donde ***f*** es *cóncava* (*convexa*); o sea, ***curvatura del graf. f*** .
  - **4)** ***graficar f*** (→ ***dar cotas de f ; Im f***)

Los problemas señalados en 1, 2, 3 se resuelven por medio de la ***derivada***, concepto ahora conocido. Estamos entonces en condiciones de resolver las cuestiones indicadas en estos puntos y así, junto a las indicadas en los puntos a, b,....., g , resolver finalmente el ***punto* 4**; o sea, ***graficar f*** .

* ***Máximos y mínimos***: ´***absolutos***´ y ´***relativos***´.
Hemos definido y trabajado ya el concepto de ´*extremo absoluto*´ pero este concepto no basta a los efectos de llevar a cabo el estudio de una función.
A tal fin necesitamos distinguir dos tipos de extremos: ´*absolutos*´ y ´*relativos*´.

Definiciones:

Extremos absolutos
f : D → R

- M_a: máximo absoluto de **f** en **D**. [mayor valor que toma **f** en **D**].

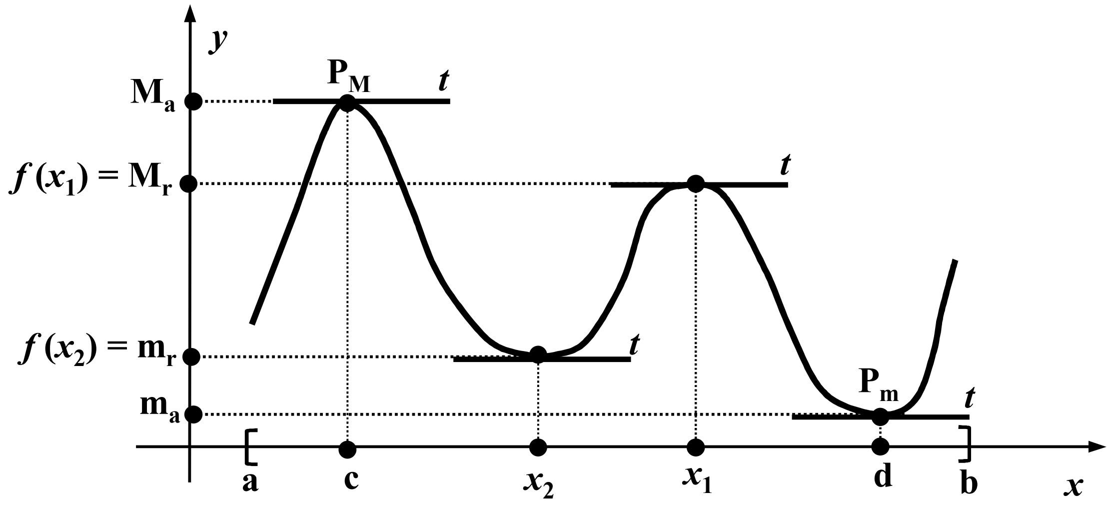
  M_a es max. ab. de **f** en **D** $\Leftrightarrow$ **(1)** $f(x) \le M_a$, $\forall\, x \in D$
  (2) $\exists\; c \in D \;/\; M_a = f(c)$

- m_a: mínimo absoluto de **f** en **D.** [menor valor que toma **f** en **D**].

  m_a es min. ab. de **f** en **D** $\Leftrightarrow$ **(1)** $f(x) \ge m_a$, $\forall\, x \in D$
  (2) $\exists\; d \in D \;/\; m_a = f(d)$

Observaciones:

- P_M pto de máximo ab. → ***graf f*** todo ***´por debajo´*** de ***t***, recta de ecuaión $y = M_a$;
- P_m pto de mínimo ab. → ***graf f*** todo ***´por arriba´*** de ***t***, recta de ecuación $y = m_a$.



En el gráfico M_a y m_a se corresponden, respectivamente, con la *cumbre más alta* y el *valle más profundo*. Puede suceder, como aquí, que exista una *cumbre más baja*; o sea, un x_1 donde la ***graf f*** esté por debajo de ***t***, ***en un entorno de*** x_1**.** También puede existir, un *valle menos profundo*. En este caso hablamos de *´extremos relativos´*.

Extremos relativos
f : D → R

- M_r : máximo relativo de **f** . [mayor valor de **f** en un ***subconjunto*** de **D**]

  M_r es max. relativo de **f** $\Leftrightarrow$ **(1)** $f(x) \le M_r$, $\forall\, x \in E(x_1) \cap D$
  (2) $M_r = f(x_1)$

- m_r : mínimo relativo de **f** . [menor valor de **f** en un ***subconjunto*** de **D**]

  m_r es min. relativo de **f** $\Leftrightarrow$ **(1)** $f(x) \ge m_r$, $\forall\, x \in E(x_2) \cap D$
  (2) $m_r = f(x_2)$

Observaciones:

* Los extremos absolutos son relativos. Así en lo que sigue, y en un principio, el objetivo será buscar *extremos relativos*. Luego veremos como hallar los absolutos.
* Es fácil apreciar que en los puntos del gráfico donde se producen ***extremos*** (abs. o relativos), ***la recta tangente (si existe) es paralela al eje x*** ; o sea, con ***pendiente cero***.

TEOREMA 1 (TEOREMA DE FERMAT)

Dada **f** definida en [a; b] tal que:
a) tiene un extremo relativo en $x_o \in (a; b)$
b) existe $f'(x_o)$;
} entonces, $f'(x_o) = 0$

Demostración: (por el ABSURDO. O sea, partimos de suponer $f'(x_o) \neq 0$)

Si $f'(x_o) \neq 0$ entonces es positivo o negativo. Analizamos cada caso.

1º) Suponemos $f'(x_o) > 0$:

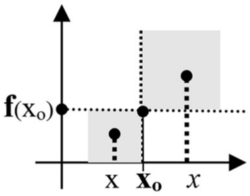
por (b), **f** es derivable en x_o $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_o) > 0$; luego,

por *Teo. conservación del signo*, existe un entorno de x_o donde el signo del cociente incremental es positivo: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$; $\forall\, x \in E^* (x_o)$.

Entonces:

↳ $x < x_o \Rightarrow x - x_o < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_o) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_o)$

↳ $x > x_o \Rightarrow x - x_o > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_o) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_o)$



$\Rightarrow$ en x_o no hay extremo. (*graf f* por debajo y por arriba de $y = f(x_o)$).

Esto contradice (a), luego es ABSURDO; concluimos así que $f'(x_o) \not> 0$.

2º) Suponemos $f'(x_o) < 0$. Idem (1º) llegamos a una ABSURDO; luego $f'(x_o) \not< 0$.

Conclusión:

$f'(x_o)$ no es positivo, no es negativo y *existe*, entonces $f'(x_o) = 0$ **(q.e.d)**

Observación 1:

Probada la *verdad* de $p \Rightarrow q$, investigamos la verdad de su recíproca:

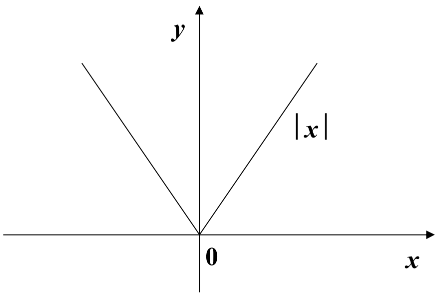
- directa: $p \Rightarrow q$; $\underbrace{\textbf{f derivable en } x_0 \wedge \textbf{en } x_0 \textbf{ hay ext.}}_{p} \Rightarrow \underbrace{f'(x_0)=0}_{q}$ ***(V)***
- *recíproca*: ¿$q \Rightarrow p$? : **NO.** " $f'(x_o) = 0 \not\Rightarrow$ en x_o hay extremo". ***(F)***

Contraejemplo: $f(x) = x^3$; $f'(0)=0$ *y en* $x_o = 0$ *no hay extremo de* ***f.***

Observación 2: en los puntos donde hay extremo y existe derivada, por el Teo 1, $f'(x_o) = 0$. Como $f'(x_o) = m_t \Rightarrow m_t = 0$. Luego, en los puntos de extremos la *recta tangente* *es paralela al eje x* y la ecuación de **t** es : $y = f(x_o)$.

Observación 3: los extremos pueden estar en puntos donde no existe la derivada.

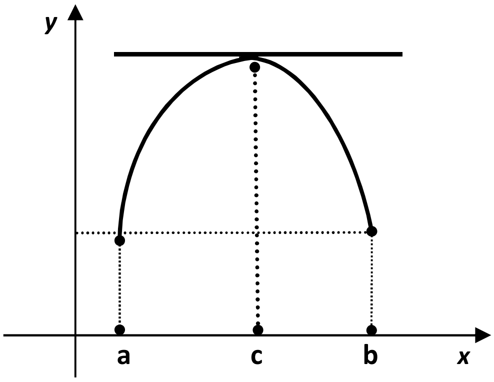
Por ejemplo: $f(x) = |x|$; $f'(0)$ no existe y f tiene un mínimo (abs.) en $x_0 = 0$.



4.1 Teoremas del Valor Medio del Cálculo Diferencial

Las funciones continuas y derivables en un intervalo cerrado y acotado presentan una serie de propiedades que sirven de sustento a varios teoremas del Cálculo Diferencial (e Integral). Al respecto uno de los resultados más importantes del Cálculo Diferencial es el "*teorema del valor medio*" (TVMCD o de "*Lagrange*"). El título de este párrafo hace referencia a *los* teoremas dado que la demostración del TVMCD se basa en un caso particular del mismo, el que se conoce como "*teorema de Rolle*". A su vez, el TVMCD se generaliza en el teorema conocido como "*teorema de Cauchy* ". De allí entonces que se hable de "los" teoremas del valor medio pues en definitiva, y al respecto, hay tres: ***Rolle, Lagrange y Cauchy.***

*Rolle (*1652-1719*) demostró una propiedad de las curvas continuas que era considerada* ´evidente´ *por los matemáticos de la época, tanto que la usaban en sus trabajos sin ninguna duda acerca de su validez. Esta propiedad es la que luego usa Lagrange para demostrar el TVMCD.*
¿Qué era tan evidente para los matemáticos de la época?: que si una curva era continua *y* suave *en [a;b], y* **f***(a)* = **f** *(b), debía existir al menos un punto donde la recta tangente fuera* paralela al eje x *(m_t= 0).*



<u>TEOREMA de ROLLE</u> (teorema 2)

Hip) Sea f definida en [a;b] tal que:
- a) f continua en [a;b]
- b) f derivable en (a;b)
- c) $f(a) = f(b)$;

Tesis) existe $c \in (a;b)$ tal que $f'(c) = 0$

Demostración: consideramos dos casos:

- <u>Caso 1</u>: $\mathbf{f}(x) = \mathbf{k}$; $\forall x \in [a;b]$ → **f** = *función cte; luego,* $\mathbf{f}'(x) = 0$ $\forall x \in (a;b)$; *luego, cualquier* **x**´**s** *puede tomarse como* ***c***.
- <u>Caso 2</u>: **f** ≠ *función cte*

$$f \text{ continua en } [a;b] \overbrace{\Rightarrow}^{\text{T. Wiertrass}} \text{existen } \mathbf{M_a} \text{ y } \mathbf{m_a} \text{ de } f \text{ en } \mathbf{[a;\, b]} \Rightarrow$$

- existe x_1 en **[a; b]** tal que: $\mathbf{M_a} = f(\mathbf{x_1})$
- existe x_2 en **[a; b]** tal que: $\mathbf{m_a} = f(\mathbf{x_2})$

Analizamos si al menos uno de estos puntos cae dentro del intervalo (a;b). Por el ABSURDO, si por ej. , $\mathbf{x_1} = a$ y $\mathbf{x_2} = b$ entonces,

$$M_a = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{f}(a) \overbrace{=}^{\text{hip. (c)}} \mathbf{f}(b) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) = m_a \Rightarrow M_a = m_a = \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{f}(x) = \mathbf{k}\ ;\ \forall \mathbf{x} \in [a;b]$$

(**<u>ABSURDO</u>** pues, por hip**. Caso 2**, **f** *(x)* ≠ **k**).

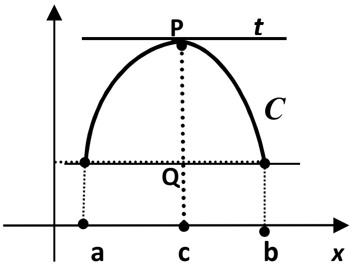
<u>*Conclusión:*</u> $\mathbf{x}_1$ *(ó* $\mathbf{x}_2$*)*, al menos uno, pertenece al **abierto** (a;b).

Supongamos que $\mathbf{x}_1 \in$ (a; b); tenemos entonces que,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a) } [\ f(x_1) = \mathrm{M_a}\ ] \rightarrow f \text{ tiene un extremo en } x_1 \in (a;\, b) \\ \text{(b) } [\ f \text{ derivable en } (a;b)] \rightarrow \quad \text{existe } f'(x_1) \end{array}\right\} \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Teo. } 1} f'(x_1) = 0$$

Luego, hemos hallado c ($c = x_1$) tal que $f'(c) = 0$ **(q.e.d)**

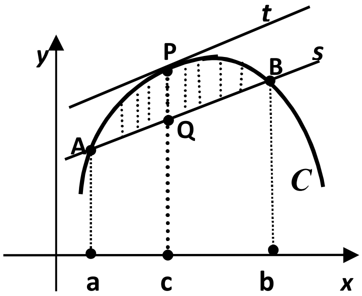
Interpretación geométrica del Teorema de Rolle.



***t* : recta tg. en P** (c*;* **f(c)**) → $m_t = f'(c) = 0$.

O sea, y como dijimos, Rolle demuestra una propiedad ´intuitiva´ hasta aquí: que para toda curva continua y suave existe c *donde t, la recta tangente en P(*c*;* f(c)*), es paralela al eje x .*

Observaciones:



Lagrange expresa esta propiedad de otra forma; logra así ´ampliar´ lo observado por Rolle.
¿Que dice Lagrange?: que para toda curva continua y suave; dada **s**, una ***secante*** cualquiera a la curva, siempre existe **c** tal que **t**, recta tangente a la curva en **P**(**c**; **f(c)**), es ***paralela*** a ***s*** ***(t//s)***.
(Así, Rolle pasa a ser un caso particular de Lagrange, aquél donde ***s*** es paralela al *eje x*).

En cualquiera caso, "**c**" parece estar donde la ***distancia*** entre **P**(x; f(x)) y **Q**(x; s(x)) (sobre la curva ***C*** y la secante ***s***, respectivamente), es ***máxima***.
Esto sugiere un ***camino*** para demostrar lo observado por Lagrange: construir una función "***d***", que evalúe la distancia entre **P** y **Q** al variar ***x*** en [a;b], buscar luego el máximo de esta función y ver si allí está el punto buscado.

Por definición de distancia entre puntos: $\mathbf{d} = \mathbf{d}\,(\mathbf{P};\mathbf{Q}) = |f(x) - s(x)|$:

* como el signo de ***d*** no afecta la resolución del problema, para simplificar tomamos:

$$d(x) = f(x) - s(x).$$

* hallamos la ecuación de ***s*** , recta que pasa por **A**(a; f(a)) y **B**(b; f(b))

$$s(x) = f(a) + m_s\,(x - a), \text{ con } m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

* reemplazamos, y obtenemos finalmente la ***función auxiliar d***:

$$d(x) = f(x) - s(x) \;\Rightarrow\; \boxed{d(x) \;=\; f(x) - f(a) - m_s\,(x - a).}$$

TEOREMA del VALOR MEDIO ó de LAGRANGE (TVMCD-teorema 3)

Hip.) Sea ***f*** definida en [a;b] tal que:
- a) ***f*** continua en [a;b]
- b) ***f*** derivable en (a;b)

Tesis) existe $c \in (a;b)$ tal que, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

➯ En términos geométricos: ***c*** tal que, $\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_s$ con **t:** recta tg en **P(*c*;*f*(*c*))**

Demostración: (teniendo en cuenta lo analizado en la página anterior)

Para demostrar este teorma nos apoyamos en la ***función auxiliar d(x) = f(x) – s(x)*** y replanteamos la tesis en términos de dicha función:

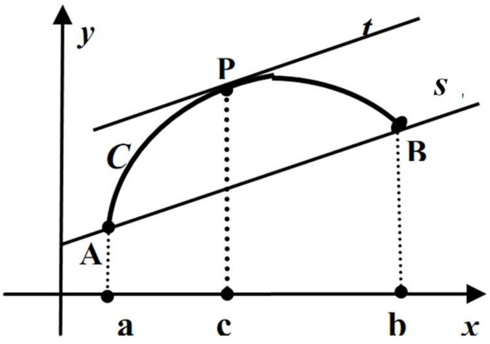
"existe ***c*** ∈ (a;b) tal que ***d*** tiene un ***extremo en c*** ".

Por el Teorema 1, esto último se puede probar mostrando que,

“existe $\boldsymbol{c} \in (a;b)$ tal que $\boldsymbol{d'(c) = 0}$ ”.

La ecuación $\boldsymbol{d'(c) = 0}$ no se puede resolver algebraicamente; así, para resolver esta ecuación debemos acudir a resultados teóricos; en este caso, al ***teorema de Rolle***.

Analizar un teorema requiere evaluar que se cumplan las hipótesis del mismo. Luego, procedemos a analizar si $\boldsymbol{d(x) = f(x) - s(x)}$ cumple ***las hipótesis de Rolle***:



$$s(x) = f(a) + m_s\,(x - a), \text{ con } m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow d(x) = f(x) - s(x)$$

$$\Rightarrow d(x) = f(x) - f(a) + m_s\,(x - a)$$

a) $d\,(x) = f(x) - s(x) \;\Rightarrow\; d$ es *resta de continuas* en [a;b] $\Rightarrow$ d continua en [a;b]

b) $d\,(x) = f(x) - s(x) \;\Rightarrow\; d$ es *resta de derivables* en (a;b) $\Rightarrow$ d derivable en (a;b)

c) ¿ d(a) = d(b)?: ***SI***

$$d(x) = f(x) - f(a) - m_s\,(x - a)$$

$$\left.\begin{array}{l} d(a) = f(a) - f(a) - m_s\,(a - a) = 0 \\ d(b) = f(b) - f(a) - m_s\,(b - a) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0 \end{array}\right\} d\,(a) = d\,(b)$$

Conclusión: ***d** cumple las hipótesis de Rolle, luego cumple la tesis; o sea,*
“existe $\boldsymbol{c} \in (a;b)$ tal que $\boldsymbol{d'(c) = 0}$ ” (I) .

$$d\,(x) = f(x) - f(a) - m_s\,(x - a)$$

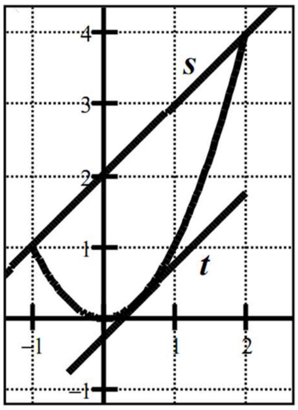
$$d'(x) = f'(x) - m_s$$

$$\left.\begin{array}{l} d'(c) = f'(c) - m_s \\ \text{(I) } d'(c) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c) - m_s = 0 \;\Rightarrow\; f'(c) = m_s$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ (q.e.d)}$$

NOTA: probamos también que existe $\boldsymbol{c} \in (a;b)$ tal que $\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_s \Rightarrow$ tal que **t // s**.

Ejemplo 1: dada $f(x) = x^2$; Df = [-1; 2] hallar **c** $\in$(-1; 2) tal que **t // s**.



$f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$

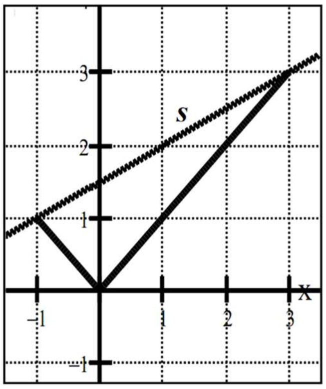
¿c? / $c \in (-1; 2)$ y $\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_s$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2\,c = \frac{f(2) - f(-1)}{2 + 1}$$

$$2\,c = \frac{4 - 1}{3} \;\Rightarrow\; 2\,c = 1 \;\Rightarrow\; c = ½$$

Ejemplo 2 *:* dada $f(x) = |\,x\,|$; Df = [-1; 2] hallar $c \in(-1; 2)$ tal que **t** // **s**.



$$f\,'(x) = \begin{cases} -1 & ; \ (-1; 0] \\ 1 & ; \ (0; 2) \end{cases}$$

¿c? / $c \in(-1; 2)$ y $\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_s$

- $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f(2)-f(-1)}{2+1} = \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{1}{3}$
- $f'(x) \neq \frac{1}{3}$; $\forall$ x $\in$ (-1; 2)

Conclusión: no existe $c \in(-1; 2)$ / $\mathbf{m}_t = \mathbf{m}_s$

¿Contradice esto el TVMCD? : no, pues en este caso ***f*** no es derivable en cero; o sea, ***f*** no cumple una de las hipótesis, por lo que no tiene porqué cumplir la tesis.

Ejemplo 3*:* (Interpretación física del TVMCD)

El TVMCD aplicado a una $x = f\,(t)$, función de posición de una partícula que se desplaza con movimiento rectilíneo, dice que existe al menos un instante donde velocidad instantánea y velocidad media, *coinciden*.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad [x = f\,(t) \rightarrow v = x'(t) = f'(t)]$$

$$v\,(c) = v_m[\mathrm{a,b}]$$

Hallar ***c*** del TVMCD para **x** = $\sqrt{t}$, t$\in$[0; 100]; [x] = cm ; [t] = seg

$x = f(\,t\,) \rightarrow \ v = f\,'(\,t\,) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ (velocidad instantánea); $v_m = \dfrac{f(100)-f(0)}{100-0} = 0{,}1$

$v\,(c) = \ v_m$ [0; 100] $\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{c}} = \mathbf{0{,}1} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{c = 25}$ (seg.) [v. inst. = v.media = 0,1 cm/seg] .

TEOREMA de CAUCHY (teorema 4)

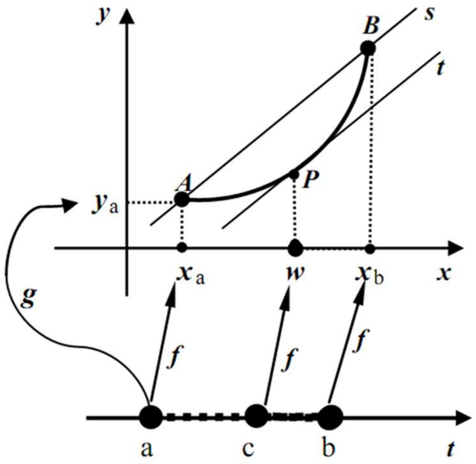
Hip.) Sean ***f*** y ***g*** definidas en [a;b] tal que:
  a) ***f*** y ***g*** continuas en [a;b]
  b) ***f*** y ***g*** derivables en (a;b) ; $f'(\,t\,) \neq 0$, $\forall\, t \in$ (a; b).

Tesis) existe $c \in$ (a;b) tal que, $\dfrac{g'(c)}{f'(c)} = \dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$

Si ***f*** y ***g*** se piensan como las funciones que definen una curva dada en forma paramétrica, el teorema de Cauchy dice, en esencia, lo mismo que el de Lagrange: que existe un punto de la curva ***C*** donde la recta tangente es paralela a la secante.

O sea, Cauchy es la versión de Lagrange para *C* dada por **ecuaciones paramétricas**:

$$C:\begin{cases} x=f(t)\,;\quad t\in[a;b]\\ y=g(t)\,;\quad t\in[a;b]\end{cases}$$



$$t=a\left\{\begin{array}{l} x_a=f(a)\\ y_a=g(a)\end{array}\right\}\ A\,(x_a;y_a)$$

$$t=b\left\{\begin{array}{l} x_b=f(b)\\ y_b=g(b)\end{array}\right\}\ B\,(x_b;y_b)$$

Vimos en la práctica que bajo ciertas condiciones la ley de la función que define ***C***, se puede expresar con fórmula **$y=\varphi(x)$** con **$\varphi=g\circ f^{-1}$**; **Dom φ = Im f** = $[x_a;\ x_b]$.

Que bajo esas condiciones ($f'(t)\neq 0$) φ resulta derivable y su derivada vale**:**

$$\varphi'(x)=\frac{g'(t)}{f'(t)}\,;\quad t=f^{-1}(x).$$

Luego, si aplicando Lagrange a φ hallamos que existe $w\in[\,x_a;\ x_b]$ tal que,

$$\varphi'(w)=\frac{\varphi(x_b)-\varphi(x_a)}{x_b-x_a}=\frac{g\circ f^{-1}(x_b)-g\circ f^{-1}(x_a)}{x_b-x_a}=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\quad(1)$$

Por otro lado si $c=f^{-1}(w)$ entonces $\varphi'(w)=\dfrac{g'(c)}{f'(c)}$ (2)

De (1) y (2) : $\dfrac{g'(c)}{f'(c)}=\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$ ***(q.e.d.)***

Observación: el teorema de Cauchy se usa, entre otras cosas, para demostrar la ***Regla de L´Hopital*** para el cálculo de límites indeterminados.

4.2 Formas Indeterminadas y Regla de L´Hopital

En capítulos anteriores hemos visto como en el cálculo de límites aparecen *"formas indeterminadas"* ($\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ y otras), las cuales, hasta ahora hemos resuelto mediante manipulaciones algebraicas. Sin embargo no todas las formas indeterminadas se pueden resolver acudiendo al álgebra. Esto resulta particularmente cierto en el caso que se hallan implicadas *funciones trascendentes*, o ambas: *algebraicas y trascendentes* .

Por ejemplo , el límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$ produce la indeterminación $\dfrac{0}{0}$.

Para resolverlo acudiendo a manipulaciones algebraicas podemos distribuir ***x,*** obtener:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}}{x}-\frac{1}{x}\ ,$$ lo que produce la indeterminación $\infty-\infty$.

O sea, nos encontramos ante un caso que "*la indeterminación*" no se puede "*romper*" con sólo manipulaciones algebraicas.

Para resolver este tipo de límites, introducimos un teorema conocido como ***"regla de L´Hopital"*** el cual establece que bajo ciertas condiciones el límite del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se halla determinado por el límite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Este teorema recibe el nombre en honor del matemático francés G. F. De L´Hopital (1661-1704), el cual lo publicó en 1696.

Si bien el teorema es esencialmente uno, se demuestra de distintas formas según sea el tipo de indeterminación de que se ocupa. A continuación enunciamos y damos ejemplos de los distintos casos pero omitimos las demostraciones por estar fuera de los objetivos de este libro.

TEOREMA 5 : **Regla de L´Hopital - Caso $\frac{0}{0}$**

*(***Caso*** $\frac{\infty}{\infty}$ cambiando apropiadamente el dominio de* **f** *y* **g***)*

Hip) a) f y g derivables en (a; b), excepto a lo sumo en $c \in$ [a; b].

b) $g'(x) \neq 0$; $\forall x \in$ (a; b) donde g sea derivable.

c) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ produce la forma indeterminadas $\frac{0}{0}$

d) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \mathbf{L} \ (\mathbf{L} \in \mathbf{R})$

Tesis) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Observaciones:

1) El teorema es válido si todos los límites son *por derecha* (o *por izquierda*).
Esto implica que c puede ser **a** ó **b .**

2) La Regla de L´Hopital también es cierta si x crece (o decrece) sin límites; o sea, si $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$. Por supuesto en este caso se pide f y g derivables en (k ; + ∞) ó (- ∞; - k) con k constante positiva.

3) La Regla es válida si se sustituye L por (+ ∞) ó (- ∞)

4) La Regla de L´Hopital (con todas las variantes indicadas en 1-2-y 3) también se aplica a la ***forma indeterminada*** $\frac{\infty}{\infty}$ en cualquiera de sus posibles formas:

$\frac{+\infty}{+\infty}$; $\frac{+\infty}{-\infty}$; $\frac{-\infty}{+\infty}$; $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Ejemplos forma indeterminada $\frac{0}{0}$ **ó** $\frac{\infty}{\infty}$ **:**

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2.e^{2x}}{1} = 2$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

3) **Aplicación reiterada de la Regla de L´Hopital**:

A veces no basta derivar una vez para eliminar la indeterminación. En este caso vale derivar tantas veces como sea necesario para "romper" la indeterminación.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

<u>Ejemplos de otras formas de indeterminación:</u> **$0.\infty$; ∞^0; 0^0; 1^∞ ; $\infty - \infty$**

Cuando la sustitución directa nos lleve a una de estas formas indeterminadas, el objetivo será reescribir el límite de manera de transformarlo en un **0 / 0** ó **∞ / ∞**

1) Forma indeterminada $0.\infty$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}.\sqrt{x} \underbrace{=}_{0.\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{x}} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}\,e^{x}} = 0$$

NOTA: si reescribir el límite de una forma, por ejemplo **0 / 0 ,** no parece dar frutos, conviene probar con la otra forma (en este caso ∞ / ∞ **) .** Queda como ejercicio reescribir el límite anterior en la forma **0 / 0,** ver que pasa en tal caso

2) Formas indeterminadas ∞^0; 0^0; 1^∞

Estos casos se pueden presentar cuando tenemos el límite de una función de la forma $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Como en el caso de la derivación de este tipo de funciones reescribimos ***h*** acudiendo a las propiedades de una función y su inversa : en este caso, del logaritmo y la exponencial.

$h(x) = e^{\ln h(x)}$ → *prop:* la composición de una función y su inversa da la identidad

$h(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$ → reemplazamos ***h*** por su igual y aplicamos propiedades de log.

Luego, reemplazamos ***h*** por su igual en el límite y resolvemos.

$$\lim_{x\to p} h(x) = \lim_{x\to p} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to p} g(x).\ln f(x)}$$

Luego, y en última instancia, lo que debemos resolver es el $\lim_{x\to p} g(x).\ln f(x)$ **(I)** ; o sea, el límite de un producto de funciones. Se presentan distintas situaciones :

A) Caso ∞^0: **[** $f(x) \to +\infty$; $g(x) \to 0$ **]** → En **(I)** queda el **Caso 0 . (+ ∞)**

B) Caso 0^0 : **[** $f(x) \to 0^+$; $g(x) \to 0$ **]** → En **(I)** queda el **Caso 0 . (- ∞)**

C) Caso 1^∞ : **[** $f(x) \to 1$; $g(x) \to \infty$ **]** → En **(I)** queda el **Caso ∞ . 0**

<u>***Conclusión***</u> en cualquiera de las tres formas de indeterminación indicada, aplicando las propiedades señaladas llegamos al **Caso 0.∞** ; que ya sabemos resolver.

Ej 1) $$\lim_{x\to 0^+} x^{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x.\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x.\ln x} \overset{(*)}{=} e^{0} = 1$$

$$(*)\ \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^{2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Ej 2) $$\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to +\infty} e^{x.\ln(1-(1/x))} = e^{\lim_{x\to +\infty} x.\ln(1-(1/x))} \overset{(*)}{=} e$$

$$(*)\ \lim_{x\to +\infty} x.\ln(1-(1/x)) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1-(1/x))}{1/x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{L'H}{=}} = 1$$

3) Forma indeterminada $\infty - \infty$

Cuando la sustitución directa nos lleva a una indeterminación de la forma $\infty - \infty$ probamos a reescribir la función para obtener una forma a la cual le podamos aplicar la regla de L´Hopital, ya sea directamente o después de transformarla de nuevo a tal efecto.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)\underbrace{=}_{\infty-.\infty}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)-\ln x}{\ln x.(x-1)}\right)\underset{L'H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-(1/x)}{(1/x).(x-1)+\ln x}\right)\underset{a\lg eb.}{\overset{trabajo}{=}}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{(x-1)+x\ \ln x}\right)\underset{L'H}{\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1+x(1/x)+\ln x}\right)\underset{a\lg eb.}{\overset{trabajo}{=}}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2+\ln x}\right)=\frac{1}{2}$$

4) Un límite infinito

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\underset{L'H}{\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

..... y verificamos así que e^x es un ***infinito de orden superior*** a x para $x \rightarrow +\infty$

Observación : hay formas similares o parecidas a las formas indeterminadas que ***no son indeterminadas.*** Para diferenciarlas es muy importante tener bien en claro hacia donde tiende la variable, particularmente cuando la variable crece o decrece ($x \rightarrow +\infty$ ó $x \rightarrow -\infty$).

Algunos ejemplos: $(+\infty+\infty \rightarrow +\infty)$; $(-\infty-\infty \rightarrow -\infty)$; $(\mathbf{0}^{+\infty} \rightarrow \mathbf{0})$; $(\mathbf{0}^{-\infty} \rightarrow +\infty)$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\left[\frac{0}{\infty}\right]}{=}0$ (no es un caso indeterminado, no se aplica L´Hopital)

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (no es un caso indeterminado, no se aplica L´Hopital)

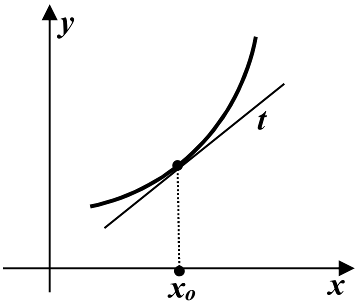
Verificar que si en este caso aplicara L´Hopital obtendría un resultado distinto.

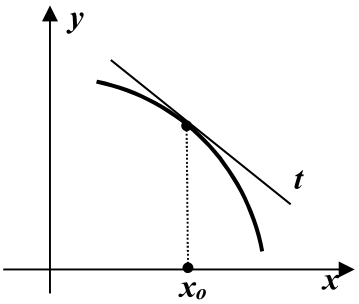
4.3 Aplicaciones de la derivada para el estudio de funciones

Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento de Función

En la búsqueda de criterios para la determinación de intervalos de monotonía de una función vamos a acudir a ciertos resultados de la geometría, en particular al de recta tangente a una curva.

Al respecto vimos que para ***y=f(x)***, ***C*** = graf *f* , si ***f*** es derivable en x_o entonces existe ***t***, recta tg a ***C*** en **P**(x_o; y_o) y $\mathbf{m_t}= f'(x_o)$. Presentamos también un principio básico del cálculo diferencial: **"*toda curva suave, en las proximidades del punto de contacto, puede ser asimilada a su recta tangente* ".** O sea, existe un entorno de x_o donde **C** prácticamente "*se pega*" a **t.**





$\mathbf{m}_t > 0$	**t** estrictamente creciente	$\mathbf{m}_t < 0$	**t** estrictamente decreciente
⇓	⇓	⇓	⇓
$f'(x_o)>0$	**f** estrictamente crec. en E(x_o)	$f'(x_o)<0$	**f** estrictamente decrec. en E(x_o)

Los gráfico anteriores muestran como el signo de $f'(x_o)$ estaría informando acerca del comportamiento de la función (crece o decrece), en el entorno x_o. Si bien este hecho es "*evidente*", para estar seguro que la intuición no nos está jugando una mala pasada, debemos "*demostrar*" esto que descubrimos con el auxilio de la geometría, prescindiendo de gráficos, usando sólo *resultados teóricos previos ya probados*.

A este respecto el TVMCD (Lagrange) permite demostrar con todo rigor lo empíricamente observado: que existe una estrecha relación entre el crec./decrec. de una función en un intervalo y el signo de su derivada en dicho intervalo.

TEOREMA 6

Hip) ***f*** continua en [a;b] y derivable en (a;b),

Tesis) a) $f'(x) > 0$; $\forall x \in (a; b)$ ⇒ ***f*** estrictamente creciente en [a; b].
b) $f'(x) < 0$; $\forall x \in (a; b)$ ⇒ ***f*** estrictamente decreciente en [a; b] ,
c) $f'(x) = 0$; $\forall x \in (a; b)$ ⇒ $f(x) = k$; $\forall x \in [a; b]$

Demostración :

Sean x_1 y x_2 tal que $a \le x_1 < x_2 \le b \Rightarrow [x_1 ; x_2] \subseteq [a; b]$

Luego ***f*** es continua en $[x_1 ; x_2]$ y derivable en $(x_1 ; x_2)$; o sea , *cumple las hipótesis de Lagrange en $[x_1 ; x_2]$* ⇒ existe $\mathbf{c} \in (x_1 ; x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(c).\,(x_2 - x_1)$$

a) $f'(x) > 0$; $\forall x \in (a; b) \Rightarrow f'(c) > 0$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c).\,(x_2 - x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

Tenemos entonces que: $\forall x_1 ; x_2 \in [a;b]$; $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

o sea que, ***f*** es estrictamente creciente en [a;b] . **(q.e.d.)**

b) $f'(x) < 0$; $\forall\, \mathbf{x} \in (a; b) \;\Rightarrow\; f'(c) < 0$

$\Rightarrow\; f(x_2) - f(x_1) = f'(c).\,(x_2 - x_1) < 0 \;\Rightarrow\; f(x_2) < f(x_1)$

Tenemos entonces que: $\forall\, \mathbf{x}_1 ; \mathbf{x}_2 \in [a;b]$; $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

o sea que, **f** es estrictamente decreciente en [a;b] . **(q.e.d.)**

c) $f'(x) = 0$; $\forall\, \mathbf{x} \in (a; b) \;\Rightarrow\; f'(c) = 0$

$\Rightarrow\; f(x_2) - f(x_1) = f'(c).\,(x_2 - x_1) = 0 \;\Rightarrow\; f(x_2) = f(x_1)$

Tenemos entonces que: $\forall\, \mathbf{x}_1 ; \mathbf{x}_2 \in [a;b]$; $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$\forall\, \mathbf{x} \in (a;b]$; $a < \mathbf{x} \Rightarrow f(a) = f(x)$

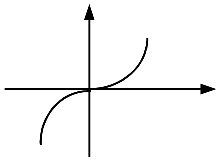
o sea que, $f(x) = k$; $\forall\, \mathbf{x} \in [a; b]$ **(q.e.d.)**

***<u>Observación</u>*:**

Probada la *verdad* de $\mathbf{p \Rightarrow q}$, investigamos la verdad de su recíproca:

- ***<u>directa</u>*:** p ⇒ q **; (a)** **"**$f'(x) > 0$; $\forall\, x \in (a; b) \Rightarrow f$ estrict. crec. en [a; b]"**. (V)**
- ***<u>recíproca</u>***: **¿q ⇒ p*?*** **"*f*** estrict. crec. en [a;b] ⇒ $f'(x) > 0$; $\forall\, x \in (a; b)$ ". **(F)**

<u>Contraejemplo</u>*:* $f(x) = x^3$ *;* f *estrict. crec. en [-2; 2] y* $f'(0) = 0$ *.*



- **<u>directa</u>**:*p ⇒ q* **;** **(c)** *"* $f'(x) = 0$ *;* $\forall \mathbf{x} \in (a; b) \Rightarrow f(x) = \mathbf{k}$; $\forall\, \mathbf{x} \in [a; b]$" ***(V)***
- **<u>recíproca</u>**: *¿ q ⇒p*? *(ejercicio).*

<u>Ejemplo 1</u>: Hallar intervalos de monotonía de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

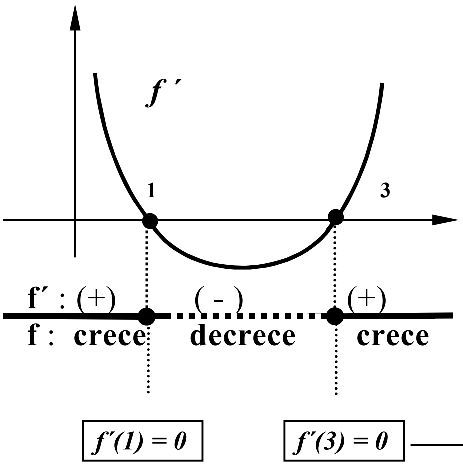
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \;;\qquad Df = R$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) \;;\quad Df' = R$$

TEO 6 → para hallar intervalos de monotonía debemos estudiar el signo de **f ´ :**

o sea , hallar: $\mathbf{A} = \{ x \in R \;/\; f'(x) > 0 \}$ (f ↑)

$\mathbf{B} = \{ x \in R \;/\; f'(x) < 0 \}$ (f ↓)

Las inecuaciones planteadas pueden resolverse por distintos métodos, en este caso, dado que **f′** es conocida (cuadrática) acudimos al ***<u>método gráfico</u>***:



A = (- ∞ ; 1) ∪ (3; +∞)
B = (1 ; 3)

<u>Rta</u>: *f* crece en (- ∞ ; 1) ∪ (3; +∞) ;
f decrece en (1 ; 3)

$x_1 = 1$; $x_2 = 3$: ¿qué pasa en estos ptos?

<u>Observación 1</u> *:* Por Teo 1 y derivados del mismo, sabemos que:

[En lo que sigue; **CN**: condición necesaria; **CS**: condición suficiente]

- f derivable en x_o y $f'(x_o) = 0$ es ***CN*** para que exista un extremo en x_o .
- f derivable en x_o y $f'(x_o) = 0$ no es ***CS*** para que exista un extremo en x_o .
- f no derivable en x_o ; puede (o no) existir extremo en x_o .

En definitiva,

¿en dónde buscamos un punto de extremo?: entre todos los puntos en donde es posible que este exista; o sea, entre todos los **c** tal que f′ (**c**) = 0 ó f′ (**c**) no existe.

¿recordando qué?: que no necesariamente en tales puntos hay extremos de f .

Así, en el **ej. 1**, *<u>si hay extremos</u>* estos necesariamente están en ***$x_1 = 1$*** y/ó ***$x_2 = 3$***; no pueden encontrarse en otro punto del dominio aunque sí puede suceder que en uno de ellos (o los dos) <u>no haya extremo</u>. Luego, debemos buscar métodos para resolver esta cuestión, investigar que otra cosa puede pasar en un punto **c** donde f′ (**c**) = 0 ó f′ (**c**) no exista. A estos puntos tan “críticos” los llamamos: ***puntos críticos***.

<u>Definición</u>: **Punto crítico**

Llamamos punto crítico a todo punto **c** del dominio de **f** tal que:
f ′ (c) = 0 ó *f ′ (c)* no existe.
PC = { **c** ∈ D*f* / ***c punto crítico de f*** }
PC = { **c** ∈ D*f* / *f ′ (c)* = 0 ; no existe *f′(c)* }

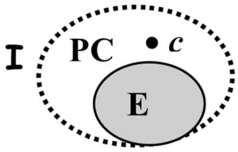
<u>Observación 2</u>: (relación entre puntos de extremo y puntos críticos).

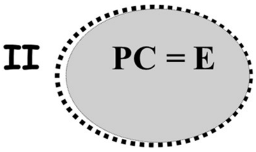
Sea **E** = { $\mathbf{x_0}$ ∈ Df / ***en x_o hay un extremo de f*** } .

- **E ⊆ PC .**

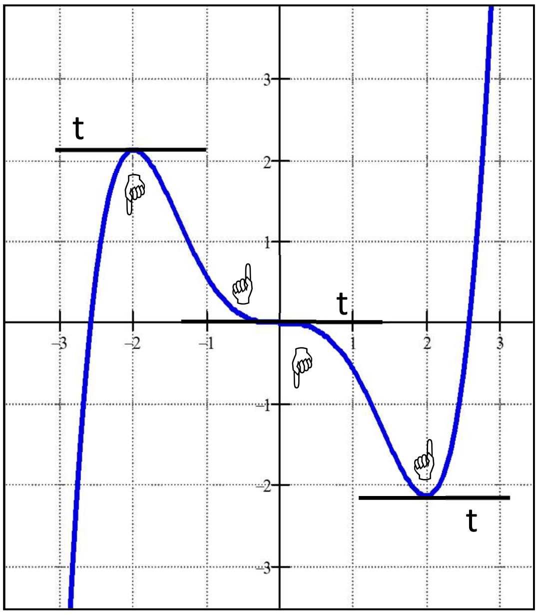
x_0 ∈ E →
→ *f* derivable en x_o ⇒ (teo 1) $f'(x_o) = 0$ ⇒ x_o ∈ **PC**
→ no existe $f'(x_o)$ ⇒ x_o ∈ **PC**
→ **x_0 ∈ PC**

Tenemos así dos situaciones posibles:





➢ ¿ Puede darse **I ;** o sea **E** $\subset$ **PC ?** Sí, y vemos esto en el siguiente ejemplo;



"leyendo del gráfico" vemos que:
f es derivable en todos sus puntos,
$f'(-2) = 0$; $f'(0) = 0$; $f'(2) = 0$

➥ **PC = { -2 ; 0 ; 2 }** .
También del gráfico leemos que en
-2 hay un M_r y en **2** un m_r;

➥ **E = { -2 ; 2 }** .
En un entorno de **c = 0 ,** observamos que:
☝: **-1< x< 0 →** ***graf f*** "por arriba" de **t** 👇: **0< x <1** **→** ***graf f*** "por debajo"de ***t***

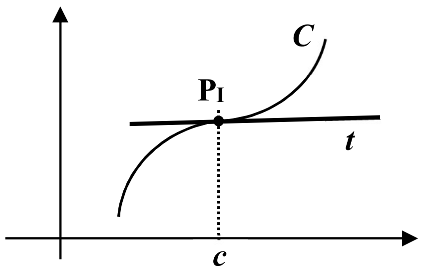
o sea, que no se dan las condiciones gráficas para la existencia de extremo: ***graf f*** <u>toda</u> por debajo (o por arriba) de **t ,** recta tg en el pto.

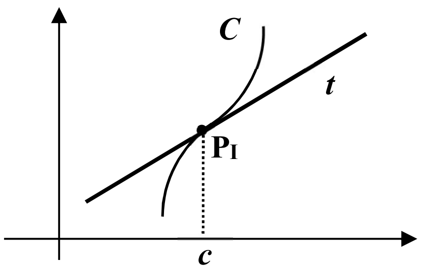
<u>Conclusión</u>: pueden existir puntos críticos donde no haya extremos relativos.

Observamos que en un punto de este tipo, si existe recta tangente, esta aparece ´atravesando´ el gráfico de la función. Esta situación se repite cada vez que tenemos un punto crítico que no es extremo; luego, es algo que caracteriza a estos puntos, permite por lo tanto "**definir**" estos puntos, los que llamamos: **puntos de inflexión.**

<u>Definición</u> (geométrica): **Punto de Inflexión, P_I**

Dado **P (c; f (c))**, un punto de **C =** ***graf f***, decimos que **P** es un punto de inflexión si de existir recta tangente a **C** en **P**, la misma "atraviesa" la curva (es decir, parte de **C** queda "por arriba" de **t** y parte "por debajo", produciéndose el cambio justo en **P**).





P_I → $m_t = 0$ →	**t** *paralela* al eje x.
⇓	
$f'(c) = 0$ →	***c* : *punto crítico*** **f** estrict. crec. en E (*c*) ⇓
x∈E*(*c*); **f´**(x)>0	**P_I (*c*; f (*c*))** ***pto de inflexión*** ***a tg horizontal***

P_I → $m_t > 0$ →	**t** ***no paralela*** al eje x.
⇓	
$f'(c) > 0$ →	***c* : *no es punto crítico*** **f** estrict. crec. en E (*c*) ⇓
x∈E*(*c*); **f´**(x)>0	**P_I (*c*; f (*c*))** ***pto de inflexión*** ***a tg oblicua***

Observación 3: *concluimos entonces que:*

c punto crítico *y* f′(*c*)= *0* — entonces en *c* puede haber →
- Mr : máximo relativo, ó
- mr : mínimo relativo , ó
- P_I : punto de inflexión a tg horizontal

**** Continuación ej. 1* :** **f (x) = x^3 - 6 x^2 + 9 x + 1** *; analizamos si hay extremos*

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3); \quad Df' = \mathbf{R}$$

$$PC = \{ x \in Df \ / \ f'(x) = 0 \} = \{ 1 ; 3 \}$$

$x_1 = 1$ →
- Mr ?
- mr ?
- P_I ?

$x_2 = 3$ →
- Mr ?
- mr ?
- P_I ?

En este punto no tenemos herramientas analíticas para resolver este problema; pero como tenemos mucha información sobre *f*, si la organizamos de modo apropiado podemos graficar *f*, resolver el problema ´leyendo del gráfico´.

A los efectos de graficar *f*, nos organizamos de la siguiente forma:

1) listamos toda la información relativa a dominio, límites, continuidad, etc ; es decir, todas las características de la función que podemos obtener sin acudir a la derivada.

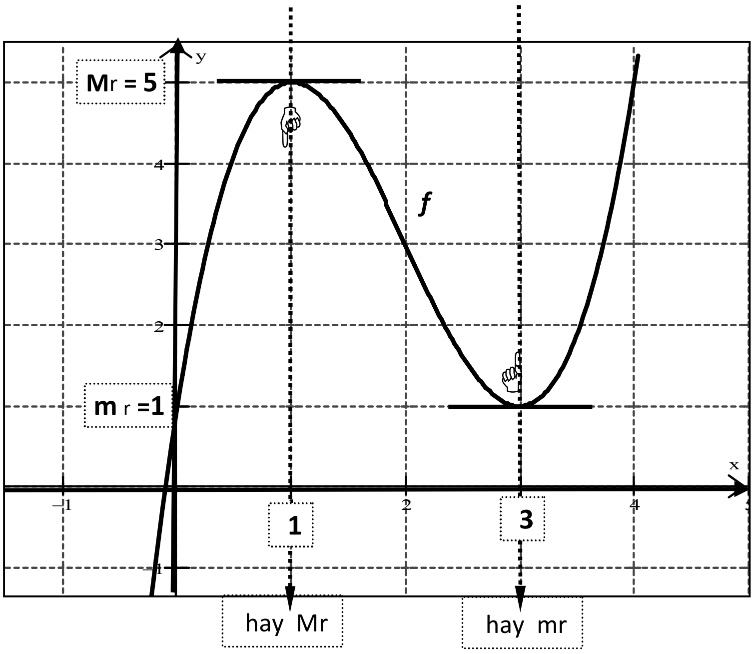
- ***f (x) = x^3 - 6 x^2 + 9 x + 1.*** (polinomio)
  - a) D*f* = **R**
  - b) Dominio continuidad = **R** (→ no hay saltos ni agujeros en el ***graf pol.***).
  - c) Dominio derivabilidad = **R** (→ no hay ptos angulosos en el ***graf pol.***).
  - d) *ceros de f*: ***f (x) = 0*** (difíciles de determinar, los dejamos para luego).
  - e) *simetrías: f no es par ni impar* (→ *f* tiene potencias pares e impares).
  - f) *asíntotas*: no hay (→ los polinomios no tienen asíntotas)
  - g) *acotación:* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; luego,

    f no es *acotada superior ni inferiormente.*

2) el resto de la información la organizamos en un "cuadro de situación" como se muestra a continuación. Este cuadro facilita el procesamiento y articulación de la información que brinda la derivada; por ende, la obtención del **graf f .**

- ***f′(x) = 3 x^2 - 12 x + 9 = 3 (x -1) (x - 3)***

	x <1	***1***	*1< x <3*	***3***	*3 < x*
f(x)		5		1	
f′(x)	(+)	0	(-)	0	(+)
f→	***crece***	***¿ ?***	***decrece***	***¿ ?***	***crece***



Finalmente concluimos que; en $x_1 = 1$ hay un máximo relativo (**Mr = 5**) y que,
en $x_2 = 3$ hay un mínimo relativo (**m** r =*1*).

Observamos también que *la derivada cambia de signo* al pasar por $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$; o sea, por los puntos donde la función presenta *extremos relativos*. Esto sugiere un camino para la determinación de extremos, el que probamos en el siguiente teorema:

TEOREMA 7 – Criterio de la derivada 1ra para la determinación de extremos (relat.)

Sea f continua en [a;b]**;** f derivable en (a;b) excepto a lo sumo en **c** $\in$ (a;b), con **c** un punto crítico de f; entonces:

a) $f'(x) > 0$; $\forall x \in$ (a; **c**)
$f'(x) < 0$; $\forall x \in$ (**c**; b) $\Rightarrow$ en **c** hay un **Mr** de f

b) $f'(x) < 0$; $\forall x \in$ (a; **c**)
$f'(x) > 0$; $\forall x \in$ (**c**; b) $\Rightarrow$ en **c** hay un **m**r de f

Demostración :

a) $f'(x) > 0$; $\forall x \in$(a;**c**) $\overset{\textit{Teo}\ 6}{\overbrace{\Rightarrow}}$ f estrict. crec. en [a; **c**] ; o sea, $x <$ **c** $\Rightarrow$ f(x)< f(**c**) .

$f'(x) < 0$; $\forall x \in$(**c**;b) $\overset{\textit{Teo}\ 6}{\overbrace{\Rightarrow}}$ f estrict. decrec. en [**c**;b] ; o sea, **c**$< x$ $\Rightarrow$ f(**c**) > f(x) .
o sea; $\forall$ x $\in$ (a;**c**) $\cup$ (**c**; b) es f(x) < f(**c**) $\Rightarrow$ en **c** hay un **Mr** de f**.** **(q.e.d.)**

b) idem (ejercicio)

Observación 1 : el Teo. 7 puede aplicarse aún en el caso que no exista $f'(c)$, de allí la potencia del criterio de la derivada 1ra.
Observación 2 : con el Teo. 7 queda entonces demostrado que los puntos donde hay extremos se encuentran donde la ***derivada 1ra cambia de signo***.
COROLARIO TEO. *7* : los ***puntos de inflexión*** a tg horizontal, si existen, se encuentran en los puntos críticos donde la ***derivada 1ra NO cambia de signo.***

- ***Pasos para la búsqueda de extremos relativos***

(1º) Hallar f'.

(2º) Hallar los puntos críticos de f.

(3º) Aplicar el "***criterio de la derivada 1ra***" (Teo. 7) y el **corolario** del Teo. 7

Aplicar este criterio requiere estudiar el **signo de f ´** .
Existen distintas formas de realizar este estudio, y cual de ellas conviene usar depende de la función en estudio, su forma o características particulares.
Luego, lo aconsejable es conocer los distintos métodos existentes para el caso.

- **Análisis del signo de una función.**

Dada $y = g(x)$, existen 3 métodos a los que podemos acudir para hallar el ***sg g(x)***.

(I) ***Gráfico***, consiste en graficar ***g***; resolver luego ´leyendo´ del gráfico.

(II) ***Algebraico***, consiste en proponer $g(x)>0$ ó $g(x)<0$, resolver luego, y según las reglas del álgebra, las inecuaciones que quedan planteadas.

(III) ***Numérico***: ó "***método del punto de prueba***".

Este método se basa en una propiedad de las funciones continuas conocida como "Invariancia del Signo " (ver #) y consiste en 3 pasos siguientes:

(1º) subdividir el dominio de **g** en subintervalos **I** , tal que **g** sea continua en **I** y $\mathbf{g(x) \neq 0}$, $\forall \mathbf{x \in I}$.

(2º) elegir un punto de prueba (**x***) en cada **I** obtenido en (1º), calcular **g (x*).**

(3º) **concluir**: $sg\ g(x) = sg\ g(x^*)$, $\forall x \in \mathbf{I}$; o sea:

- $g(x^*) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$.
- $g(x^*) < 0 \Rightarrow g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$.

(#) ***"Invariancia del signo"***

***g continua en* I**
$g(x) \neq 0$; $\forall x \in \mathbf{I}$

$\Rightarrow$

***g no cambia de signo en* I** ; *o sea*:
a) ***existe*** $x^* \in \mathbf{I}$ / $g(x^*) > 0 \Rightarrow g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$
b) ***existe*** $x^* \in \mathbf{I}$ / $g(x^*) < 0 \Rightarrow g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$

Demostración: (demostramos por el ABSURDO)

a) dada $x^* \in \mathbf{I}$ / $g(x^*) > 0$ suponemos existe $x \in \mathbf{I}$ / $g(x) < 0$.
Luego, por Bolzano, existe $\mathbf{c} \in \mathbf{I}$ tal que $\mathbf{g(c) = 0}$ (**ABS**, contradice hip.).
Si al suponer que existe $x \in \mathbf{I}$ / $g(x) < 0$ llegamos a un absurdo esto implica que tal x no puede existir; o sea que, $\forall x \in \mathbf{I}$, $g(x) > 0$. **(q.e.d.)**

b) idem (ejercicio).

Ejemplo 2: Dada $f(x) = x^4 - 8x^2$; hallar extremos relativos de f. Graficar f.

Para resolver este problema procedemos a:

1) hacer un listado de las características generales de $\mathbf{f(x) = x^4 - 8x^2}$:

a) Df = **R** (***f*****:** polinomio)
b) Dominio continuidad = **R** (→ no hay saltos ni agujeros en el ***graf f***).
c) Dominio derivabilidad = **R** (→ no hay ptos angulosos en el ***graf f***).
d) ceros de f: $f(x) = x^4 - 8x^2 = x^2(x^2 - 8) = 0 \iff x = 0 ; -\sqrt{8} ; \sqrt{8}$
e) simetrías: f es par $\Rightarrow$ **graf f** simétrico respecto del eje y.
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ no es acotada superiormente.

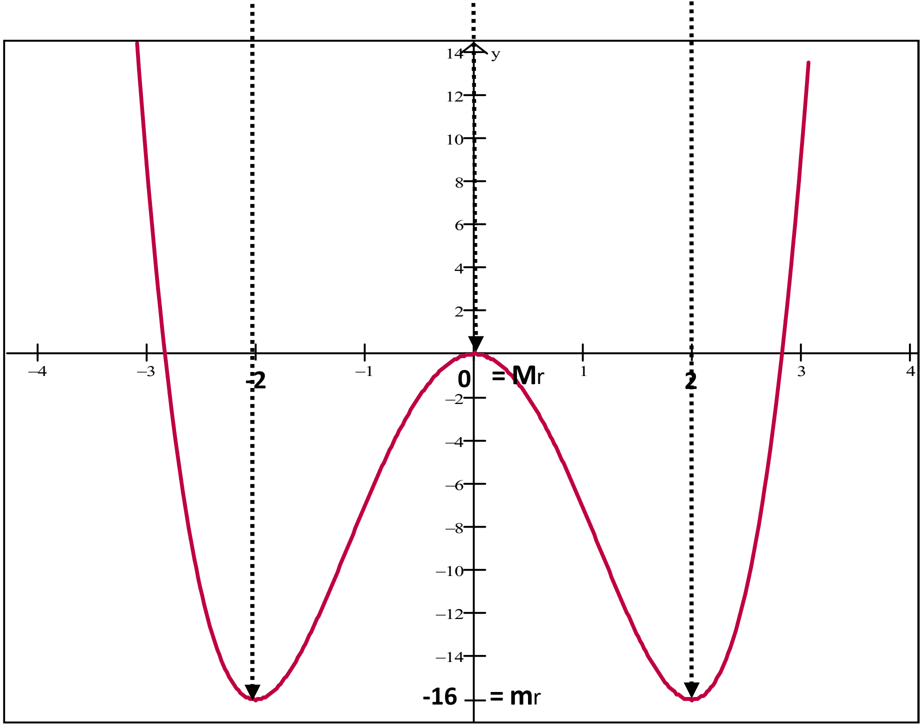
2) Para hallar los extremos relativos seguimos los pasos indicados en pag. 282:

(1°) hallamos $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$
(2°) hallamos ptos críticos: f derivable en **R** $\Rightarrow$

$$\mathbf{PC} = \{ x \in \mathrm{D}_f \,/\, f'(x) = \mathbf{0} \} = \{ -2 ; 0 ; 2 \}$$

(3°) estudiamos signo de f' . Aquí conviene el "método del punto de prueba". Organizamos la información en un cuadro de situación; concluimos con Teo.7

	x < - 2	**-2**	-2<x <0	**0**	0<x <2	**2**	2 < x
f(x)		**-16**		0		**-16**	
f´(x)	**(-)**	**0**	**(+)**	**0**	**(-)**		**(+)**
***f* →**	↘	**mr**	↗	**Mr**	↘	**m r**	↗



Conclusión: $f(x) = x^4 - 8x^2$ presenta extremos relativos en -2 ; 0 ; 2 :

- **Mr =** $\boldsymbol{f(0) = 0}$
- **m r** $\boldsymbol{= f(-2) = f(2) = -16}$.

Leyendo del gráfico concluimos que: $\mathbf{m_r = -16 = m_a}$ (***mínimo absoluto***); que f es acotada inferiormente e **Im*f* =[-16; + ∞].**

Ejemplo 3: Dada $f(x) = \dfrac{x^2-27}{x-6}$; hallar extremos relativos de *f*. Graficar *f*.

1) Procedemos a listar las características generales de $f(x) = \dfrac{x^2-27}{x-6}$:

a) D*f* = **R** – { 6 }
b) Dominio continuidad = **R** – { 6 } (→ el ***graf f*** hay un **salto** en $x = 6$).
c) Dominio derivabilidad = **R** – { 6 } (*f* discontinua en $x = 6$) .
d) ceros de *f*: $f(x) = x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{27}$; $\sqrt{27}$
e) simetrías: *f* no es par ni impar ⇒ ***graf f*** no presenta simetrías.
f) asíntotas: $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ **a**$_{\text{vert}}$: $x = 6$.
g) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ *f* no es acotada.

2) Extremos relativos, intervalos de monotonía.

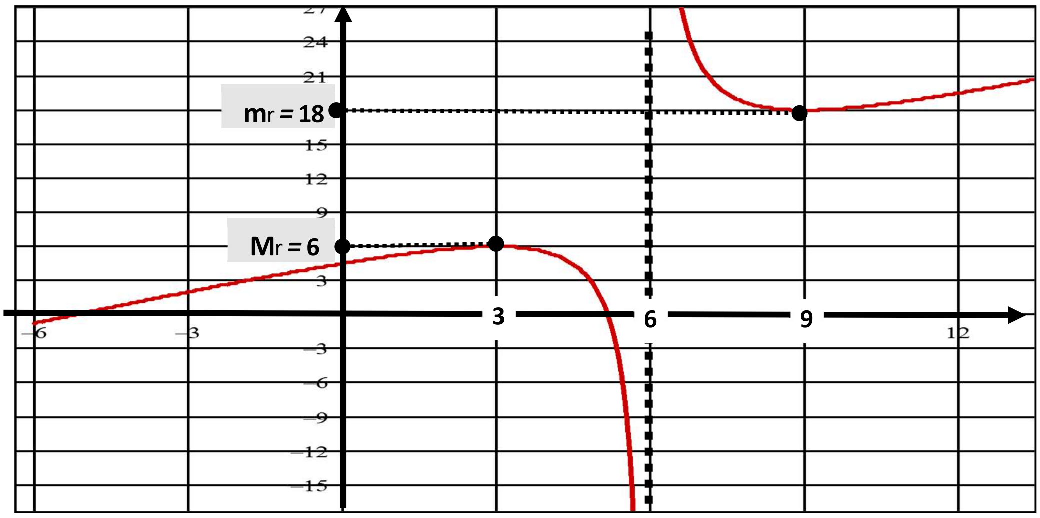
(1º) hallamos $f'(x) = \dfrac{x^2-12x+27}{(x-6)^2} = \dfrac{(x-3).(x-9)}{(x-6)^2}$

(2º) ptos críticos: **PC** = $\{ x \in D_f \,/\, f'(x) = 0 \vee \nexists f'(x) \}$ = **{ 3 ; 9}**

(3º) Signo de *f´* por el "método del punto de prueba".

(Si bien *x* = 6 no es punto crítico, se lo incluye en la tabla por no pertenecer al dominio de *f*).

	x < 3	**3**	*3<x < 6*	**6**	*6< x <9*	**9**	*9 < x*
f (x)		6		∄		18	
f ´(x)	**(+)**	**0**	**(-)**	∄	**(-)**		**(+)**
f **→**	↗	**Mr**	↘	**a**$_v$	↘	**m** r	↗



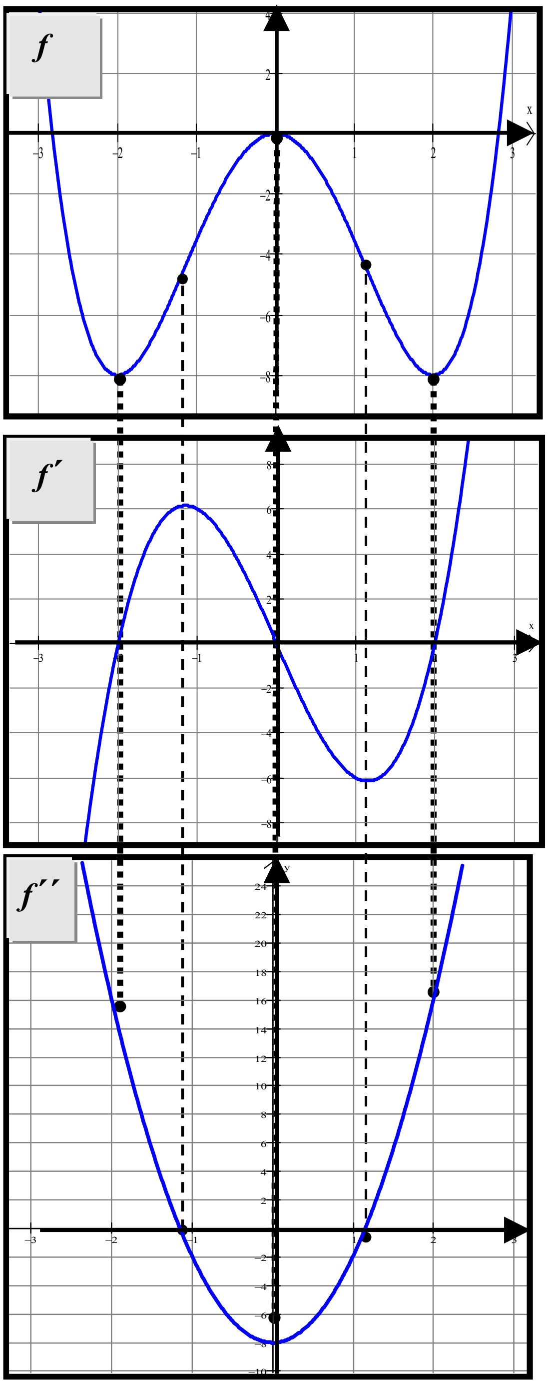
Conclusión: **f (x)** = $\dfrac{x^2-27}{x-6}$ presenta extremos relativos en 3; 9:

- **M**r = ***f (3)*** **= 6**
- **m** r = ***f (9)*** **= 18.**

Estos resultados pueden parecer ´*contradictorios*´, *¿el máximo menor que el mínimo?* No olvidemos que son extremos ´*relativos*´, que las correspondientes desigualdades se verifican en un entorno del punto. Además, en este caso, ´*separando*´ ambos puntos de extremo hay una asíntota vertical ***x* = 6** .

Observamos también que *f* no es acotada ; que **Im*f* = (- ∞; 6] ∪ [18 ; +∞].**

APLICACIONES DE LA DERIVADA SEGUNDA



Los gráficos adjuntos corresponden a una función ***f*** y dos derivadas: ***f´*** y ***f´´***.

En ellos verificamos resultados, "vemos" otros.

Por ejemplo:

- verificamos que en ***x*** = **-2; 0; 2** (extremos relativos) → $f'(x) = 0$.
- detectamos que en ***x*** = **-2; 2** (mínimos relativos) → $f''(x) > 0$ y en **x = 0** (máximo relativo) → $f''(x) < 0$.
- también observamos que los ***x´s*** tal que $f''(x) = 0$, se corresponden con puntos donde ***f´*** presenta **extremos**, los cuales a su vez señalan puntos del ***graf. f*** donde la *´curvatura´* de la curva, *´cambia´*.

O sea, pareciera que los ***x´s*** donde $f''(x) = 0$ señalan ***puntos de inflexión a tg ´oblicua´***, los cuales todavía no sabemos como detectar.

Lo observado nos indica que ***f´´(x)***, su valor o signo, también estaría dando información sobre el ***graf. f***.

Luego, en lo que sigue nos ocupamos de analizar la derivada 2^{da}; comprobar si lo observado para este ejemplo es una propiedad que vale para todas las curvas continuas y derivables.

TEOREMA 8 – Criterio de la derivada 2^{da} para la determinación de extremos (relat.)

Sea **c** un punto crítico de f y f dos veces derivable en c; entonces:

a) $f''(c) > 0 \Rightarrow$ en **c** hay un **mr** de f ***(Mínimo relativo)***

b) $f''(c) < 0 \Rightarrow$ en **c** hay un **M**r de f ***(Máximo relativo)***

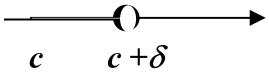
c) $f''(c) = 0 \Rightarrow$ ***el criterio no decide.***

Demostración:
Primero observamos que f dos veces derivable en c implica existen $f'(c)$, $f''(c)$; luego , c es un punto crítico de f donde existe la derivada $\Rightarrow$ $f'(c) = 0$.

a) $f''(c) > 0 \Rightarrow f''(c) = (f')'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}$

O sea ; $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} = f''(c) > 0$; luego, por *Teor. conservación del signo*,

existe un entorno de c donde $\frac{f'(x)}{x - c} > 0$; $\forall$ x $\in$ E*(c; δ).



Entonces:

- $c - \delta < x < c \Rightarrow x - c < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$
- $c < x < c + \delta \Rightarrow x - c > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Teo.7(a) $\Rightarrow$ ***en c hay mínimo relativo***
(q.e.d)

b) idem (ejercicio)

c) • $f(x) = x^3$; $f'(0) = f''(0) = 0$ → en $c = 0$ ***hay punto de inflexión***
• $f(x) = x^4$; $f'(0) = f''(0) = 0$ → en $c = 0$ ***hay mínimo relativo.***

O sea, para $f'(c) = f''(c) = 0$, en c pueden darse distintas situaciones, las que dependen de la función del caso; de allí que el criterio de la derivada 2^{da}, en este caso, no proporciona información alguna acerca de lo que pasa en ***c.***

Ejemplo 4: Hallar extremos de $f(x) = x^3 + 3/2\, x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 + 3/2\, x^2 - 6\, x + 3$
$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$
$f''(x) = 6x + 3$

PC	c 1=-2	c2 = 1
f	13	- ½
f'	0	0
f''	-9< 0	9>0

$\boxed{\text{Mr} = 13}$ $\boxed{\text{mr} = -\tfrac{1}{2}}$

El criterio de la derivada 2da se puede generalizar, tenemos así el:

Criterio de la derivada enésima para la determinación de extremos (relativos)

Sea **c** tal que:

$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \dots\dots\dots\dots = f^{(n-1)}(c) = 0$

$f^{(n)}(c) \neq 0$

$\Downarrow$

A) ***n par*** $\Rightarrow$ en **c** hay un extremo relativo

- $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow$ en **c** hay ***mínimo relativo***, $m_r = f(c)$
- $f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow$ en **c** hay ***máximo relativo***, $Mr = f(c)$

B) ***n impar*** $\Rightarrow$ en **c** hay un punto de inflexión a tg. horizontal, $P_I(c\,;f(c))$

Ejemplo 5: Hallar extremos de $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 = x^3\,(3x^2 - 5)$$

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2\,(x^2 - 1)$$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

PC	**$c_1 = -1$**	**$c_2 = 0$**	**$c_3 = 1$**
f	**2**	**0**	**-2**
f'	**0**	**0**	**0**
f''	**-30 < 0**	**0**	**30 > 0**

PC = { $x \in D_f$ / $f'(x) = 0$ } = { -1 ; 0 ; 1 }

$\boxed{Mr = 2}$ $\boxed{¿..?}$ $\boxed{mr = -2}$

- ***¿c = 0?***: si solo buscamos extremos, acudimos al ***criterio de la derivada enésima:***

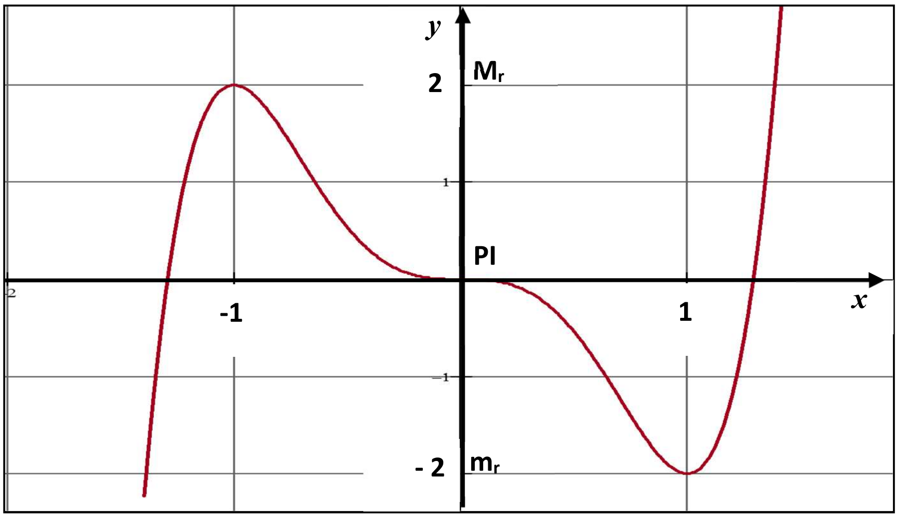
  $f'''(x) = 180x^2 - 30 \rightarrow f'''(0) = -30 < 0 \rightarrow$ en $c = 0$ hay ***pto inflexión;*** **$P_I(0\,;0)$**

- ¿c = 0 ?: si deseamos graficar f, acudimos al ***criterio de la derivada 1ra.***

  Estudiamos signo de f'. Aquí conviene el "*método del punto de prueba*".

  Organizamos los datos en un cuadro de situación; concluimos con Teo.7 y corolario

	x < - 1	**-1**	*-1<x <0*	**0**	*0<x <1*	**1**	*1 < x*
f (x)		**2**		0		**-2**	
f´(x)	(+)	**0**	(-)	**0**	(-)	**0**	(+)
f →	↗	**M_r**	↘	**P_I**	↘	**m_r**	↗

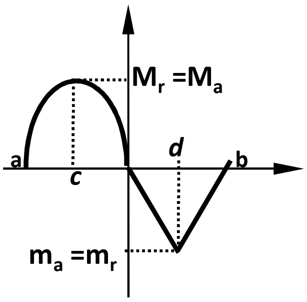
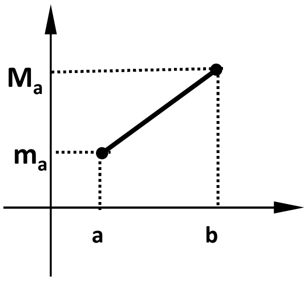


4.4 Cálculo de Extremos *Absolutos*

La existencia y determinación de ´*extremos absolutos*´ de una función ***f*** depende tanto de la ley de la función como del dominio de la misma. Si **D** = ***dom f*** tenemos al respecto dos situaciones bien diferenciadas:

(I) ***f*** discontinua en **D** y/ó **D** ≠ **[a; b].**
En este caso son muchas las situaciones que se pueden presentar: desde que no haya extremos absolutos, hasta que existan ambos, máximo y mínimo.
Que existan o no estos extremos, depende de la existencia de ***límites infinitos***.

(II) ***f*** continua en **D**; **D = [a; b].**
En este caso, el teorema de Weiertrass, asegura la existencia de máximo y mínimo absoluto de ***f*** en **[a; b] ;** y podemos establecer algunas pautas para su búsqueda ya que tenemos un número finito de casos posibles.

Los Extr$_s$. Ab$_s$. coinciden con los extr$_s$. relativos	Los Ext$_s$. Ab$_s$. están en los extr$_s$ del intervalo.
	

Nota: Observar que los extremos relativos pueden darse en $x=c$, donde $f'(c)=0$ o bien en $x=d$, donde ∄ $f'(d)$.

Ejemplo 6:

Hallar extremos absolutos de: $f(x) = x^3 + 3/2\,x^2 - 6\,x + 3$ con **D** f = **[-3; 3].**

$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$

PC = { x / $f'(x) = 0$; **-3** ; **3** } = { **-2** ; **1** ; **-3** ; **3** }

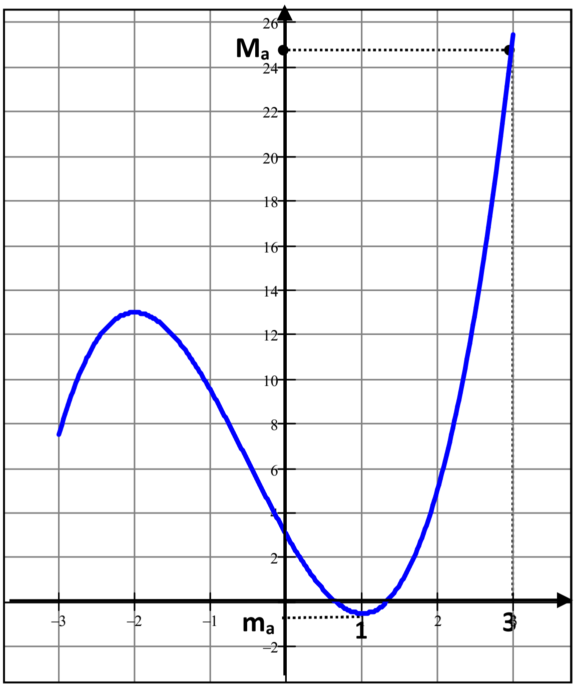
Máximo y mínimo absoluto existen y los puntos donde se producen se encuentran en el **PC**. Así, para hallarlos, basta calcular la función en todos los puntos del **PC** y luego, por simple inspección reconocer máximo y mínimo absoluto.

f (-2) = 13

f (1) = - ½ → mín. absoluto

f (-3) = 7,5

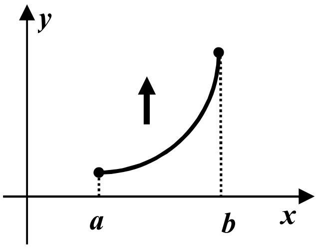
f (3) = 25,5 → máx. absoluto

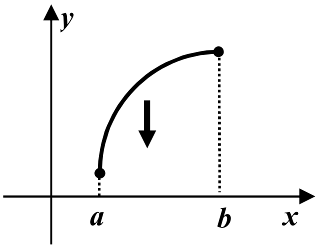


➪ APLICACIONES DE LA DERIVADA 2da:

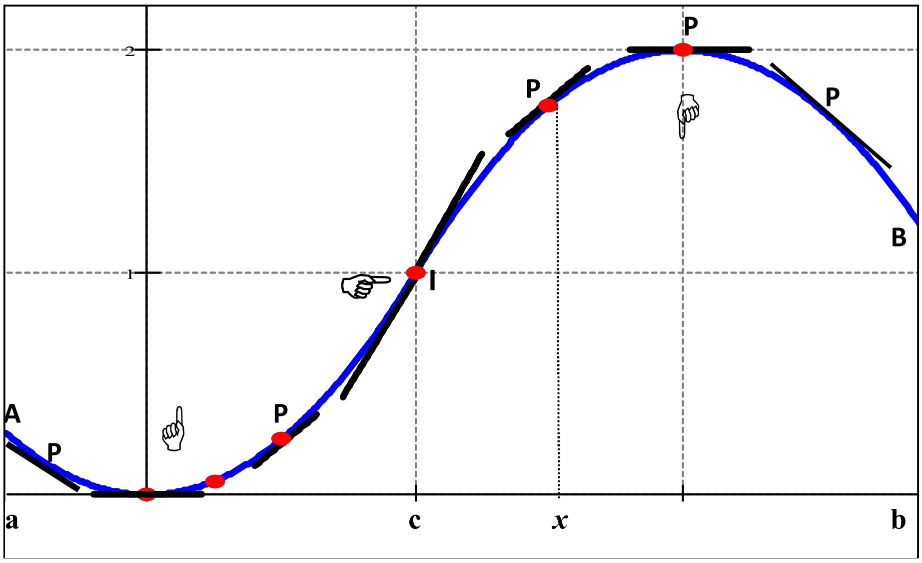
Concavidad y Convexidad . Puntos de inflexión a tangente oblicua.

Detectado que una función (no lineal) crece estrictamente en un intervalo [a; b] queda todavía una cuestión por resolver: ¿cómo unimos los puntos extremos de la curva?; ¿con la curvatura "hacia arriba" o, "hacia abajo" ?.





En lo que sigue nos ocupamos de esta cuestión. Hacemos esto a partir del análisis de la figura que se propone a continuación.



cóncava hacia arriba (cóncava) ***cóncava hacia abajo (convexa)***

Seguimos el movimiento de un punto **P** sobre la curva grafico de una función derivable, observamos que hace la recta tangente a medida que **P** se desplaza.

- Mientras **P** se mueve de **A** hacia **I**, la curva permanece por encima de la recta tg. En este caso decimos que la curva es ´***cóncava hacia arriba***´ (ó *cóncava*) en [a; c].

- Mientras **P** se mueve de **I** hacia **B**, la curva permanece por debajo de la recta tg. En este caso decimos que la curva es ´***cóncava hacia abajo***´ (ó *convexa*) en [c; b] .

Observamos también que en **I** la curva cambia de ´*cóncava hacia arriba*´ a ´*cóncava hacia abajo*´; que la recta tangente ´*atraviesa*´ la curva. O sea, vemos que en **I** tenemos un punto de inflexión; podemos ahora definir con más rigor este concepto.

<u>Definición</u>*: *Punto de Inflexión de una curva (C).
P es punto de inflexión de **C** si y sólo si **P** es un punto de **C** donde se produce un cambio de concavidad; es decir, donde **C** pasa de cóncava a convexa o viceversa.

<u>Análisis de la concavidad:</u> (usando el hecho que $\mathbf{m_t} = f'(x)$)

<u>Cóncava hacia arriba</u> → mientras **P** se mueve de **A** hacia **I**, la recta tg gira en el sentido contrario a las agujas del reloj; o sea $\mathbf{m_t}$ **,** las pendientes de las rectas tangentes aumentan a medida que **P** se desplaza de **A** hacia **I**; equivalentemente, ***f´(x)*** crece estrictamente al tomar ***x´s*** crecientes (*hasta* **c**)

<u>Cóncava hacia abajo</u> → mientras **P** se mueve de **I** hacia **B**, la recta tg gira en el sentido de las agujas del reloj; o sea $\mathbf{m_t}$, las pendientes de las rectas tangente disminuyen a medida que **P** se desplaza de **I** hacia **B**; equivalentemente, ***f´(x)*** decrece estrictamente al tomar ***x´s*** crecientes (*a partir de* **c**) .

Estas observaciones sugieren las siguientes definiciones:

Definición: ***Concavidad y Convexidad de una curva C.***

Dada f coninua en [a; b] y derivable en (a; b) decimos que:

- f es ***cóncava hacia arriba*** (cóncava) en [a; b] si f' es estrict. creciente en (a; b).
- f es ***cóncava hacia abajo*** (convexa) en [a; b] si f' es estrict. decreciente en (a; b).

TEOREMA 9 – ***Criterio de la derivada 2da para la determinación de la concavidad.***

Sea f continua en [a; b] y dos veces derivable en (a; b); entonces:

a) $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ ***f cóncava hacia arriba en* [a; b]**

b) $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ ***f cóncava hacia abajo en* [a; b]**

Demostración:

a) $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a; b)$ $\Rightarrow$ (Teo.6) f' estrictamente creciente en [a; b]
$\Rightarrow$ (*def.*) ***f cóncava hacia arriba en* [a; b].** **(q.e.d.)**
b) idem (ejercicio).

Corolario TEO. 9 : los ***puntos de inflexión*** se encuentran en los ptos c del dominio donde la ***derivada 2da cambia de signo.*** (exista o no la $f''(c)$)

Observación: el teo.9 señala que si **c** es un punto del dominio donde cambia la concavidad entonces f'', en ese punto, pasa de *positiva* a *negativa* (o viceversa). Luego, si *existiera la derivada 2da en* ***c***, es razonable suponer que valga ´cero´.

TEOREMA 10

Si **P(*c*; *f*(*c*))** es un punto de inflexión del ***graf f*** y existe $f''(c)$ entonces, $f''(c) = 0$.

Demostración: sea $g(x) = f'(x)$; $g'(x) = f''(x)$.

P(c; f(c)) pto de inflexión $\Rightarrow$ f'' cambia de signo en **c** $\Rightarrow$ g' cambia de signo en **c**
$\Rightarrow$ (Corol. Teo 7) g tiene un extremo en **c** $\Rightarrow$ (Teo.1) $g'(c) = 0$ $\Rightarrow$ $f''(c) = 0$.

Observación: $f''(c) = 0 \rightarrow$ condición necesaria *pero no suficiente* para que existe pto inflexión. **Ej.** : $f(x) = x^4$; $f'(0) = f''(0) = 0$ y en $c = 0$ no hay pto inflexión.

Corolario TEO. 10 : $f''(c) = 0$ *y* **la derivada 2da de f,** ***cambia de signo en c*** entonces **P(*c*; *f*(*c*))** es un ***punto de inflexión*** .

- ***Pasos para la búsqueda de puntos de inflexión a tg. oblicua***

  (1º) Hallar f''.

  (2º) Hallar los **ceros** de f''.

  (3º) Aplicar el "***corolario Teo 10***" .
  Aplicar este corolario requiere estudiar el ***signo de*** f''.

Ejemplo 7: Hallar extremos de $f(x) = x^4 - 6x^2$

$f(x) = x^4 - 6x^2 = x^2\ (x^2 - 6)$

$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x\ (x^2 - 3)$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12\ (x^2 - 1)$

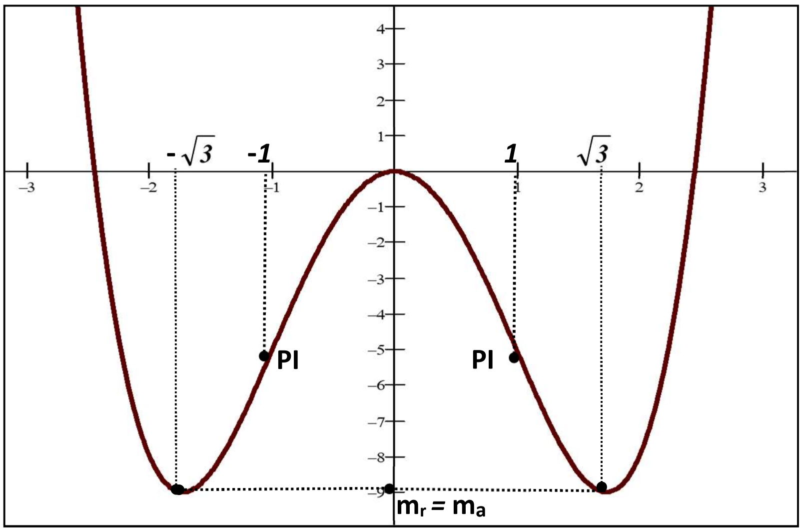
PC	$c_1 = -\sqrt{3}$	$c_2 = 0$	$c_3 = \sqrt{3}$
f	-9	0	-9
f'	0	0	0
f''	24 > 0	-12< 0	24 > 0
	$\boxed{m_r = -9}$	$\boxed{M_r = 0}$	$\boxed{m_r = -9}$

PC= { x ∈ D$_f$ **/ f ´(x) = 0} = {** $-\sqrt{3}$ **; 0;** $\sqrt{3}$ **}**

PI$_{\text{(posibles)}}$ **= { (*x*,f(*x*)) / f´´(x) = 0 } = { (-1,f(-1)) ; (1,f(1)) }**

Estudiamos signo de f'' por el "*método del punto de prueba*".
Organizamos los datos en un *cuadro de situación*; concluimos con Teo.10 y corolario.

	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
$f(x)$		-5		-5	
$f''(x)$	(+)	0	(-)	0	(+)
$f \rightarrow$	∪	P_I	∩	P_I	∪



Ejemplo 8: Hacer el estudio completo y graficar f para $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

$f(x) = 5\ x^{2/3} - x^{5/3} = x^{2/3}\ [5 - x]$; $\mathbf{D}f = \mathbf{R}$

$f'(x) = \frac{5}{3}\ x^{2/3}\ [2x^{-1} - 1]$; $\mathbf{D}f' = \mathbf{R} - \{0\}$

$f''(x) = -\frac{10}{9}\ x^{-1/3}\ [x^{-1} + 1]$; $\mathbf{D}f'' = \mathbf{R} - \{0\}$

I) Procedemos a listar las características generales de $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$:

a) D*f* = **R**
b) Dominio continuidad = **R** (→ el ***graff*** no presenta saltos ni agujeros).
c) Dominio derivabilidad = **R** – { 0} (→ el ***graff*** presenta un pto anguloso) .
d) *ceros de* ***f***: $f(x) = x^{2/3}\ [5 - x] = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ;\ 5$.
e) *simetrías:* ***f*** no es par ni impar ⇒ ***graff*** no presenta simetrías.
f) *asíntotas*: no hay.
g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ⇒ *f no es acotada;*
⇒ *f no tiene extremos absolutos.*

II) Extremos relativos, ptos de inflexión a tg. horizontal, intervalos de monotonía.

(1º) $f\,'(x) = \frac{5}{3}\, x^{2/3}\,[2\,x^{-1} - 1\,]$

(2º) ptos críticos: $\mathbf{PC} = \{\, x \in D_f \,/\, f'(x\,) = 0 \vee \nexists\ f'(x\,)\,\} = \{2\ ;\ 0\}$

(3º) Signo de f' por el "método del punto de prueba".

Organizamos los datos en un cuadro de situación; acudimos Teo.7 y corolario.

	$x < 0$	**0**	$0<x<2$	**2**	$2< x$
$f\,(x)$		**0**		**4,8**	
$f'(x)$	**(-)**	$\nexists$	**(+)**	**0**	**(-)**
f →	↘	***mr***	↗	***Mr***	↘

III) Concavidad, puntos de inflexión a tg, oblicua. intervalos de monotonía.

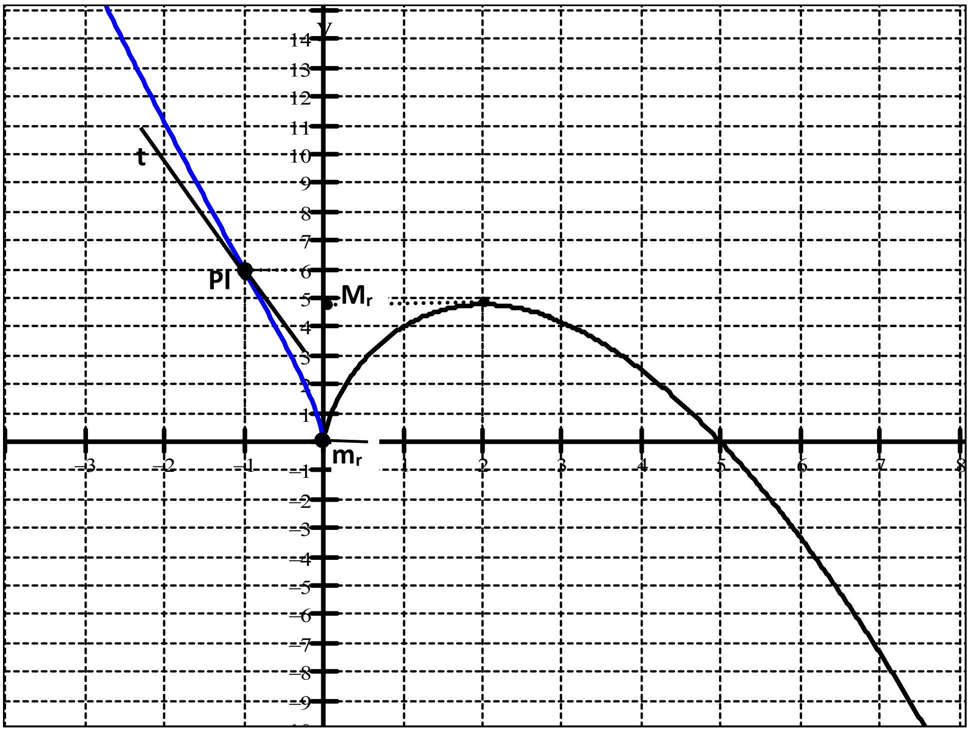
(1º) $f\,''(x) = \frac{5}{3}\, x^{-1/3}\,[\,x^{-1} + 1\,]$

(2º) $\mathbf{PI}_{\mathbf{(posibles)}} = \{\ (x,f(x))\ /f\,''(x\,) = 0 \vee \nexists\ f\,''(x\,)\} = \{(0;f(0));\ (-1;f(-1))\}$

(3º) Signo de **f´´** por el "método del punto de prueba".

Organizamos los datos en un cuadro de situación; acudimos Teo.9 y corolario.

	$x < -1$	**-1**	$0<x<2$	**0**	$2< x$
$f\,(x)$		**6**		**0**	
$f'(x)$		**-5**		$\nexists$	
$f''(x)$	**(+)**	**0**	**(-)**	$\nexists$	**(-)**
f →	∪	**PI**	∩	**pto ang.**	∩



Ejemplo 9: Hacer el estudio completo y graficar f para $f(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{-x^2+x+2}{(x-1)^2} \quad ; \; Df = R - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{x-5}{(x-1)^3} \quad ; \; Df' = R - \{1\}$$

$$f''(x) = \frac{2\,(7-x)}{(x-1)^4} \quad ; \; Df'' = R - \{1\}$$

I) Procedemos a listar las características generales de $f(x) = \dfrac{-x^2+x+2}{(x-1)^2}$:

a) Df = **R** – { 1}

b) Dominio continuidad = **R**– {1} (→ el ***graf f*** presenta un salto en $x = 1$).

c) Dominio derivabilidad = **R** – {1} (f discontinua en $x = 1$) .

d) ceros de f: $-x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \; ; \; 2$.

e) simetrías: f no es par ni impar ⇒ ***graf f*** no presenta simetrías.

f) asíntotas: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty \Rightarrow$ (asínt. vert.) **x = 1 ;**

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \mathbf{-1} \Rightarrow$ (asínt. horizontal) **y = - 1 .**

g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty \Rightarrow$ <u>f no es acotada superiormente</u>.

II) Extremos relativos, ptos de inflexión a tg. horizontal, intervalos de monotonía.

(1º) $\mathbf{f'(x)} = \dfrac{x-5}{(x-1)^3}$

(2º) ptos críticos: $\mathbf{PC = \{ x \in D_f \,/\, f'(x) = 0 \ \vee\ \nexists\, f'(x) \} = \{5\}}$

(3º) Signo de **f´** por el "método del punto de prueba".
Organizamos los datos en un cuadro de situación; acudimos Teo.7 y corolario.
(Si bien x = 1 no es punto crítico, se lo incluye en la tabla por no pertenecer al dominio de f)

	x < 1	**1**	*1<x < 5*	**5**	*5< x*
f (x)		∄		$-\frac{9}{8}$	
f´(x)	(+)	∄	**(-)**	**0**	(+)
f →	↗	**a_V**	↘	**mr**	↗

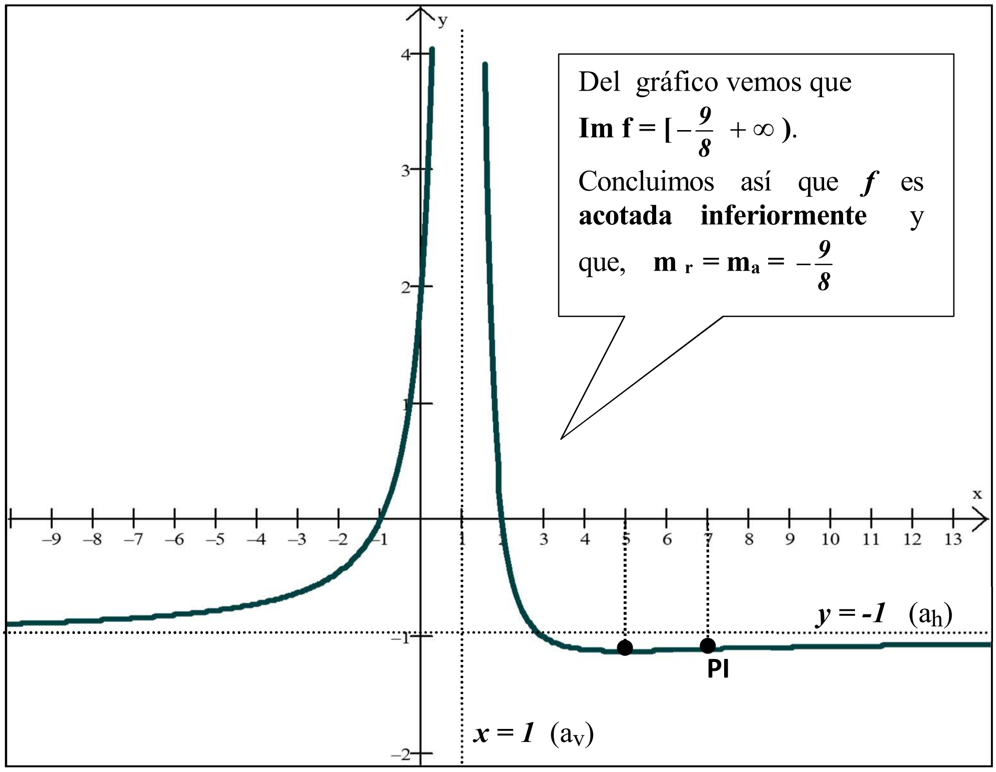
III) Concavidad, puntos de inflexión a tg, oblicua. intervalos de monotonía.

(1º) $f''(x) = \dfrac{2\,(7-x)}{(x-1)^4}$

(2º) $\mathbf{PI_{(posibles)}} = \{ (x,\mathbf{f}(x)) \,/\, f''(x) = 0 \ \vee\ \nexists\, f''(x) \} = =\{(7;f(7)\}$

(3º) Signo de *f´´* por el "método del punto de prueba".
Organizamos los datos en un cuadro de situación; acudimos Teo.9 y corolario.
(Si bien x = 1 no es punto crítico, se lo incluye en la tabla por no pertenecer al dominio de f)

	x < 1	**1**	*1< x < 7*	**7**	*7< x*
f (x)		∄		$-\frac{10}{9}$	
f´(x)	(+)	∄			(+)
f´´(x)	**(+)**	∄	**(+)**	**0**	**(-)**
f →	∪	**a_V**	∪	**P_I**	∩



Del gráfico vemos que
Im f = [$-\frac{9}{8}$ **+ ∞).**
Concluimos así que *f* es **acotada inferiormente** y que, $\mathbf{m_r = m_a} = -\frac{9}{8}$

Parte 2 - Aplicaciones de la derivada a la “aproximación” de funciones

4.5 Aproximación del Δy, incremento de la variable dependiente

- Sea: $y = f(x)$; $x_o \in D_f$; f derivable en x_o ; $\Delta x = x - x_o$ con $x \in E(x_o)$
- A cada Δx corresponde un Δy, con $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$
- Nos preguntamos: *¿ existen otras formas de estimar el valor de Δy ?.*
  En lo que sigue nos ocupamos de dar respuesta a este interrogante.

$$f \text{ derivable en } x_o \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o)$$

$$\overset{\textit{Teo. de escritura fuera del límite}}{\overbrace{\Rightarrow}} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_o) + \rho(\Delta x)\,; \qquad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to o} \rho(\Delta x) = 0$$

$$\overset{\text{despejando } \Delta y}{\overbrace{\Rightarrow}} \quad \Delta y = f'(x_o)\,\Delta x + \underbrace{\rho(\Delta x).\Delta x}_{\varepsilon(\Delta x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta y = f'(x_o)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)} \qquad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} f'(x_o).\Delta x = 0$$

Conclusión: Δy se puede ´*descomponer*´ en suma de ´*dos infinitésimos*´ para $\Delta x \to 0$

Luego, y en la búsqueda de una *aproximación para* Δy, nos preguntamos cual de los infinitésimos del segundo término aproxima *mejor* a Δy. Dicho de otra forma, cual de ellos, de ser despreciado, introduce el *menor error*. Para resolver esta cuestión procedemos a *"comparar los infinitésimos"*.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x)}{f'(x_o).\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho(\Delta x).\Delta x}{f'(x_o).\Delta x} = 0 \rightarrow$$

ε es un infinitésimo de orden superior a $f'(x_o)\,\Delta x$; o sea, ´***despreciable***´ frente a $f'(x_o)\,\Delta x$

Concluimos así que:

$$\Delta y = \underbrace{f'(x_o)\,\Delta x}_{\textbf{\textit{parte principal del incremento}}} + \varepsilon(\Delta x) \longrightarrow \textbf{\textit{despreciable}}$$

O sea, que $f'(x_o)\,\Delta x$ es una ´*buena*´ aproximación de Δy

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x_o).\,\Delta x}$$

4.6 Diferencial de una función

Dado que el producto $f'(x_o).\Delta x$ constituye la *parte principal del incremento de la función*; se conviene en darle un nombre y se lo llama "***diferencial de f***".

DEFINICIÓN 1: ***diferencial de una función*** **dy ó df**

Dada $y = f(x)$, derivable en x_o, llamamos "***diferencial de f***" al producto de $f'(x_o)$ por un incremento arbitrario de la v.i. (Δx).

$$\boxed{dy = f'(x_o).\,\Delta x}$$

Observaciones:

1) La definición de diferencial proporciona otra forma de representar el incremento de una función y, por ende, de dar una aproximación del mismo.

$$\boxed{\Delta y = f'(x_o)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x)} \longrightarrow \boxed{\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)}$$

$$\boxed{\Delta y \approx f'(x_o).\,\Delta x} \longrightarrow \boxed{\Delta y \approx dy}$$

(el diferencial de una función da una *aproximación* del incremento de la misma).

2) La parte que se desprecia, $\varepsilon(\Delta x)$, constituye el "error" producido al aproximar.

3) Tanto Δy como dy son infinitésimos para $\Delta x \to 0$. Comparando:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_o).\Delta x}=\frac{1}{f'(x_o)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{f'(x_o)}.\left[f'(x_o)\right]=1\ ;$$

O sea, Δy y **dy** son <u>infinitésimos equivalentes</u>.
Así, para Δx infinitamente pequeño, **dy** *<u>es una muy buena aproximación de</u>* Δy.
Tanto es así que en el lenguaje vulgar las expresiones "<u>incremento</u>" y "<u>diferencial</u>" (de una función) se usan como sinónimas, aún cuando los correspondientes valores no sean exactamente iguales. Esto no trae aparejado ningún problema en tanto y en cuando no se pierda de vista que "*realmente*" :
"***dy*** es una aproximación de Δy con un ***error infinitesimal***, ε " (*error al fin !!!*)

<u>Ejemplo</u>: $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f'(5) = 75$

Δx	Δy	$dy_{(5)}$	$\lvert\varepsilon\rvert$
3	387	**225**	162
2	218	**150**	68
1	91	**75**	16
0.1	7.651	**7.5**	0.151
0.05	3.788	**3.75**	0.038
0.01	**0.752**	**0.75**	**0.002**

- $dy(5) = f'(5).\Delta x = 75.\,\Delta x$
- $\Delta y = f(5+\Delta x) - f(5)$

$$\Delta y = (5+\Delta x)^3 - (5)^3 \Rightarrow$$

$$\Delta y = \underbrace{75\,\Delta x}_{dy} + \underbrace{15\,\Delta x^2 + \Delta x^3}_{\varepsilon(\Delta x)}$$

0	**0**	**0**	**0**
-1	-61	**-75**	14

NOTA:

Hemos visto que existen distintas notaciones para indicar la derivada en un punto y hemos usado mayormente una de ellas, ***f´(x$_o$)***. Nos ocupamos ahora de otra notación, la de Leibniz: $\frac{dy}{dx}(x_o)$. Hasta aquí esta notación no es más que un ***símbolo*** que, como los otros, representa la derivada de la función en un punto; o sea,

$$\frac{dy}{dx}(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ .$$

☞ En la notación de Leibniz aparece el símbolo ´***dy***´, símbolo al que acabamos de dar un ´nombre´: ***diferencial*** , y un ´significado´: ***f´(x$_o$).Δx***. Debemos entonces controlar que la nueva definición no plantee contradicción alguna al interior del edificio de la matemática; o sea, que si hacemos otra interpretación de los símbolos que usamos para ´*representar*´ la derivada, la nueva interpretación no ´*contradiga*´ la original. A tal fin nos ocupamos primero de explicitar el ´*significado*´ del otro diferencial que aparece en la notación de Leibniz; o sea , del ´***dx***´ (*diferencial de la variable independiente*).

DEFINICIÓN 2: ***diferencial de la v.i. dx***	Dada ***y*** =***f*** (x), llamamos "***diferencial de la variable independiente***" a **Δ*x***; o sea, al incremento de la variable independiente**.** Lo indicamos ***dx***. $\boxed{dx = \Delta x}$

Definido el diferencial de la v.i.; tenemos otra forma de escribir el ***dy*** :

$$dy_{(xo)} = f\,'(x_o).\,\Delta x \quad \rightarrow \quad dy_{(xo)} = f'(x_o).\,dx\ ;$$

Si dividimos por ***dx*** resulta que, $\frac{dy}{dx}_{(xo)} = f\,'(x_o)$; o sea,

$$\frac{dy}{dx}_{(xo)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ ;$$ y comprobamos:

- que la notación de Leibniz para la derivada, $\frac{dy}{dx}_{(xo)}$, y las notaciones para los diferenciales, ***dx*** y ***dy*** , *no presentan contradicción alguna entre sí* ;
- que podemos interpretar el símbolo $\frac{dy}{dx}$ como un "***cociente*** " ; por ende, considerar la derivada misma como "***cociente de diferenciales***".

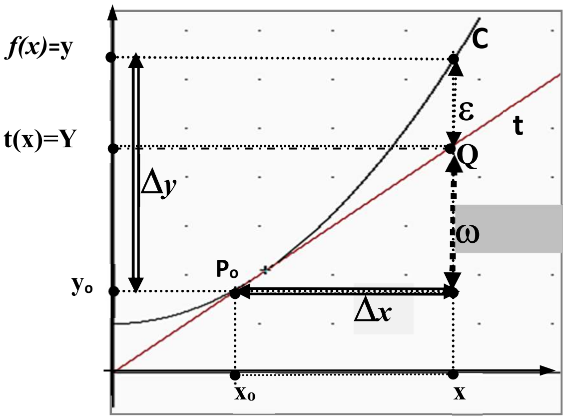
Observación:

Dado que $dy \approx \Delta y$ y $dx = \Delta x$, tenemos que $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$; o sea, que el "***cociente de diferenciales***" ($\frac{dy}{dx}$) y el "***cociente de incrementos***" ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$)

están próximos pero, ***no son iguales***.

4.7 Interpretación geométrica del diferencial:

f derivable en x_o $\Rightarrow$ existe **t,** recta tg. a **C** en **P₀** / **t**) $Y = f'(x_o)\,(x - x_o) + f(x_o)$



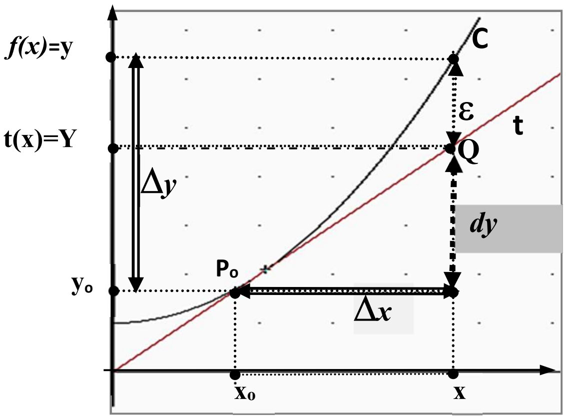
$$\left.\begin{array}{l} m_t = f'(x_o) \\[2ex] m_t = \dfrac{\omega}{\Delta x} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_o) = \frac{\omega}{\Delta x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega = f'(x_o).\,\Delta x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega = dy}$$



» Concluimos que: $dy = \omega$;

» pero $\omega = Y - y_o$.

» Luego $dy = Y - y_o$

dy =(*ordenada* **Q** - *ordenada* **P₀**)

dy = diferencia de ordenadas, entre

$Q(x_o + \Delta x;\ Y)$ sobre **t** , y

$P_o(x_o\ ;\ y_o)$ sobre **C** = ***graf. f***

- Del gráfico vemos que el segmento que representa a Δy puede descomponerse en ´*dos segmentos*´, uno de ellos $\omega = dy$ (primero de los infinitésimos en que se descompone Δy**).** Así, al segmento identificado con ε no le queda otra opción que corresponderse con el segundo infinitésimo; o sea, con $\varepsilon(\Delta x)$. Concluimos así que los dos *sumandos* en que se descompone Δy se corresponden ´*geométricamente*´ con los dos segmentos identificados con "ω" y "ε " .

$$\text{O sea,}\qquad \Delta y = \underbrace{dy}_{} + \underbrace{\varepsilon(\Delta x)}_{} \qquad (\textit{algebraicamente})$$

$$\Delta y = \quad \omega \quad + \quad \varepsilon \qquad (\textit{geométricamente})$$

Y tenemos así una forma de poder apreciar "*gráficamente*" la magnitud del **error** (ε) cometido al aproximar Δy con dy.

Observaciones:

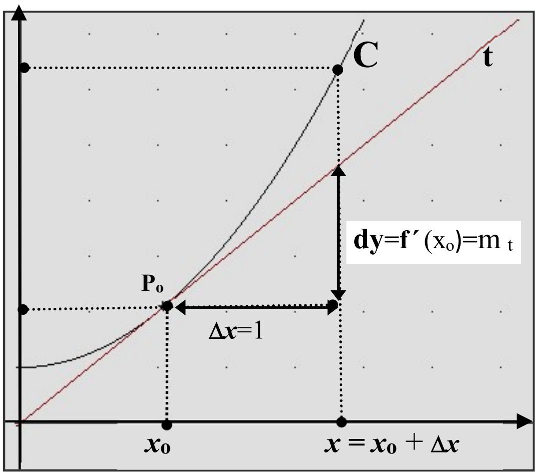
Geométricamente vemos que, para un Δx dado:

* dy indica la cantidad que se ´eleva´ (o cae) **t,** la recta tangente, en un entorno de x_o

*Δy indica la cantidad que se *´eleva´* (o *cae*) **C**, el gráfico de f, en un entorno de x_o.

4.8 La derivada como razón de cambio

La interpretación geométrica del *diferencial de una función* permite una mejor visualización de la noción de *derivada* como razón de cambio.



Según vimos:

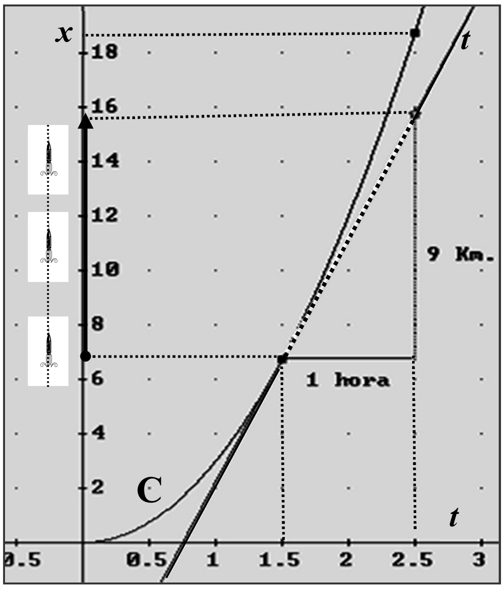
- **d**y representa la cantidad que se eleva (o cae) ***la recta tg*** cuando x se incrementa en Δx; en particular, *el cambio producido en* ***y****,* ***sobre la recta tg****,* *por cada cambio unitario en* ***x****.*

- Por definición: $dy = f´(x_o).\ \Delta x$
  $\Delta x = 1$: $dy = f´(x_o)$

Concluimos entonces que **f´** (x_o) indica el cambio que *se produciría* en ***y*** , por cada cambio unitario en ***x***, *en el caso que* P_o *continuara moviéndose sobre la recta tangente*; dicho de otra forma, si a partir de x_o "***la razón de cambio permaneciera constante e igual a la pendiente de la recta tg en*** P_o" .

Ejemplo:

Sea $x = 3\ t^2$; $[x]$ = Km ; $[t]$ = hs la función posición de un móvil que comienza a moverse. A la hora y media de iniciado el movimiento se produce un cambio en la velocidad y el móvil comienza a desplazarse a *velocidad constante* e igual a la que tenía en ese instante. Si a partir de ese momento se mueve una hora más, ¿cuántos Kms. se desplaza?. Y en total, ¿cuánto se desplaza?



» $x(t) = 3\ t^2 \rightarrow x´(t) = 6\ t$

» Posición a la 1 ½ hora: $x\ (1.5) = 6.75$

» Velocidad a 1 ½ hora: $x´(1.5) = 9$

Según vimos, $x´(1.5)$ es el *cambio* que se produciría en ***x,*** *en una hora*, si a partir de este momento la velocidad permaneciera constante e igual a $x´(1.5)$. Así, si a la 1½ hs. el móvil comienza a ir a velocidad cte e igual a $x´(1.5)$, o sea, a **9** Km/h., en una hora se desplaza **9 km.**

» Posición a 2 ½ hs. de iniciado el movimiento.

$x(1.5) = 6.75$

$x(2.5) = x\ (1.5) + 9 = 15.75$

(*si hubiera seguido sobre **C** → x (2.5) = 18.75)

4.9 Uso del Diferencial

ERRORES: uno de los usos más importantes del "diferencial" es en la estimación de errores, particularmente en la *propagación de errores*.

Ejemplo:
" *Se mide el lado de un cubo y se encuentra que es de 2 cm. Se sabe que la medición se hace con un error de apreciación,* $\varepsilon = \pm\,(0.01)$, *que esto induce un error en el cálculo del volumen de dicho cubo. Se pide hallar el máximo error cometido al calcular el volumen con el valor medido* ".

Como en todo problema procedemos a:

☞ Reconocer, etiquetar y describir variables:

$\boldsymbol{x}$ = lado del cubo (cm); **V**= volumen del cubo (cm^3)

☞ *Explicitar la incógnita*:

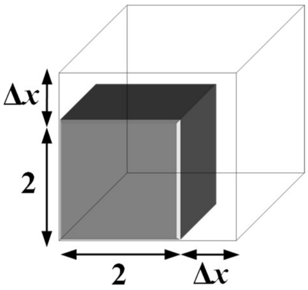
E / **E** = *error máximo al calcular **V** (debido al error de apreciación en **x**)*.

☞ *Explicitar los datos*:

- Por geometría sabemos que: $\mathbf{V} = x^3 \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}(x)$ con $\mathbf{V}(x) = x^3$
- Se informa un *'error de medición'*; luego, $\boldsymbol{x} = 2$ puede *no ser* el verdadero valor del lado. Si llamamos **Δx** al *error producido al medir*, entonces el *valor verdadero* (*v.v.*) del lado es: $\boldsymbol{x} = 2 + \Delta\boldsymbol{x}$.
- Tenemos así que:

$x_0 = 2$ (*valor medido*)

$x = 2 + \Delta x$ (*v. v.*)



Nota: El valor de Δ*x*, *se desconoce*. $\varepsilon_x = \pm(\boldsymbol{0.01})$ informa el valor *máximo (ó mínimo)* que puede tomar este error. O sea; da una ***cota*** del mismo.

- El verdadero valor (*v.v.*) del volumen es el calculado con el *v.v.* del lado; o sea, $\mathbf{V} = \mathbf{V}\,(2+\Delta x)$.

$\mathbf{V_c} = \mathbf{V}(2) = \mathbf{8}$ (*vol. calculado*)

$\mathbf{V_v} = \mathbf{V}(2+\Delta x) = \mathbf{V}(2) + \Delta\mathrm{V}$ (*vol. verdadero*)

→ → ¿cómo calculamos $\mathbf{E_V}$ si no conocemos Δx *?!!*

Este problema lo resolvemos acudiendo al ***diferencial de la función***, pues **dV** ≈ **ΔV** y, mientras sobre el **ΔV** nada podemos hacer, al **dV** si lo podemos trabajar.

☞ <u>Resolvemos</u>**:** $\mathbf{E_V} = |\Delta V| = |V(2+\Delta x) - V(2)|$;

$$\boldsymbol{dV} = \mathbf{V}'(\boldsymbol{x_o}).\Delta \boldsymbol{x} \text{ ;}$$

Calculamos $\mathbf{V}'(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ y procedemos a aproximar el error con el diferencial:

$$\mathbf{E_V} = |\Delta\mathbf{V}| \approx |\boldsymbol{dV}| = |\mathbf{V}'(2).\,\Delta\boldsymbol{x}| = |12\,.\,\Delta\boldsymbol{x}| = 12\,|\Delta\boldsymbol{x}| \overbrace{<}^{|\Delta x|<\, 0.01} 12\,.0.01 = \boldsymbol{0.12}$$

$\mathbf{E_V} = |\Delta\mathbf{V}| < \boldsymbol{0.12}$ $\Rightarrow$ ***<u>error absoluto “máximo”</u>*** que se puede cometer

al calcular **V** con $\boldsymbol{x}_{\text{o}}$ medido con $\varepsilon_x = \pm(\boldsymbol{0.01})$

☞ <u>Conclusión</u>***:*** $\mathbf{E_V} = \pm\ \boldsymbol{0.12}$

<u>Notas</u>:

$|\Delta\mathbf{V}| < \boldsymbol{0.12} \Rightarrow \boldsymbol{-0.12} < \Delta\mathbf{V} < \boldsymbol{0.12}$

O sea ***0.12*** (cm^3) es una ***cota del error*** cometido al calcular **V** con un error en ***x***.

$\mathbf{V_v} = \mathbf{V}(2) \pm \boldsymbol{0.12} \Rightarrow \mathbf{V_v} = \mathbf{8} \pm \boldsymbol{0.12}$ $\boxed{\mathbf{7.88} < \mathbf{V_v} < \mathbf{8.12}}$

⇒

<u>Observaciones</u> :

Si bien $\mathbf{E_a}$**,** el ***error absoluto***, da una idea de cómo se “*propaga”* en el cálculo el error cometido al medir, no permite apreciar la importancia del mismo. Ej: **E**v, ¿será un error de peso o será despreciable en relación al problema que se esta resolviendo?.

El error relativo y el error porcentual proporcionan una mejor idea a este respecto.

⇨ $\mathbf{E_r} = (\text{error relativo}) = \dfrac{\boldsymbol{E_a}}{\boldsymbol{V_c}} = \dfrac{\boldsymbol{0.12}}{\boldsymbol{8}} = 0.015$

⇨ $\mathbf{E}_{\%}$=(error porcentual) = 100. $\mathbf{E}_{\mathbf{r}}$ = 1,5 %. ⇒ $\boxed{\mathbf{E}_{\%} = \boldsymbol{1{,}5\ \%}}$

- ¿cuál hubiera sido la situación si el radio medido hubiera sido de ***5 cm*** ?

$$\mathbf{E_V} = |\Delta\mathbf{V}| \approx |\boldsymbol{dV}| = |\mathbf{V}'(5).\Delta\boldsymbol{x}| = |3.(5)^2\,.\Delta\boldsymbol{x}| = 75\,|\Delta\boldsymbol{x}| \overbrace{<}^{|\Delta x|<\, 0.01} 75.\ 0.01 = \boldsymbol{0.75}$$

O sea: $\mathbf{E_V} = |\Delta V| < \boldsymbol{0.75}$ lo cual implica un $\text{E}_{\text{aV}} = \pm\ \boldsymbol{0.75.}$

Si observamos los errores absolutos, diríamos que para $\boldsymbol{x} = 5$ se comete un error mayor que para $\boldsymbol{x} = 2$; pero , ¿ es realmente así ?.

Consideramos el $\mathbf{E}_{\%}$ para $\boldsymbol{x} = 5$: $\mathbf{E_r} = \dfrac{\boldsymbol{E_a}}{\boldsymbol{V_c}} = \dfrac{\boldsymbol{0.75}}{\boldsymbol{125}} = \boldsymbol{0{,}006} \Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{E}_{\%} = \boldsymbol{0{,}6\ \%}}$

Vemos así que al aumentar el lado el ***<u>error porcentual disminuye</u>***, y esto es lógico ya que mientras las variables toman valores cada vez más grandes ***<u>el error de medición permanece constante</u>***. Así, va perdiendo significatividad (por ejemplo, un $\varepsilon_x = \pm 0.1$ cm. no impacta lo mismo cuando medimos “2cm.” que cuando medimos “50 cm.”).

- Dada $y = f(x)$, para estimar $\mathcal{E}$, *'error absluto'* en el cálculo de y, procedemos a:

  - *Reconocer* que $\mathcal{E} = |v_{verdadero} - v_{calculado}| = |y - y_o| = |\Delta y|$
  - *Aproximar* el incremento de la función por el diferencial de la misma: $\Delta y \approx dy$ **.**
  - *Calcular* el diferencial tomando Δx igual a la *'cota del error'* dada para x:

  $$dy = f'(x_o).\,\Delta x \ _{(máximo)}$$

  - Estimar el Error relativo, E_r al efecto de evaluar la *'significatividad'* del error.

  $$E_r = \frac{\Delta y}{y_o} \approx \frac{dy}{y_o} = \frac{f'(x_o).\Delta x}{f(x_o)} = \frac{f'(x_o)}{f(x_o)}.\Delta x$$

- Así, en el caso del ejemplo visto y para un x_o genérico, tendríamos que:

$$E_r = \frac{\Delta V}{V_o} \approx \frac{dV}{V_o} = \frac{V'(x_o)}{V(x_o)}.\Delta x = \frac{3.\,x_o^2}{x_o^3}.dx = 3\frac{\Delta x}{x_o}$$

Error relativo

Acotando y reemplazando Δx y x_o por los datos del problema tenemos entonces una estimación del error relativo en **V**. Cabe remarcar que la fórmula tal cual quedó brinda información muy valiosa. Ella nos dice que *"el error relativo en el volumen es alrededor de 3 veces el error relativo en el lado".*

En general, para $y = x^n$,

"el error relativo en ***y*** *es alrededor de* ***n** **veces*** *el error relativo en* x".

***Cuidado !!*:** esta regla es válida en el caso de las potencias y *sólo en este caso.*

Por ejemplo, para $y = sen\,x$,

$$E_r = \frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y} = \frac{f'(x_o)}{f(x_o)}.dx = \frac{\cos x_o}{sen\ x_o}.\,dx = tg(x_o).\,dx$$

4.10 Aproximación Lineal

A partir de la expresión obtenida para Δy en párrafos anteriores, vamos ahora a obtener la expresión que vincula la función en un punto incrementado, **f** (x), con la función y su derivada en el punto dato, x_o.

$$\begin{tikzcd} \Delta y = f'(x_o)\,\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \quad \text{con} \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0 \arrow[d, "\longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \Delta y = f(x) - f(x_o) \\ \Delta x = x - x_o \end{array}}"] \\ f(x) - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) + \varepsilon(\Delta x) \quad \text{con} \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0 \end{tikzcd}$$

$$\mathbf{f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o) +} \ \varepsilon(\Delta x) \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$$

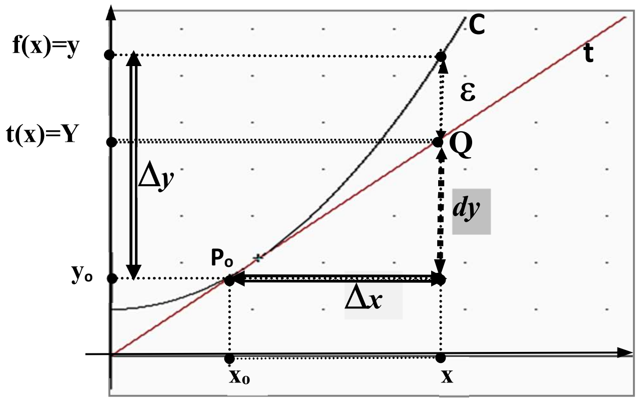
- En esta última expresión, podemos ***despreciar el último sumando***, $\varepsilon\,(\Delta x)$, (infinitésimo para $\Delta x \to 0$); obtener así una ***aproximación*** de **f** (x) en términos de **f** y **f´** en x_o , para todo x en un entorno de x_o.

$$\mathbf{f(x)} \approx \underbrace{\mathbf{f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)}}$$

ecuación de la recta tg. en P*$_o$*.

$$\mathbf{Y} = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)$$

$$\mathbf{f(x)} \approx \mathbf{Y} \longleftrightarrow \boxed{\text{Ordenada de } \mathbf{Q} \in \mathbf{t}}$$



Conclusión : **f** (x) se puede aproximar por **Y,** ordenada del punto **Q** sobre ***t*** correspondiente a $\mathbf{x = x_o} + \Delta x$.

DEFINICIÓN*:** ***Aproximación lineal.	La aproximación de **f** por la recta tangente en $\mathbf{P_o}\,(x_o, y_o)$ se llama ***aproximación lineal*** de **f** en x_o. La ***función lineal*** que determina la recta tangente; o sea, $\mathbf{t(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)}$ decimos que es la ***linealización*** de **f** en x_o.

Finalmente observamos que:

$$\mathbf{f(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x - x_o)} + \varepsilon\,(\Delta x) \;/\; \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon\,(\Delta x) = 0$$

$$\mathbf{f(x) = t(x)} + \varepsilon\,(\Delta x) \;/\; \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon\,(\Delta x) = 0$$

$$\mathbf{f(x)} \approx \mathbf{t(x)} \quad \text{con} \quad \varepsilon(x) = [\,f(x) - t(x)] = \varepsilon \to \mathbf{0} \quad \text{para} \quad \Delta x \to 0$$

Conclusiones:

1.- Vemos que cualquiera función, con la sola condición de ser derivable en x_o , admite ser asimilada a una función lineal (*su linealización*) en un entorno de x_o.

2.- El valor que despreciamos ($\varepsilon\,(\Delta x)$), es el ***error*** que cometemos al aproximar ***f (x)*** con ***t (x)***: $\varepsilon\,(\Delta x) = \varepsilon$

3- Acudir a la aproximación lineal tiene sentido cuando, por alguna razón, ***no se puede calcular f(x)***. Obviamente, en tal caso, tampoco se podrá calcular el error; o sea ε. Para

tener una idea de la calidad de la aproximación ("buena" o "mala") resulta de suma importancia entonces poder dar una <u>cota</u> del error.
A tal efecto observamos que $\varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$. Así, podemos estimar su magnitud (o "*pequeñez*") a partir de *compararlo* con otro infinitésimo conocido, como ser, el mismo Δx.

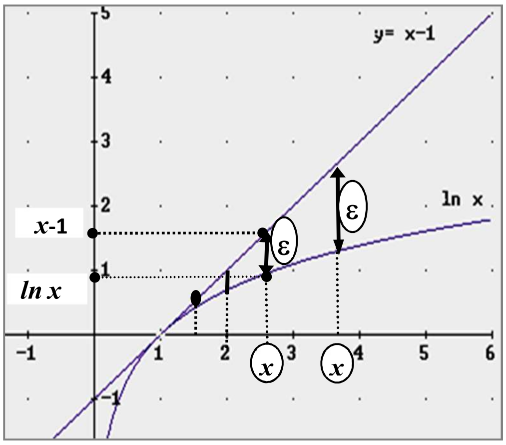
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\rho(\Delta x).\Delta x}{\Delta x}=0.$$

<u>Conclusión</u>: $\varepsilon=\varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo de orden <u>*superior*</u> a Δx.
(se acerca a cero <u>*más rápido*</u> que Δx). O sea, para Δx <u>*pequeños*</u>, $|\varepsilon| < |\Delta x|$.

<u>Ejemplo 1</u>:
Obtener la linealización de ***ln x*** en $x_o=1$

$f(x) = \ln x$; $x_o=1$
$f'(x) = 1/x$
$t(x) = f(x_o)+f'(x_o).(x-x_o)$

- $f(x) \approx t(x)$
- $f(x) \approx f(1)+f'(1).(x-1)$
- $\ln x \approx \ln 1 + 1.(x-1)$
- $\ln x \approx x - 1$



<u>Luego</u>: $t(x)=x-1$, linealización de **f** en $x_o=1$.

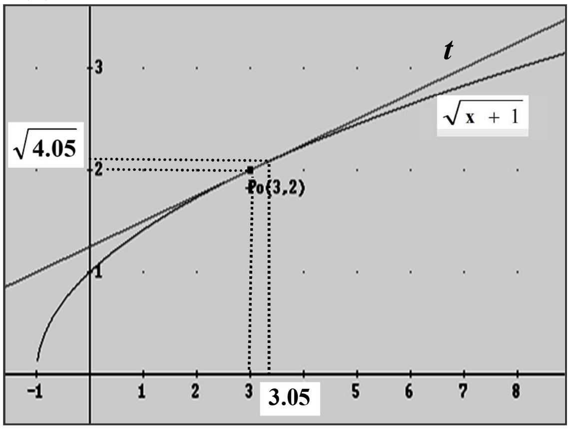
<u>Así</u>: $\ln x \approx t(x)$; para todo x en un entorno de $x_o=1$
$\ln 2 \approx t(2) = 1 \to \varepsilon(2) = [\ln(2) - t(2)] = ??$
$\ln 1.5 \approx t(1.5) = 0.5 \to \varepsilon(1.5) = [\ln(1.5) - t(1.5)] = ??$

* Obviamente no podemos calcular el error ´*exacto*´; aunque si podemos apreciar (del gráfico) que este va disminuyendo a medida que $x \to 1$; que $\varepsilon(1.5) < \varepsilon(2)$.
* Por otro lado, aún cuando dado un x no podemos *calcular* el error, está claro que este existe y tiene un valor fijo para cada x.

<u>Ejemplo 2</u>: encontrar la aproximación lineal para $f(x)=\sqrt{x+1}$ en $x_o=3$.
Aproximar $\sqrt{2.95}$ y $\sqrt{4.05}$. Indicar si la aprox. es "por exceso" o "por defecto".

$f(x) = \sqrt{x+1}$; $x_o=3$
$f'(x) = 1/(2\sqrt{x+1})$
$t(x) = f(x_o) + f'(x_o).(x-x_o)$

- $f(x) \approx t(x)$
- $f(x) \approx f(3) + f'(3).(x-3)$
- $f(x) \approx 2 + 1/4.(x-3)$
- $\sqrt{x+1} \approx \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$



<u>Luego</u>: $t(x)=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ ó $t(x)=0.25x+1.25$ es la linealización de **f** en $x_o=3$.

- Dado **a** $\in$ R, y **a** próximo a $x_o = 3$,

  ¿cómo damos una aproximación de $\sqrt{\mathbf{a}}$ usando la linealización hallada?:

  1º) buscando un x^* tal que $\sqrt{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\mathbf{x^*}) = \sqrt{x^* + 1}$ ($\rightarrow$ $x^* = \mathbf{a} - 1$)
  2º) calculando $\mathbf{t}(x^*)$

Por ejemplo, $\mathbf{a} = 2.95$ $\rightarrow$ $\sqrt{\mathbf{2.95}} = \mathbf{f}(x^*) = \sqrt{x^* + 1}$ $\rightarrow$ $x^* = 2.95 - 1$ $\rightarrow$ $x^* = \mathbf{1.95}$
$\sqrt{\mathbf{2.95}} = \mathbf{f}(1{,}95) \approx \mathbf{t}(1{,}95) = 0{,}25 \,.\, 1{,}95 + 1{,}25 = 1{,}7375$ $\rightarrow$ $\sqrt{\mathbf{2.95}} \approx \mathbf{1.7375}$
$\mathbf{a} = 4.05$ $\rightarrow$ $\sqrt{\mathbf{4.05}} = \mathbf{f}(x^*) = \sqrt{x^* + 1}$ $\rightarrow$ $x^* = 4.05 - 1$ $\rightarrow$ $x^* = \mathbf{3.05}$
$\sqrt{\mathbf{4.05}} = \mathbf{f}(3{,}05) \approx t(3{,}05) = 0{,}25 \,.\, 3{,}05 + 1{,}25 = 2{,}025$ $\rightarrow$ $\sqrt{\mathbf{4.05}} \approx \mathbf{2.025}$

- ***¿ por exceso o por defecto ?***: del **gráf f** y la recta tangente decidimos fácilmente esta cuestión: la curva está "por debajo" de la recta tangente luego, las aprox_s. son "*por exceso*".

4.11 Aproximación por Polinomios: *Polinomios de Taylor*

En el párrafo anterior encontramos la aproximación lineal de algunas funciones**,** la usamos para aproximar algunos valores en el entorno del punto, vimos que muy poco se podía decir del ´error´ producido en cada caso. Retomamos el ***ejemplo 1*** para analizar en más detalle esta cuestión del error que producimos al aproximar una función cualquiera por una función lineal .

Ejemplo 1:

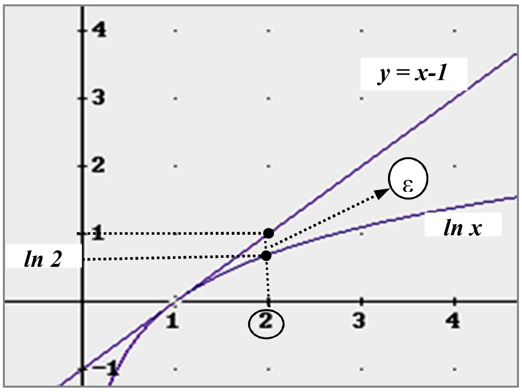
$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{ln}\, x$; $x_o = 1$, $\mathbf{f}'(x) = 1/x$
$\mathbf{t}(x) = \mathbf{f}(x_o) + \mathbf{f}'(x_o).(x - x_o)$
$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x - 1}$

Vimos que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x})$, o sea que:

- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{t}(\mathbf{x})$ con $\varepsilon(x) = \mathbf{t}(x) - \mathbf{f}(x)$
- $\mathbf{ln}\, x \approx x - 1$ con $\varepsilon(x) = (x-1) - \mathbf{ln}\, x$

$\mathbf{ln2} \approx \mathbf{t}(2) = \mathbf{1}$

$\varepsilon_1 = \mathbf{1 - ln2}$



Respecto a la aproximación de ***ln2*** obtenida por linealización del logaritmo, ¿habrá alguna manera de estimar el error cometido?

Resolver esta cuestión requiere la aplicación de complejos resultados teóricos que no son el objetivo de este curso. Hoy día, todos sabemos que con una calculadora podemos obtener en forma rápida y sin pensar una aproximación de ***ln2*****,** por lo que quizás algunos se pregunten si es necesario estudiar este tema. La respuesta es "sí", porque el mismo se usa para demostrar resultados teóricos dentro de la propia matemática e incluso fuera de ella (por ej, en fisicoquímica). Además, si bien la calculadora da un valor aproximado de ***ln2***, lo que no da es el ´error´ implícito en esa aproximación. Luego, necesitamos saber algo más acerca del mismo**.** En lo que sigue, vamos a aprovechar el avance tecnológico para proceder a *estimar el error*, sin acudir a resultados teóricos. O sea, vamos a usar la calculadora para obtener los logaritmos y con ellos una *estimación del error*, porque lo que nos interesa estudiar ahora no es la aproximación en sí, sino el "*error*" cometido al aproximar.

$$\ln 2 \approx t(2) = 1 \xrightarrow{\text{por aprox. lineal}} \ln 2 \approx 1$$

$$\varepsilon_1(2) = 1 - \ln 2$$

$$\xrightarrow{\text{calcul: } \ln 2 \approx 0.6931} \varepsilon_1(2) = 1 - 0.6931 = 0.3079 \cong 0.31$$

Concluimos así que si para aproximar ***ln 2*** usamos la ***aproximación lineal*** obtenemos $\ln 2 \approx 1$ con un $\varepsilon_{(2)} \cong 0.31$; o sea, con un error bastante "grande". Luego, si por alguna razón necesitáramos dar una "buena" aproximación de ***ln2***, por ejemplo, con $\varepsilon < 0.01$, la aproximación obtenida por *linealización* no es aceptable.

* *Para pensar*: el valor que da la calculadora, ¿cumple este requisito??; o sea, ¿es ***0.6931*** una aproximación del ln 2 con $\varepsilon < 0.01$?

Como entre todas las rectas que pasan por $P_o(1;0)$ *la recta tg es la que mejor aproxima* a ***ln x,*** vemos que no hay forma de aproximar ***ln2*** con $\varepsilon < 0.01$ por medio de una función lineal, que debemos acudir a otro tipo de función. *¿Qué tipo de función*?, uno en donde las funciones sean lo más "simple" posible; o sea, continuas, suaves y fáciles de calcular. ¿Existen funciones así?: sí, ***los polinomios***.

La función lineal es un polinomio de grado 1. Luego vamos a probar de aproximar con polinomios *de grado mayor que 1*, ver si con ellos el error disminuye.
Así, dada **f** y un x del Df, en lo que sigue nos ocupamos de hallar un polinomio de grado **n**, que indicamos p_n, tal que si con $\varepsilon_n(x)$ indicamos el error, tengamos:

$$f(x) \approx p_n(x)$$

$$f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x) \quad \text{con } \varepsilon_n(x) \text{ un infinitésimo para } n \to +\infty$$

Si **f** tiene **n** derivadas sucesivas y finitas en un punto x_o próximo a x, se puede demostrar que existe y es único el polinomio de grado **n** que aproxima a $f(x)$ en un entorno de x_o y tiene la propiedad de que $\varepsilon_n(x) \to 0$ a medida que aumenta n.

Ejemplo: hallar un polinomio de grado 2 que permita aproximar ***ln 2.*** Estimar ε_2

- $f(x) = \ln x$; $x = 2$; $x_o = 1$
  (→ próximo a 2, y donde se puede calcular **f** y sus derivadas)

- **f** es **n** veces derivable:

$$f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{-2.3}{x^4}; \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}}$$

- Buscamos un polinomio de grado 2, $p_2(x)$ tal que:

$$f(x) \approx p_2(x)$$

$$f(x) = p_2(x) + \varepsilon_2(x) \quad \text{con} \quad \varepsilon_2(x) = f(x) - p_2(x)$$

$$\varepsilon_2(2) < \varepsilon_1(2) \approx 0.31$$

Un polinomio de grado 2, cualquiera sea su forma, queda determinado por ***3 coeficientes***. Luego, resolver este problema implica resolver ***una ecuación con 3 incógnitas.*** Para que una ecuación de este tipo tenga ***solución única*** se requiere la existencia de cierta cantidad de ***condiciones sobre la ecuación***; en particular, se requiere que haya ***la misma cantidad de condiciones que de incógnitas***. Así, en este caso, para obtener ***solución única*** tenemos que imponer ***3 condiciones***.

Antes de comenzar a resolver el problema, y dado que existen distintas maneras de escribir un polinomio, conviene detenerse y buscar la más conveniente a los objetivos propuestos.

- $p_2(x) = A_o + A_1 x + A_2 x^2$ → *desarrollado*
- $p_2(x) = A_2 (x - x_1).(x - x_2)$ → *factorizado*
- $p_2(x) = A_2 (x-h)^2 + k$ → *en forma canónica*
- $p_2(x) = a_o + a_1 (x- x_o) + a_2 (x- x_o)^2$ → *según las potencias de (x-x_o) ; a partir de dividir el polinomio en forma sucesiva por dicho binomio.*

El polinomio buscado es aquel que *mejor aproxime* a la función en un entorno de x_o, luego la forma del polinomio más práctica para nuestros objetivos es la última.

Partimos entonces de $p_2(x) = a_o + a_1 (x- x_o) + a_2 (x- x_o)^2$,
fijamos ***3 condiciones*** y trabajamos para hallar los coeficientes a_0 ; a_1 y a_2 .

Condiciones sobre $p_2(x)$:

$$(S)\begin{cases} p_2(x_o) = f(x_o) & \Rightarrow \text{ que ambas curvas pasen por } P_0 (x_o; f(x_o)) \\ p_2'(x_o) = f'(x_o) & \Rightarrow \text{ que ambas curvas tengan la misma } \textit{recta tg} \text{ en } P_o \\ p_2''(x_o) = f''(x_o) & \Rightarrow \text{ que ambas curvas tengan la misma } \textit{curvatura} \text{ en } P_o . \end{cases}$$

Derivamos el polinomio, lo calculamos en x_o, reemplazamos en (S) y resolvemos:

$$\begin{array}{ll} p_2(x) = a_o + a_1 (x- x_o) + a_2 (x- x_o)^2 \Rightarrow & p_2(x_o) = a_o \\ p_2'(x) = a_1 + 2 a_2 (x- x_o) \Rightarrow & p_2'(x_o) = a_1 \\ p_2''(x) = 2 a_2 \Rightarrow & p_2''(x_o) = 2 a_2 \end{array} \longleftrightarrow (S)\begin{cases} a_o = f(x_o). \\ a_1 = f'(x_o) \\ 2 a_2 = f''(x_o) \end{cases}$$

Concluimos que: $p_2(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x- x_o) + \frac{f''(x_o)}{2}(x- x_o)^2$

$X_o = 1 \rightarrow p_2(x) = f(1) + f'(1)(x- 1) + \frac{f''(1)}{2}(x- 1)^2$

$X = 2 ;\ f(x) = \ln x \rightarrow p_2(2) = 0 + 1.(2 - 1) + \frac{(-1)}{2}(2- 1)^2 = 0.5$

$$ln2 \approx p_2(2) \xrightarrow{\text{por aprox. cuadrática}} ln2 \approx 0.5$$

$$\varepsilon_2(2) = |0.5 - ln2|$$

$$\xrightarrow{\text{calcul: } ln\ 2 \approx 0.6931} \varepsilon_2(2)=|0.5 -0.6931| =0.19331 \cong 0.19$$

Y verificamos que, $\varepsilon_2(2) < \varepsilon_1(2) \approx 0.31$

Pero también verificamos que ε_2 es todavía muy grande; más aún, que con este error estamos muy lejos de tener una aproximación ***aceptable*** ($\varepsilon < \mathbf{0.01}$) de ***ln 2.***
¿Qué podemos hacer? : buscar un polinomio de grado 3.

Buscamos un polinomio de grado 3.

$$\mathbf{p_3(x) = a_o + a_1\,(x- x_o) + a_2\,(x- x_o)^2 + a_3\,(x- x_o)^3} \Longrightarrow \text{¿ } \mathbf{a_o\,;\,a_1\,;\,a_2\,;\,a_3} \text{ ?}$$

$$\Downarrow$$

Si queremos solución única, necesitamos *4 condiciones*.

Sin dudas debemos seguir pidiendo que ambas curvas pasen por P_o, que tengan igual recta tg e igual curvatura en P_o. Tenemos así tres condiciones, falta la cuarta. Ya no hay argumentos geométricos a la vista, de modo que acudimos a la "*intuición razonada*". Así, y dado que la secuencia funcionó para el $\mathbf{p_2}$, lo razonable parece pedir que las derivadas terceras, coincidan en x_o.

$$\textbf{(S)}\quad \begin{cases} \mathbf{p_3(x_o) = f(x_o).} \\ \mathbf{p_3'(x_o) = f'(x_o)} \\ \mathbf{p_3''(x_o) = f''(x_o)} \\ \mathbf{p_3'''(x_o) = f'''(x_o)} \end{cases}$$

Derivamos, calculamos en x_o, reemplazamos en (S), resolvemos y obtenemos:

$$\textbf{(S)}\quad \begin{cases} \mathbf{a_o = f(x_o).} \\ \mathbf{a_1 = f'(x_o)} \\ \mathbf{a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}} \\ \mathbf{a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{2.3}} \end{cases}$$

***Concluimos que*:**

$$\mathbf{p_3(x) = f(x_o) + f'(x_o)\,(x- x_o) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x- x_o)^2 + \frac{f'''(x_0)}{2\,.3}\,(x- x_o)^3}$$

y se pude probar (*no lo hacemos*) que $\varepsilon_3(2) \approx \mathbf{0.14} < \varepsilon_2(2) < \varepsilon_1(2)$

O sea que al aumentar el grado del polinomio en una unidad, el error disminuyó en solo, ***5 centésimos !!*** y seguimos por lo tanto sin cumplir el requisito de $\varepsilon < 0.01$

OBSERVACIONES:

Si bien el error disminuye al aumentar el grado del polinomio resulta claro que lo hace en forma *muy lenta* y que, en consecuencia, el polinomio que aproxime la función con $\varepsilon <$ **0.01** tendrá que ser de grado *muy grande*; por ende, muy grande también el trabajo para hallarlo *por este camino*. Se trata entonces de ver si podemos generalizar lo hecho hasta aquí, hallar una expresión genérica para el polinomio de aproximación, la cual facilite y posibilite el trabajo.

Así, si observamos el caso de los polinomios de grado 2 y grado 3, detectamos que existe una "regularidad" en la forma en que se van generando los coeficientes. Efectivamente, a poco que prestemos atención, vemos que para "n" genérico:

$$\mathbf{a_n} = \underline{\textit{\textbf{coeficiente del término de grado} } \mathbf{n}} = \mathbf{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}}$$

(**n ! = 1.2.3......n** , factorial de **n**)

Los polinomios cuyos coeficientes tienen esta forma se conocen como **polinomios de Taylor**.

4.12 Polinomio de Taylor

Dada **f** "n-veces derivable" en x_o ; los polinomios de Taylor aproximan a **f**(x) para todo x en un conveniente entorno de x_o y se puede demostrar que el error disminuye al ir aumentado el grado del polinomio. O sea:

Polinomio de Taylor de f , alrededor de **x_o.**

$$p_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + ... + \frac{f^n(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

- $f(x) \approx p_n(x)$
- $f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x)$ → Fórmula de Taylor con resto ; ε = error ó resto de orden n.
- $\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$

n	$p_n(x)$	$p_n(x)$ (para $f(x) = \ln x$; $x_o = 1$)
1	$p_1(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$	$p_1(x) = x - 1$
2	$p_2(x) = p_1(x) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$	$p_2(x) = (x-1) - ½(x-1)^2$
3	$p_3(x) = p_2(x) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_o)^3$	$p_3(x) = (x-1) - ½(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$
4	$p_4(x) = p_3(x) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_o)^4$	$p_4(x) = p_3(x) + \frac{-6}{4!}(x-1)^4$
5	$p_5(x) = p_4(x) + \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x - x_o)^5$	$p_5(x) = p_4(x) + \frac{24}{5!}(x-1)^5$

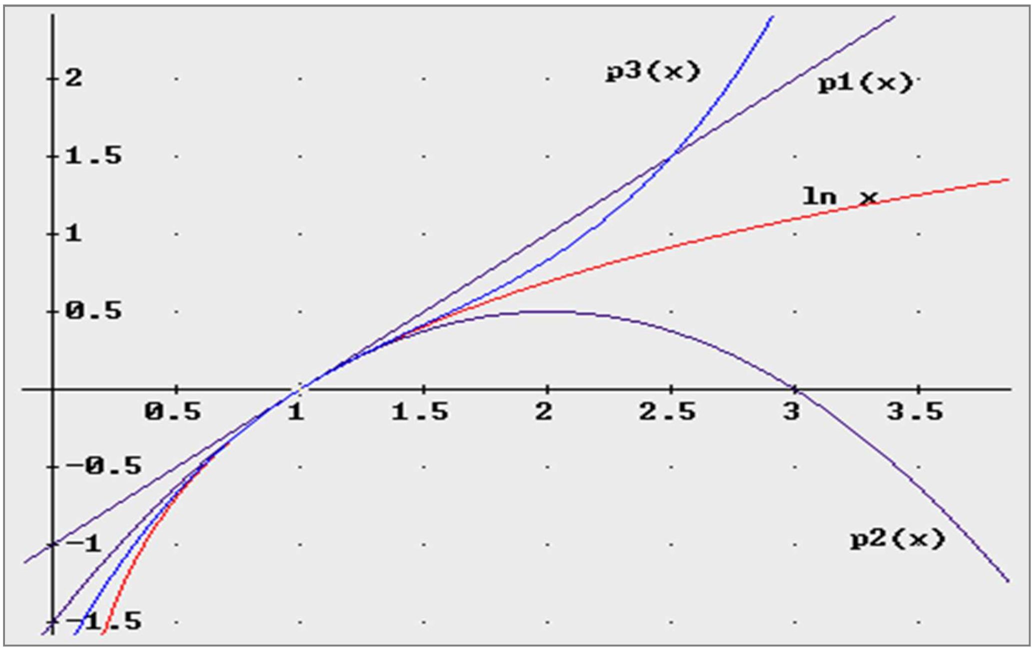
(*) en este cuadro vemos como el trabajo se puede *sistematizar* ya que cada nuevo polinomio se puede obtener del anterior agregando un nuevo sumando cuya expresión general es:

$$\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}.(x - x_o)^n$$

🛠 ¿Podemos ahora resolver el problema que dio origen a todo este desarrollo?
O sea, ¿aproximar ***ln 2*** con ε< **0.01** usando un apropiado polinomio de Taylor?

Polinomios de Taylor para $f(x) = \ln x$; $x_o = 1$

n	$p_n(x)$ (desarrollado)	$p_n(2)$	$\varepsilon_n(2)$
1	$p_1(x) = x - 1$	$p_1(2) = 1$	≈ 0.31
2	$p_2(x) = -½ x^2 + 2x - 1.5$	$p_2(2) = 0.5$	≈ 0.19
3	$p_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}$	$p_3(2) = 0.833$	≈ 0.14
4	$p_4(x) = -0.25x^4 + 1.33x^3 - 3x^2 + 4x - 2$	$p_4(2) = 0.596$	≈ 0.10



Vemos que si bien pudimos sistematizar el cálculo, por este camino (construir el polinomio, calcularlo en 2 y estimar el error) estamos muy lejos de alcanzar una aproximación con el error solicitado. No queda otra que acudir a la teoría, donde tenemos el siguiente resultado

Forma de Lagrange del Error

Si **f** es una función con derivada de orden ***n+1*** en todos los puntos de un entorno de $\mathbf{x_0}$, entonces dado un punto **x** de dicho entorno, existe un punto "**c**" entre $\mathbf{x_0}$ y **x** tal que si $\mathbf{p_n}$ es el ***polinomio de Taylor de*** **f** alrededor de $\mathbf{x_0}$ **,** entonces:

$$\mathbf{f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x)} \quad \text{con} \quad \boxed{\varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x - x_0)^{n+1}}$$

Forma de Lagrange del error

Si $f^{(n+1)}$ es acotada en un entorno de $\mathbf{x_0}$, entonces la forma de Lagrange del error permite establecer en forma rigurosa ***una cota para el error absoluto***. También facilita la búsqueda del "n" para que el error sea el requerido para el caso.
Así, y por ej., al aproximar ***ln 2*** con el polinomio de Taylor de grado 4, obtuvimos:

$$\mathbf{p_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4}$$

Luego, $\mathbf{f(x) = p_4(x) + \varepsilon_4(x)}$ con $\mathbf{\varepsilon_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{(5)!}.(x-1)^5 \;, \; 1<c<2}$

$$\mathbf{f(2) = p_4(2) + \varepsilon_4(2)} \;\text{ con }\; \mathbf{\varepsilon_4(2) = \frac{f^{(5)}(c)}{(5)!}.(2-1)^5 \;, \; 1<c<2}$$

$$\mathit{ln\ 2} \approx \mathbf{p_4(2)} = \mathit{0.596} \quad \text{con} \quad \mathbf{\varepsilon_4(2) = \frac{f^{(5)}(c)}{(5)!} \;, \; 1<c<2}$$

<u>Acotamos el error cometido al aproximar con</u> *p_4*

Calculamos la derivada quinta de **f** , acudiendo a la expresión general:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}\ \xrightarrow[x=c]{n=5}\ f^{(5)}(c)=(-1)^4\,\frac{4!}{c^5}=\frac{4!}{c^5}$$

Reemplazando en la fórmula del error:

$$|\varepsilon_4(2)| = \left|\frac{f^{(5)}(c)}{5!}\right| = \left|\frac{\frac{4!}{c^5}}{5!}\right| = \left|\frac{4!}{5!\,c^5}\right| = \left|\frac{1}{5\,c^5}\right| \qquad ; \quad 1<c<2$$

El valor de "**c**" es "desconocido" , luego no podemos "calcular" el error.
Sí lo podemos "acotar" dado que sabemos que "**c**" está entre 1 y 2:

$$1<c<2 \ \Rightarrow\ c>1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{c}<1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{c^5}<1$$

Luego: $|\varepsilon_4(2)| = \dfrac{1}{5\,c^5} < \dfrac{1}{5} \ \Rightarrow\ |\varepsilon_4(2)| < \dfrac{1}{5} = 0.2 \ \Rightarrow\ |\varepsilon_4(2)| < 0.2$ (*y no cumple lo pedido*)

➢ ***<u>Buscamos un "n" para el cual p_n aproxima ln 2 con</u>*** $\varepsilon < 0.01$

$$\varepsilon_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

$$\xrightarrow[x=2]{x_0=1}\ \varepsilon_n(2)=\frac{\frac{(-1)^n\,(n)!}{c^{n+1}}}{(n+1)!}\cdot(2-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1).\,c^{n+1}}$$

$\Rightarrow |\varepsilon_n(2)| = \dfrac{1}{(n+1).\,c^{n+1}} < \dfrac{1}{n+1}$; (*pues* $\dfrac{1}{c^{n+1}} < 1$) $\Rightarrow |\varepsilon_4(2)| < \dfrac{1}{n+1}$

Así, nuestro problema estará resuelto si encontramos "**n**" tal que, $\dfrac{1}{n+1} < 0.01$.

Buscamos "**n**" : $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{100} \iff n+1 > 100 \iff n > 99$

<u>Conclusión</u>: un polinomio que permite aproximar ***ln 2*** con $\varepsilon < 0.01$ es el p_{100}

$p_{100}(2) =$  0.698164507991 ⇨ **ln 2** ≈  0.698164507991 con $\varepsilon < 0.01$

(aproximación del **ln 2** obtenida con un software).

4.13 Actividades

PARTE 1 - LA DERIVADA Y EL "ESTUDIO DE FUNCIONES"

I – TEOREMAS DE ROLLE Y LAGRANGE:

1. Indicar si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle. En caso afirmativo, hallar el o los valores de "c" que verifican la tesis.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en $[0\,;2]$

b) $f(x) = x^4 - 2x + 1$ *en* $[-2\,;2]$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ -2 \le x < 1 \\ x & ; \ \ 1 \le x \le 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \ -2 \le x < 1 \\ 2x & ; \ \ 1 \le x \le 4 \end{cases}$

2. Hallar el o los valores de "c" del T.V.M. de Lagrange. Ilustrar con un gráfico.

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$; $[1\,;5]$

b) $f(x) = x^2 - 3x$; $[1\,;4]$

c) $f(x) = \ln(x)$; $[1\,;e]$

d) $f(x) = \text{sen } x$; $[0\,;\pi]$

e) $f(x) = \text{sen } x$; $[0\,;3\pi]$

f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $[-1\,;2]$

3. Dada $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en [-1;1] calcular f(1) , f(-1) y f '(x).
¿Se anula la derivada en algún punto del [-1;1]?.
El resultado obtenido, ¿contradice el Teorema de Rolle? . ¿ Porqué?

II - REGLA DE L'HOPITAL:

4. Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 13x + 21}$

b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{1 - e^{2t}}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - x - 2\sqrt{1 - x}}{\text{sen } x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos 6x}{\ln \cos 3x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\text{senx}} - e^{x}}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 - x).e^{x} - x - 2}{x^3}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x^2.e^x)}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 .\ln x$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,.\,\text{sen}(\frac{3}{x})$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \,\text{arctg}\,(\frac{1}{x})$

l) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{x^2}$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} (4x)^{\text{senx}}$

n) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - \text{senx}).\ln x$

o) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(\text{sen}(2x))^{2x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \text{senx})^{\text{cotg } x}$

q) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x^2})^4$

r) $\lim\limits_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

s) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{x})$

t) $\lim\limits_{x \to 1^+} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x^2 - x})$

u) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$

v) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$

III – ESTUDIO DE FUNCIONES:

5. Graficar las siguientes funciones e indicar, *leyendo del gráfico*, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de ellas. Luego, controlar las respuestas dadas acudiendo al criterio de la derivada primera.

a) $f(x) = \ln x$ b) $f(x) = 4^{-x}$

c) $f(x) = \frac{-2}{x}$ d) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $x \in [-2\pi; 2\pi]$

e) $f(x) = (x - 2)^{17}$ f) $f(x) = (x - 2)^{18}$

g) $f(x) = (x + 3)(x - 3)$ h) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

i) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ j) $f(x) = \frac{x - 4}{-x + 1}$

6. Dada $f(x) = (x-2)^3 + 8$ se pide:

a) hallar g, inversa de f. Graficar f y g en un mismo sistema e indicar, *leyendo del gráfico*, intervalos donde f y g sean estrictamente crecientes.
b) Derivar f y g y corroborar lo afirmado en (a) aplicando el criterio de la derivada 1ra (donde sea posible) o la definición de estrictamente creciente.
c) Indicar **V** ó **F**, justificar la respuesta:
 c1) " h derivable y estrictamente creciente en Dh $\Rightarrow$ $h'(x) > 0$, $\forall$ x$\in$Dh ".
 c2) " h derivable en Dh , h' continua en xo y $h'(xo) > 0$ $\Rightarrow$ h estrictamente creciente en un entorno de xo "
 c3) " h biyectiva, estrictamente creciente, derivable y $h'(x) \neq 0$ en Dh $\Rightarrow$ p, su inversa, es estrictamente creciente en Dp ".
 (Sugerencia: hallar $p'(x)$ a partir de derivar la identidad $h \circ p = \mathbf{id}_{\mathbf{Dp}}$ y aplicar luego los resultados teóricos que correspondan al caso).

7. Sea g la inversa de f con $f(y) = y^7 + y^5 + 17$ Analizar si g está estrictamente creciendo (o decreciendo) en un entorno de $x_o = f(y_o)$ con $y_o = 19$.
Informar por escrito el método o forma como concluye su respuesta.

8. Trazar la gráfica de una función que tenga las propiedades enumeradas en cada ítem. Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento:
 a) Tres máximos relativos, mínimo absoluto y cinco puntos donde alcanza el mínimo absoluto.
 b) Dos puntos donde alcanza el mínimo absoluto, ningún máximo.
 c) Seis mínimos relativos, máximo absoluto y dos puntos donde alcanza el máximo absoluto.
 d) Sea continua en R, tenga cuatro ceros, no tenga máximo absoluto y y tenga mínimo absoluto igual a **- 6 .** ¿Puede expresar la ley de esta función por medio de una ecuación?.¿Sí? ¿Cuál? ¿Porqué?
 e) Sea continua en R, tenga cinco ceros, no tenga máximo ni mínimo absoluto y tenga mínimos relativos positivos e iguales **.** ¿Puede expresar la ley de esta función por medio de una ecuación? ¿Sí? ¿Cuál? ¿Porqué?

Secuencia *sugerida* para el estudio de una función:

1- Dominio de la función. Dom. continuidad. Dom. derivabilidad
2- Intersecciones con los ejes coordenados
3- Propiedades: paridad, signo definido, periódica, etc.
4- Límites y asíntotas
5- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
6- Extremos relativos y absolutos
7- Intervalos de concavidad y convexidad
8- Puntos de inflexión
9- Gráfico
10- Imagen

Nota: *La secuencia dada es una enumeración de todas las cuestiones a analizar y/o determinar al "estudiar una función" para graficarla. Es un simple "ayuda memoria" de las cosas a hacer; y si bien están presentadas en un cierto "orden" esto obedece a razones puramente "literarias" y no "matemáticas"; es decir,* no es "indispensable" seguir este orden.

9. Para las funciones "*elementales*" que se indican a continuación, se pide hacer un "*bosquejo*" de su gráfico, "*sin acudir a la derivada*"; o sea, teniendo en cuenta sólo (1-2-3 y 4) de la secuencia para graficar funciones. Indicar luego, y *leyendo del gráfico*, si tienen máximos y /o mínimos relativos. ***Finalmente,*** verificar las respuestas acudiendo, si se puede, al ***criterio de la derivada enésima***.

a) $f(x) = (x - 1)^5 - 32$ ***b)*** $f(x) = x^4 - 16x^2$ ***c)*** $f(x) = (x - 1)^2 .(x - 2)$

d) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ ***e)*** $f(x) = | \ln x |$ ***f)*** $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2$

10. Efectuar el estudio de los siguientes polinomios y graficar los mismos. Si el polinomio presenta punto de inflexión a tangente no horizontal, $\mathbf{P_I}$, obtener la ecuación de la recta tangente a la curva en $\mathbf{P_I}$ y graficarla sobre la curva.

a) $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$ b) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2$

c) $f(x) = x^5 - 20x^2$ d) $f(x) = x^3 - 9x$

e) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ f) $f(x) = 3x^5 - x^3$

g) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ h) $f(x) = x^6 - 192x + 17$

i) $f(x) = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{5}{4}x^4 + 2x^2 + 6$ j) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 10$

Nota: *de ser posible, calcular las raíces del polinomio. De no serlo, obtener (por aplicación del Teorema de Bolzano) un intervalo donde se encuentre la raíz (*si existe*).*

11. Efectuar el estudio de:

a) $f(x) = 16\ x + \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{6}{x}$

c) $f(x) = x.\ \ln\ x$

d) $f(x) = \dfrac{\ln\ x}{x}$

e) $f(x) = sen^2(x)$ en $[0;\pi]$

f) $f(x) = x\, e^{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

h) $f(x) = \ln|x|$

i) $f(x) = x + sen\ x\ \ ; D = [0;\pi]$

j) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

k) $f(x) = e^{-x^2}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

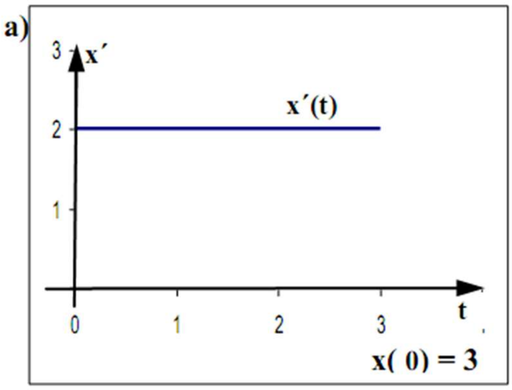
n) $f(x) = x^2 - \ln x$

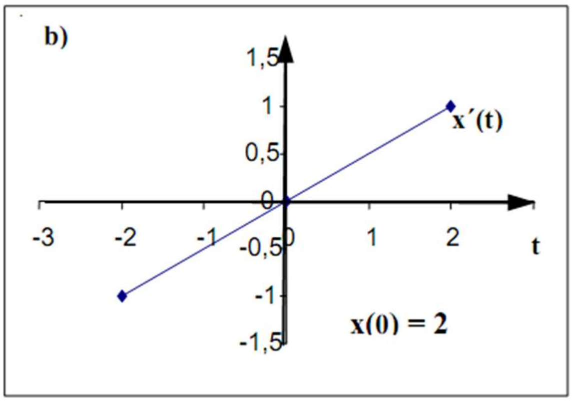
o) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 2x - 6)$

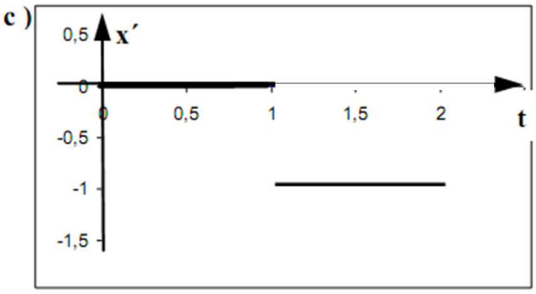
p) $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 2}{(x-1)^2}$

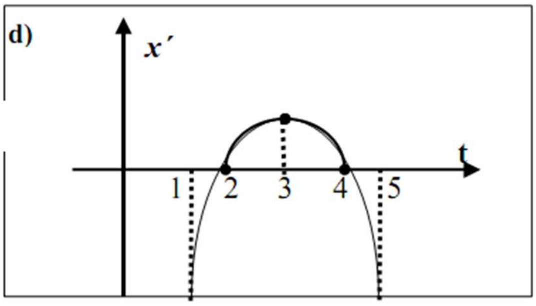
q) $f(x) = e^{-\alpha x^2} \rightarrow$ i) $\alpha > 0$
ii) $\alpha < 0$

12. Siendo $x = x(t)$, los siguientes gráficos corresponden a $x'(t)$.
A partir de ellos hacer el estudio de $x(t)$ y luego graficarla.





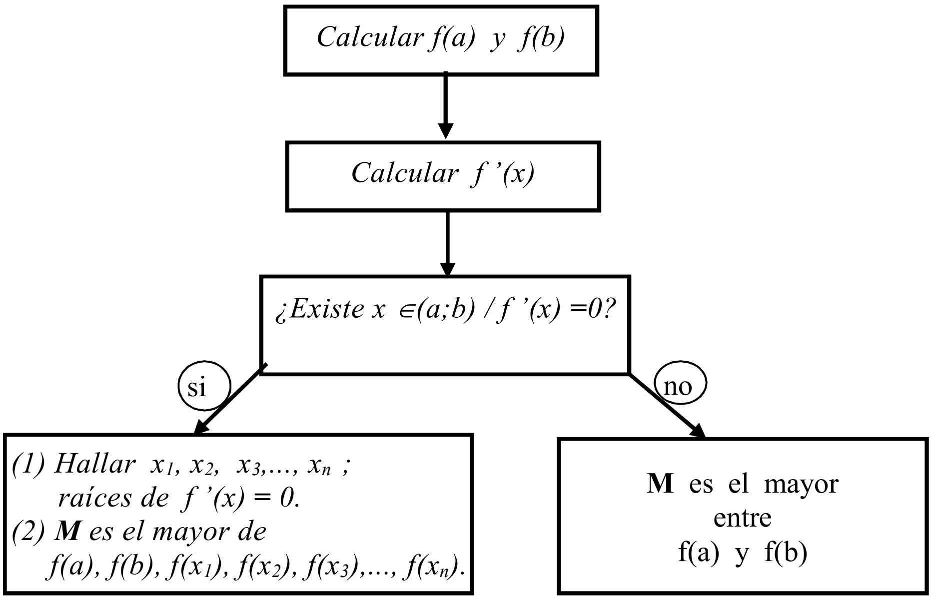




x(1) = 3, x continua en $t_0 = 1$

x(3) = 4

13. Sea **f** : [a;b] → R; **f** continua en [a;b] y *derivable* en (a;b). El siguiente diagrama de flujo permite hallar **M** = ***máximo absoluto*** de **f** en [a;b]. Analizar e interpretar el diagrama; luego construir uno similar para la búsqueda de **m** = ***mínimo absoluto*** de **f** en [a;b].



14. Si existe x* ∈ (a;b) tal que f no es derivable en x*, el diagrama para la búsqueda de extremos absolutos del ej. 18, ¿es válido? ¿Porqué?

15. Hallar los extremos absolutos de:

a) $f(x)=x^3+3x^2$ en (i) $\left[-4;\frac{1}{2}\right]$ d) $f(x)=x+\text{sen } x$ en $[0;2\pi]$

(ii) $[-4;2]$

(iii) $\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right]$ e) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ en $[-1;8]$

b) $f(x)=\frac{1}{x}$ en $\left[\frac{1}{2};4\right]$ f) $f(x)=\frac{x^6}{6}-\frac{5}{4}x^4+2x^2+6$ en $[-3;4]$

c) $f(x)=|x-1|$ en $[-1;3]$ g) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2+10$ en $[-2;5]$

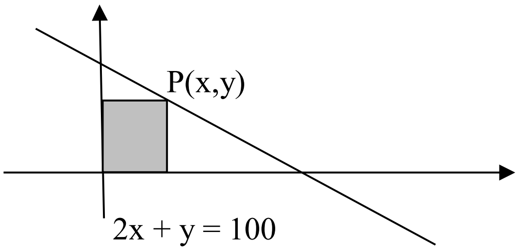
IV – PROBLEMAS DE EXTREMOS ABSOLUTOS:

En lo que sigue el objetivo es aplicar la derivada al estudio del *comportamiento* de expresiones que modelizan la situación o proceso que estamos estudiando, expresión sobre la que tenemos uno o más interrogantes (crece?, tiene máximo?, mínimo?, donde crece más rápido?, etc...). En general la expresión a estudiar resulta ser una *función de dos o más variables*. Luego, y en esta etapa, podremos resolver el problema si tenemos la función *más alguna condición o restricción* que permita transformar la expresión en una *función de una variable* (únicas funciones conocidas hasta aquí).

Dado que los extremos de una función con dominio en un intervalo cerrado y acotado [a; b] pueden estar en los *extremos del intervalo*; que de la *resolución algebraica* de una ecuación pueden resultar valores que no están en dicho dominio; es de suma importancia determinar y escribir en forma clara y destacada, *el dominio natural de la función* (la existencia o calidad de un extremo *depende* de dicho dominio).

16. La suma de dos números es 48. ¿Cuál es el valor mínimo posible de la suma de sus cuadrados?

17. Hallar el área máxima que puede alcanzar el rectángulo indicado en la figura, al desplazar el vértice P sobre la recta $2x + y = 100$.



18. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio 10 .

19. Se desea envasar leche en cajas de base cuadrada, cerradas y de 1000 cm^3 de capacidad. Obviamente interesa que las dimensiones de estas cajas sean tales que requieran la menor cantidad posible de material para construirlas. Se pide hallar cuales son las dimensiones de la caja que hacen esto posible.

20. Se desea construir una caja sin tapa a partir de una pieza de metal rectangular de 5 m. de ancho por 8 m. de largo. Para ello se recorta, en sus cuatro esquinas, cuadrados de lado "x". La pieza luego se dobla y se unen los bordes en forma conveniente a los efectos de obtener la caja. ¿ Qué dimensión deben tener los cuadrados que se cortan para que el volumen de la caja sea lo mayor posible?.

21. Queremos fabricar una caja de base cuadrada y volumen $V = 1000 \text{ cm}^3$ y queremos hacerlo de modo tal que el "costo" sea mínimo. Al respecto sabemos que el material para las caras cuesta " **a**" ctvos/cm^2 y el pegado de las aristas cuesta " **b** " ctvos/cm.

a) Mostrar que **C**, costo total, es función de "x" , lado de la base; que

$$\mathbf{C}(x) = 2\,\mathbf{a}\,x^2 + 8\,\mathbf{b}\,x + \frac{4000\,\mathbf{a}}{\mathbf{x}} + \frac{4000\,\mathbf{b}}{\mathbf{x}^2}$$

b) Mostrar que el planteo de $\mathbf{C}'(x) = 0$ conduce a la siguiente ecuación en $\boldsymbol{x}$

$$\mathbf{C}'(x) = \mathbf{a}\,x^4 + 2\,\mathbf{b}\,x^3 - 1000\,\mathbf{a}\,x - 2000\,\mathbf{b} = 0 \,;$$

y que el valor óptimo de "**x**" no depende del costo de los materiales. Analizar si este resultado tiene "sentido".

22. La "diferencia de potencial" **U** para una corriente alterna puede calcularse por medio de la siguiente función : $\mathbf{U} = U_o \text{ sen}(\omega\, t)$. En relación a ella, se pide:

a) Indicar la ley de la función para una corriente alterna cuyo período es 0,021.

b) hallar la diferencia de potencial máxima para la corriente del item (a) ($\mathbf{U}_o > 0$)

c) Indicar dos instantes donde la alcance.

23. Si una molécula del producto C se forma a partir de una molécula del reactivo A y una del reactivo B; si las concentraciones de A y B son iguales, $[A]= [B] = \mathbf{a}$ moles/ls., entonces la concentración de C en función del tiempo es

$$[C] = \frac{\mathbf{a^2.k.t}}{\mathbf{akt+1}}; \quad \text{donde } k \text{ es una constante positiva.}$$

a) Establecer si, según el modelo, se alcanza una concentración máxima .

b) Hallar (si existe) el instante donde la velocidad de la reacción es máxima (dominio!!); calcular esta velocidad máxima.

V- MÁS SOBRE BOLZANO, ROLLE Y LAGRANGE:

1) Dada $\mathbf{f}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ demostrar que no existe "c" / $\mathbf{f}(2) - \mathbf{f}(0) = 2\,\mathbf{f}'(c)$.
¿Contradice esto el teorema del valor medio de Lagrange?, porqué?.

2) Dadas las siguientes ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, demostrar que tienen uno y sólo un cero real. Acudir al apoyo de gráficos y teoremas convenientes al caso.

a) $x^3 + x - 1 = 0$ b) $x^5 + 10x + 3 = 0$ c) $3x - 2 + \cos(\frac{\pi}{2}.x) = 0$

Sugerencias:

A) Sabemos que el Teo. Bolzano permite estimar el o los intervalos donde una función puede tener un cero. Pero, para aplicar este teorema debemos detectar un intervalo donde se cumplan las hipótesis del mismo. Una forma de facilitar esta búsqueda consiste en pensar f como la suma de *dos funciones cuyos gráficos se conozca*. (por ej.: si $\mathbf{f}(x) = x^3 + x - 1$; $\mathbf{p}(x) = x^3$; $\mathbf{q}(x) = x-1$ entonces $\mathbf{f} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$). Como $\mathbf{f}(x) = 0$ equivale a $\mathbf{p}(x) = -\mathbf{q}(x)$, graficamos **p** y **-q** en un mismo sistema y procedemos a buscar un intervalo dentro del cual se produzca la *intersección de ambos gráficos*. (o sea, donde exista ***c*** tal que ***p(c) = - q (c)***). Si lo hallamos, tenemos un intervalo donde se produce un cero de **f**. Para verificar la validez del trabajo hecho aplicamos Bolzano al intervalo hallado y concluimos. Para $\mathbf{f}(x) = x^3 + x - 1$, verificar que existe $c \in [0; 1]$ tal que $\mathbf{p}(c) = -\mathbf{q}(c)$; aplicar luego Bolzano en este intervalo y concluir.

B) Par demostrar que el cero hallado es *único* podemos proceder por "*el absurdo*"; o sea, suponer que existe *otro cero* , aplicar Rolle, *llegar a un absurdo* , concluir.

3) Demostrar que $x^4 + 4x + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$, tiene a lo sumo 2 raíces reales. Acudir al apoyo de gráficos y teoremas convenientes al caso. Discutir los valores de "c" para los cuales la ecuación tiene dos, una o ninguna raíz real.
Sugerencias: **A)** reconocer f(x), descomponerla en dos funciones, graficarlas, visualizar la situación
B) detectar la existencia de un mínimo absoluto de **f,** concluir.

4) Demostrar que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$; $\forall\, x > 0$.
Sugerencia: buscar los extremos de $\mathbf{f(x)} = \sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x)$; concluir.

5) Si **f** es continua y derivable en R, $\mathbf{f}(0) = -3$ y $\mathbf{f}'(x) \le \mathbf{5}$ $\forall x$; ¿ qué tan grande puede ser f(2)?. *Sugerencia*: aplicar Lagrange en el [0; 2].

6) Demostrar que si $\mathbf{f}(x) = \text{arc tg } x + \text{arc cotg }(x)$ entonces $\mathbf{f}(x) = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in Df$

Sugerencia: mostrar $\mathbf{f}'(x) = 0$ $\forall x \in Df$, concluir.

PARTE 2- DIFERENCIAL Y APROXIMACIÓN POLINÓMICA

1. a) Sea $\mathbf{y = 5\,x^3 - 2\,x^2 + 6}$. Utilizar diferenciales para encontrar el cambio *aproximado* en **y** cuando ***x*** varía de **1** a **1, 03**.
b) Idem para $\mathbf{y = x^4 + 10}$, con ***x*** de **2** a **1, 99**.

2. a) Completar la siguiente tabla, para $f(x) = x^2$; $x_o = 1$

Δx	**dy(*1*; Δx) =..........**	**Δy =_________**	**E = | Δy - dy |**
2			
1			
0,5			
0			
-0,5			
-1			
-2			

b) Graficar f y la recta tangente en $\mathbf{P}(x_o; f(x_o))$.
Marcar **dy**; **Δy** y **E** correspondiente a cada **Δx.** Hacer una conjetura respecto al comportamiento de **E** para **Δx → 0** ; investigar su validez.

3. Para las funciones y puntos indicados a continuación:
i) $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.
ii) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; se pide:

a) Hallar el diferencial de f en los puntos x_1 y x_2 indicados en cada caso.
b) Calcular el diferencial y el incremento de f en cada punto, para $\Delta x = 1$.
c) Encontrar el *error* (absoluto, relativo y porcentual) que se comete al *aproximar* el incremento con el diferencial. Indicar en que punto (x_1 ó x_2) el error sería menos *´significativo´* (*importante*) en relación al *verdadero valor* del incremento.
($\mathbf{E = |E| = |\Delta y - dy|}$; $\mathbf{E_r = E/}\,\boldsymbol{dy}$; $\mathbf{E_{\%}} = 100\ \mathbf{E_r}$).
d) Indicar ***V ó F***, justificar: "**E** es menos *´significativo´* en los puntos donde la función varía a mayor velocidad".

4. Justificar, usando diferenciales, las siguientes fórmulas de aproximación, para $\Delta x \cong 0$
a) $(1 + \Delta x)^2 \cong 1 + 2\,\Delta x$ ▸ aproximar $(1{,}15)^2$; estimar el error.
b) $\sqrt{100 + \Delta x} \cong 10 + \frac{\Delta x}{20}$ ▸ aproximar $\sqrt{106}$; $\sqrt{95}$.
c) $\dfrac{1}{1+\Delta x} \cong 1 - \Delta x$ ▸ aproximar $\frac{1}{1{,}5}$; $\frac{1}{0{,}8}$; estimar el error.
d) $\operatorname{sen} \Delta x \cong \Delta x$
▸ aproximar, de ser posible, seno α para $\alpha = 0{,}01$; $-0{,}2$; $\frac{\pi}{2}$; 1 ; 1° ; 20°.
▸ obtener seno α con calculadora; concluir en que caso y porqué se puede (o no) usar la fórmula de aproximación indicada.

5. Leemos en un libro que la fórmula $\mathbf{V = 1 + \alpha\,(t - 4)^2}$, con **t** = temperatura en ºC, y $\alpha \cong 8{,}38.10^{-6}$ permite obtener el volumen **V** de un gramo de agua cuando la temperatura del medio es mayor o igual a cero (**t** ≥ 0ºC). Al respecto, hacer un bosquejo del gráfico de **V** y , usando diferenciales:

a) *estimar* la *variación* de volumen debida a una variación infinitesimal de temperatura (un *´dt´*) cuando $t_o = 0^\circ$. Idem para $t_o = 2^\circ$; $t_o = 4^\circ$; $t_o = 6^\circ$.

b) indicar que informan los resultados del item (a) en cuanto al comportamiento del volumen de 1gr de agua según la temperatura. (se expande?; contrae?, rapidez?). Hacer lo propio en cuanto a la densidad de 1gr de agua.

c) ¿Tienen sentido *´físico/químico´* los resultados obtenidos?; es decir, la fórmula hallada, ¿es un *´buen modelo´* de la dependencia V- t para un 1 gr. de agua sometido a una fuente de calor, a partir de 0ºC?. Si?, no?, porqué?. Si le informan que es un *´buen modelo´*, en tal caso, ¿lo usaría para calcular el volumen de 1gr de agua a 150ºC?. Si?, no?, porqué? .

* ***Diferencial y errores*** :

Dada $y = f(x)$, para estimar **E** , *´error absluto´* en el cálculo de y, procedemos a:

- *Reconocer* **E** → **E** = | **E** | = $|v_{verdadero} - v_{c\ alculado}| = |y - y_o| = |\Delta y|$
- *Aproximar* el incremento de f por el diferencial de f → $\Delta y \approx dy$.
- *Calcular* el diferencial tomando como incremento de la variable independiente (Δx) la ´cota del error´ indicada para la misma: $dy = f'(x_o).\Delta x_{(máx)} = f'(x_o).\,dx$
- Estimar el error relativo a los efectos de evaluar la *´significatividad´* del error.

$$\frac{\Delta y}{y_o} \approx \frac{dy}{y_o} = \frac{f'(x_o).dx}{f(x_o)} = \frac{f'(x_o)}{f(x_o)}.dx$$

6. Se mide el lado de un cubo y se encuentra que la longitud del mismo es de x_o cm. Se hace esto con un instrumento donde ε (error de apreciación), se conoce. Este error se propaga a cualquier calculo realizado con x_o , por ejemplo al del volumen del cubo (**V**). El valor exacto de este error se desconoce (al igual que el de x_o) pero, en general y conocido ε, se puede establecer una ´cotar superior´ del mismo.
Si se sabe que ε = ± 0.01 (*cm*), se pide entonces:
a) hallar el *error absoluto´máximo´* producido al calcular **V** con $x_o = 3$.
Indicar el *intervalo de incerteza* para los valores de **V.**
b) hallar el *error absoluto´máximo´* producido al calcular **V** con $x_o = 10$.
Indicar el *intervalo de incerteza* para los valores de **V.**
c) analizar en qué caso es más *´significativo´* el error inducido en **V,** por el error de medición en x_o..
d) justificar la validez de la siguiente expresión: $\frac{\Delta V}{V_o} \approx 3.\frac{dx}{x_o}$, expresar en una oración el sentido de la misma.

7. Estimar (acudiendo al método más apropiado al caso), cómo y cuánto varía la longitud del lado de un cubo si su volumen pasa de:
a) 8 cm^3 a 8.12 cm^3 ; b) 8 cm^3 a 7.88 cm^3 ; c) 8 cm^3 a 27 cm^3 .

8. Dado un cono donde r = radio de la base, h= altura del cono y $h= 2r$; se mide r y se encuentra que su longitud es x_o *cm.* Si el error de apreciación ε = ± 0.01 (*cm*), se pide hallar el máximo error cometido al calcular el volumen del cono usando el valor medido del radio para $x_o = 2$ y $x_o = 5$. (V_{cono} = sup. base x h).
¿En qué caso el ´error absoluto´ es mayor?, ¿cuando es más ´significativo´?.

9. *Cuando la sangre fluye por un vaso, el* ***flujo*** Φ *(volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado), es proporcional a la cuarta potencia del radio*

*´**r**´ de ese vaso. (ley de Poiseuille). Una arteria parcialmente obstruida se puede expandir (aumentar su radio) por medio de una operación llamada ´angioplastia´. Nos preguntamos entonces: ¿cómo afecta al flujo de sangre un aumento del 5% en el radio? ¿alcanza a los efectos de normalizar el flujo si para ello hay que aumentar el mismo alrededor de un 35 % ?. Si no alcanza, hallar en cuanto hay que aumentar **r**.*

$\Phi = k\ r^4 \longrightarrow$ » Aumento relativo en r: **dr / r**

» Aumento relativo de flujo: $\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{\Phi'.dr}{\Phi}. =$ **.........(completar)...........**

* Vemos que el aumento relativo en el flujo es alrededor de .... el aumento relativo en r

* Equivalentemente, el aumento porcentual del flujo sería alrededor de .... el aumento porcentual del radio.

Luego, para un aumento porcentual del radio del 5% se tendrá una aumento del flujo de aproximadamente un ....

$p_n(x)$: ***polinomio de Taylor de grado "n" de* f *, alrededor de* x_o.**

$$p_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \dots\dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

- $f(x) \approx p_n(x)$
- $f(x) = p_n(x) + \varepsilon_n(x)$ → **Fórmula de Taylor con resto** ; ε = error ó resto de orden n.
- $\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$ **y** $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$
- $\varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x - x_0)^{n+1}$ → Forma de Lagrange del error

("**c**" entre x_o y x)

16. Para cada función y punto indicado a continuación,

a) $f(x) = \text{sen } x$; $x_0 = 0$ **b)** $g(x) = \cos x$; $x_0 = 0$

c) $h(x) = \ln(x)$; $x_0 = 1$ **d)** $k(x) = \log(x)$; $x_0 = 1$

se pide dar:

a) la aproximación *lineal* de f en x_o (*recta tangente* ó $p_1(x)$)

b) la aproximación polinómica correspondiente a $n = 3$ ($p_3(x)$)

c) un valor aproximado de $f(0.1)$; $g(0.1)$; $h(1.5)$ y $k(1.5)$; acudiendo a la aproximación lineal y al $p_3(x)$. Verificar si la aproximación mejora.

17. Hallar $p_n(x)$ para f y x_o indicados .

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ $x_0 = 0$; $x_0 = 1$

b) $f(x) = \text{sen } x$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = e^{3x}$; $x_0 = 0$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $x_0 = 0$

<u>Sugerencia</u>: recurrir a las fórmulas para la derivada enésima de f (Pract. 3, ej.10):

a) $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0$ → $f^{(n)}(x) = n!.a_n$

b) $f(x) = \text{sen } x$ → $f^{(n)}(x) = \text{sen}\,(x + n\,\frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = e^{k\,x}$ → $f^{(n)}(x) = k^n\, e^{kx}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (*verificar que*) → $f^{(n)}(x) = (-1)^n\, \dfrac{n\,!}{(1+x)^{n+1}}$

18. Sea $f(x) = e^x$

a) Hallar $p_n(x)$ para $x_o = 0$

b) Calcular el valor aproximado del número " ***e*** " usando

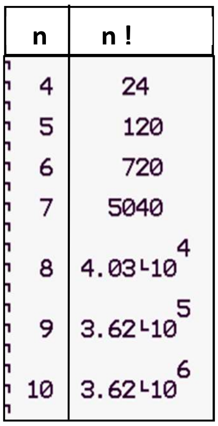
  i) aproximación lineal

  ii) polinomio de Taylor de grado 2; 4 y 6.

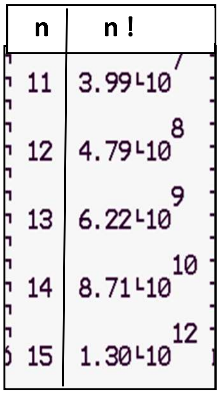
c) Acudiendo a la fórmula de Taylor, hallar " ***e*** " con 7 cifras decimales exactas.

(⇒ hallar "*n*" tal que el error, $\varepsilon_n(1) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(1)^{n+1} < \frac{1}{2}\, 10^{-8}$, $0 < c < 1$).

(<u>*Sug*</u>: acotar ***c*** y ***e*** por el entero más próximo, tener en cuenta las sgtes tablas)



n	n !
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	$4.03 \cdot 10^{4}$
9	$3.62 \cdot 10^{5}$
10	$3.62 \cdot 10^{6}$



n	n !
11	$3.99 \cdot 10^{7}$
12	$4.79 \cdot 10^{8}$
13	$6.22 \cdot 10^{9}$
14	$8.71 \cdot 10^{10}$
15	$1.30 \cdot 10^{12}$

19. Si $f(x) = e^x$; se pide:

a) Hallar $p_2(x)$; polinomio de Taylor de grado 2 de f en un entorno de $x_o = 0$.

b) Si $q(u) = p_2(u^2)$, obtener la ley de q e indicar ***V ó F*** (justificar respuesta):

  i) q es un polinomio de grado 4.

  ii) si $g(u) = f(u^2)$ entonces q es el polinomio de Taylor de gr. 4 de g en $u_0 = 0$.

20. Sea f una función dos veces derivable en R y tal que $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Demostrar que, en un entorno de $x_o = \mathbf{0}$ la recta tangente a la gráfica de f en $P_o(0; f(0))$ se encuentra por debajo de dicha gráfica.

(<u>*Sugerencia*</u>: acudir a la Fórmula de Taylor con resto y a la forma de Lagrange del resto)

4.14 Problemas de Aplicación

1. ***´Medición Indirecta´***

En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita hacer estimaciones sobre una cierta variable que, por alguna razón, no admite ser *medida* en forma *directa* (por ejemplo un ángulo de refracción). En estos casos se miden y calculan valores *relacionados* con la incógnita (por ejemplo, el seno del ángulo) y finalmente entonces, por ***medición indirecta***, se obtiene una estimación de la misma.

Así, por ejemplo, si **$y = f(x)$**; ´y_o´ y ´x_o´ los valores ´estimados´ (y_o por <u>*medición*</u>, x_o por <u>*cálculo*</u> a partir de y_o) ´ε_y´ y ´ε_x´ los respectivos *errores* de estimación, tenemos entonces que:

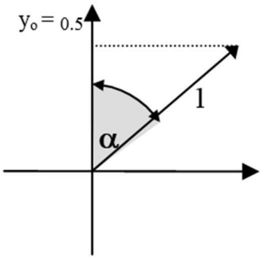
" $y_{real} = y_o \pm \varepsilon_y$ " ; " $x_{real} = x_o \pm \varepsilon_x$ "

y el problema a resolver es: estimar ´ε_x´ conociendo un valor máximo para ´ε_y´

Haciendo $\varepsilon_y = \Delta y$, $\varepsilon_x = \Delta x$ y acudiendo a diferenciales :

$$\boldsymbol{\Delta y} \approx \boldsymbol{dy} = f\,'(x_o).\,\Delta x \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{f\,'(x_o)} \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_y}{f\,'(x_o)}}$$

Problema: *A los efectos de estimar un ángulo de reflexión α se realizan una serie de mediciones al efecto de determinar **$y = sen\ \alpha$**. Finalmente se encuentra que **y_o** $= 0.5$ cm. Si el error de medición es $\varepsilon_y = \pm 0.2$ dar una estimación del error máximo cometido en la determinación de α.*



» $y = sen\ \alpha$ → $y\,' = \cos \alpha$

» $y_o = sen\ \alpha_o = \mathbf{0.5}$ → $\alpha_o =$ ....(en radianes !!!)

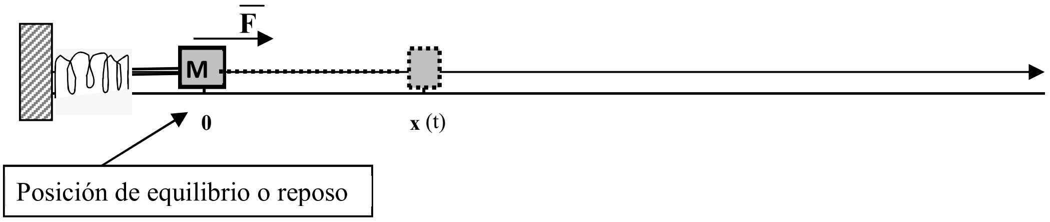
» $\varepsilon_\alpha \approx$ ....

» $\alpha =$ .... ± ....(en radianes: .... < α < ....)

(en grados : .... < α < ....)

(*) En este problema queda claro la influencia e importancia de los errores de medición Vemos en el mismo como un error *máximo* de .... mm. en la medición de los catetos determina un error *máximo* de aproximadamente .... grados en la estimación del ángulo. Vemos también cómo para apreciar el error conviene expresar los ángulos en grados, cosa que <u>*no podemos hacer para calcular*</u>. (realice los cálculos con el ángulo en grados y compare los resultados!!!).

2. Una masa M sujeta a un resorte se pone en movimiento bajo la acción de una fuerza $\overline{\mathbf{F}}$. La función de posición para M en cada instante " t " y respecto a su posición de equilibrio es: **$x = sen\ t + \cos t$** ($t \geq 0$)



a) Asimilando la masa M a un punto, establecer un eje de referencia conveniente al caso, completar la siguiente tabla para **x** = $\boldsymbol{x}$(t) con $\boldsymbol{x}$(t) = **sen t + cos t** y representar sobre dicho eje la "trayectoria" de M desde t = 0 hasta t = 5 $\frac{\pi}{2}$.

		$(\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{2})$	$(3\frac{\pi}{4})$	π	$5\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{2}$	$7\frac{\pi}{4}$	2π	$9\frac{\pi}{4}$	$5\frac{\pi}{2}$
t	0	0.78	1.57	2.36	3.14						
x		$\sqrt{2}$		0			-1				1

b) Describir el movimiento de **M** analizando para ello la trayectoria y el comportamiento de la función de posición para t → +∞ (indicar con qué característica *física* del movimiento relaciona este resultado) .

c) Graficar **x** = $\boldsymbol{x}$(t) en un sistema cartesiano **x-t.**
(*Sugerencia:* expresar la función de "otra forma"; acudir para ello a identidades Trigonométricas. Es decir, hallar **A** y α / **x**(t) = **A** sen (t + α)).

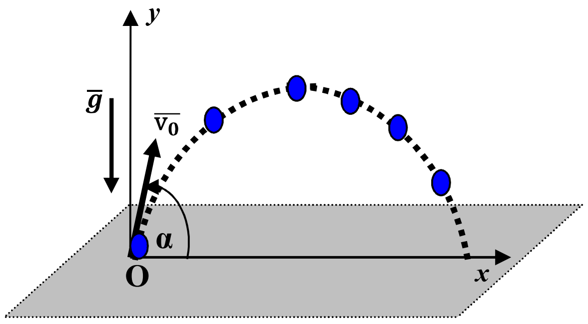
d) Hallar el ***desplazamiento máximo***, $\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$, de la masa como acción de la fuerza $\overline{\mathbf{F}}$.
Nota: el "desplazamiento máximo" puede darse tanto a izquierda como a derecha del punto de equilibrio pues, $\mathrm{d}_{\mathrm{espl.}} = |\, \mathrm{x} - 0 \,|$.)

e) ¿En qué instantes alcanza el desplazamiento máximo? Dar al menos ***cuatro***.

f) ¿Existe una función con la cual, conocida la posición de la masa, se puede calcular el tiempo que hace que la misma se está moviendo ?. (¿ g ? / t = g(x)).
Por ejemplo, si nos informan que x = $\sqrt{2}$; ¿alcanza este dato para determinar el tiempo que hace que la masa se está moviendo?.
¿Y si nos dijeran que x = $\sqrt{2}$ y ***la masa pasó dos veces por su posición de equilibrio***?, podríamos decir cuanto hace que la masa se está moviendo?

3. Cuando se dispara un proyectil desde el origen (O), la "trayectoria" del mismo es una parábola de ecuación:

$$y = \mathbf{m}\,x - \frac{16}{\mathbf{v_o^2}}\,(1 + \mathbf{m}^2).\ x^2 .$$



O sea $y = f(x)$, con:

x = desplazamiento "horizontal"(**v.i.**)
y = desplazamiento "vertical" (**v.d.**)

→ $\overline{\mathbf{v_0}}$ = ***vector velocidad inicial***

$$\overline{\mathbf{v_o}} = (\mathbf{v_{ox}}\,;\mathbf{v_{oy}})$$

→ $\mathrm{v_o}$ = ***módulo de*** $\overline{\mathbf{v_0}}$

$$\mathrm{v_o} = \sqrt{\mathbf{v_{ox}^2} + \mathbf{v_{oy}^2}}$$

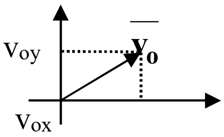
→ **m** = *tg* α ; α = ángulo $\overline{\mathbf{v_0}}$ y ***eje x.***

$$tg\ \alpha = \frac{\mathbf{v_{oy}}}{\mathbf{v_{ox}}}$$

→ $\overline{\mathbf{g}} = (\,\mathbf{0};\, g\,)$
vector aceleración de la gravedad
g = - 32 (pies/seg.)

La ***ecuación cartesiana*** para la trayectoria del proyectil se deduce a partir de las ***ecuaciones paramétricas*** del "tiro oblicuo", las que se obtienen en física, de acuerdo a los principios de la cinemática. Estas son:

$$\begin{cases} x = x_o + v_{ox} \cdot t \\ y = y_o + v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2}\, a.t^2 \end{cases} \xrightarrow[\text{a= g = −32}]{(xo;\, yo) = (0;\, 0)} \begin{cases} x = v_{ox} \cdot t \\ y = v_{oy} \cdot t - 16.t^2 \end{cases}$$



a) A partir de las ***ecuaciones paramétricas*** deducir la ***ecuación cartesiana*** de la trayectoria.
(<u>*Sugerencias*</u>: despejar ***t*** de la 1er ecuación.; reemplazarla en la 2da. Multiplicar y dividir por $\mathbf{v_o^2}$ donde convenga).

b) Demostrar que la altura máxima, y_M , alcanzada por el proyectil es:

$$y_M = \frac{\mathbf{m^2.v_o^2}}{\mathbf{64\,(1+m^2)}}\,.$$

Indicar cual es el desplazamiento horizontal cuando el proyectil alcanza y_M.

c) Indicar V ó F , justificar:

" el desplazamiento horizontal máximo es: $x_M = \dfrac{\mathbf{m\,.v_o^2}}{\mathbf{16.(1+m^2)}}$ ".

d) Ambos valores y_M y x_M , *como era de esperarse*, dependen tanto de "***m***" como de "***v_o***" (en definitiva, de $\overline{\mathbf{v_0}}$).

Tenemos así que y_M y x_M son funciones de *dos variables.*

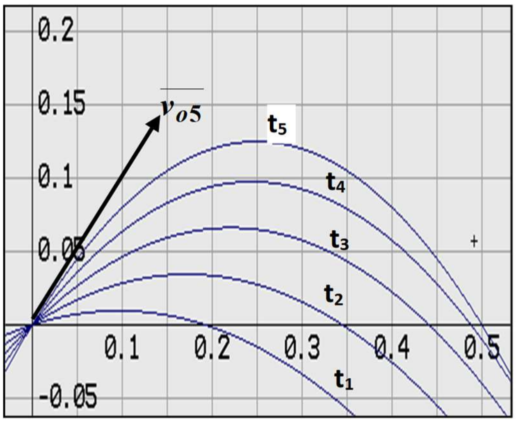
Para estudiar como incide $\overline{\mathbf{v_0}}$ sobre estos valores, te pedimos que estudies el comportamiento de las funciones que los definen, <u>***dejando***</u> $\mathbf{v_o}$ <u>***constante***</u> ; o sea, tomando y_M y x_M como funciones de "***m***" : $y_M = \mathbf{p(m)}$ y $x_M = \mathbf{q(m)}$.

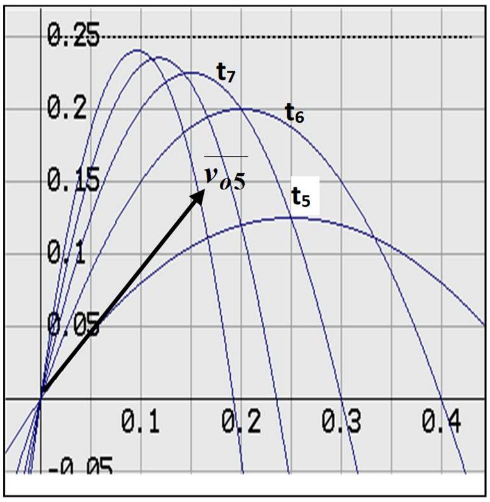
Estudiadas las funciones **p** y **q** <u>*por separado*</u> (máximos, mínimos, límites para $m \to \infty$; relación con $\overline{v_o}$, qué pasa si $v_{ox} = 0$ ($\overline{v_o} = \frac{\pi}{2}$); ó $v_{oy} = 0$ ...)
te pedimos que, usando los resultados obtenidos, <u>*analices y describas*</u> que pasa con las ***trayectorias*** a medida que $m \to \infty$; o sea, qué pasa ***con el movimiento*** .
Para hacer este análisis te sugerimos:

1ro) reflexionar acerca del enunciado del problema; es decir, si $\mathbf{v_o} = \text{cte}$, ¿ puede $\overline{\mathbf{v_0}}$ tener alguna incidencia sobre y_M y x_M ?, ¿porqué ?

2do) Acudir al apoyo "gráfico"; o sea, graficar algunos casos para orientar el análisis, la obtención de conclusiones y, fundamentalmente, el <u>*informe*</u> de las mismas *(ver graficas).*

Para ayudarte en este paso, a continuación te presentamos gráficas que representan la trayectoria de un proyectil lanzado siempre con la misma rapidez inicial (v_o = 4), pero con distintas inclinaciones (distintos "***m***"). Enumera las trayectorias (t_1 ; t_2 ; ....; t_6 ; t_7 ..) y relaciona las mismas con valores crecientes de "***m***" → $0 < m_1 < m_2 \ldots < m_{x_M} = 1 < m_6 < m_7 < \ldots$ (<u>***sin hacer cuentas***</u> ***!!***, <u>***usando los resultados hallados***</u> ***!!***)





4. La función **f**(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ se presenta en probabilidad y estadística y se llama "***función de densidad normal***". Cada parámetro que aparece en ella tiene una interpretación concreta en la práctica, μ se conoce como "media" y σ como "desvío estándar". Para simplificar el estudio de esta función procedemos a tomar un caso particular ($\mu = 0$) y a "cambiar de escala" de tal modo que se elimine el factor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Se pide entonces:

a) Hacer el estudio completo y graficar la función **f**(x) = $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

b) Indicar qué papel juega σ en la forma de la curva? ¿Y μ ?

5. ***Crecimiento restringido.***

Si se estudia el crecimiento de una población **P** a partir del supuesto de que su razón de crecimiento es proporcional a la población presente ($P' = k\,P$) se demuestra que en tal caso la función que modeliza el crecimiento es una exponencial. Retomamos ahora esta cuestión pues la función exponencial tiene un crecimiento, ¡***exponencial***!! (es la que más rápido crece entre las funciones elementales) y este hecho no representa el comportamiento "real" de una población. Cualquiera sean los individuos que constituyen una población, existe un momento en donde el crecimiento de la misma comienza a declinar pues existen factores que comienzan a inhibirlo (*falta de alimento, espacio, epidemias, guerras, etc.)* Así, con el tiempo, el modelo exponencial deja de ser una buena representación del fenómeno. Estudios experimentales con distintas poblaciones indican que estas tienden a un valor **M** (población de equilibrio), valor en el que se mantienen con el paso del tiempo si no se modifican drásticamente las condiciones del sistema.

Se concluye así un modelo más apropiado para el crecimiento de una población, el cual es:

$$(\,I\,) \quad \frac{dP}{dt} = k\,.\,P\,.\,(\,M - P\,) \;; \qquad k \text{ y } \mathbf{M} \text{ constantes positivas;}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{P_e} \text{ (población de equilibrio)}$$

a) Expresar en palabras que informa esta ecuación en cuanto a la razón de crecimiento de P, en cada instante "t".

b) Si por ***población estable*** entendemos una población que permanece ***constante en el tiempo***, o sea P(t) = c $\forall t \geq 0$; ¿cuál sería el valor de c ?
(Sugerencia: *pensar ¿¿ a que velocidad varía* P ??)

c) El ***comportamiento de la población*** depende de la población inicial, **P₀**, y puede ser deducido de la ecuación (I) *aún cuando no conozcamos la ley de* P.
Así, te pedimos que teniendo en cuenta (I) completes las siguientes afirmaciones:

i) Si $\mathbf{P_0 < M}$ entonces $\frac{dP}{dt}(0) \ldots\ldots 0$.

(considerar que $\frac{dP}{dt}(0) = k.P(0).(M - P(0))$)

ii) $\frac{dP}{dt}(t)$ es continua entonces por el teorema de ....,

para todo **t** próximo a cero, $\frac{dP}{dt}(t) \ldots\ldots 0$,

con lo cual la población .... (*crece o decrece*?)

iii) Si $\mathbf{P_0 > M}$ entonces $\frac{dP}{dt}(0) \ldots\ldots 0$.

iv) Como $\frac{dP}{dt}(t)$ es continua entonces por el teorema de ....,

para todo **t** próximo a cero, $\frac{dP}{dt}(t) \ldots\ldots 0$,

con lo cual la población .... (*crece o decrece*?)

d) Demostrar que **P**(t) = $\frac{M.P_o}{P_o + (M - P_o).e^{-M.k.t}} = \frac{M}{1 + (M/P_o - 1).e^{-Mkt}}$

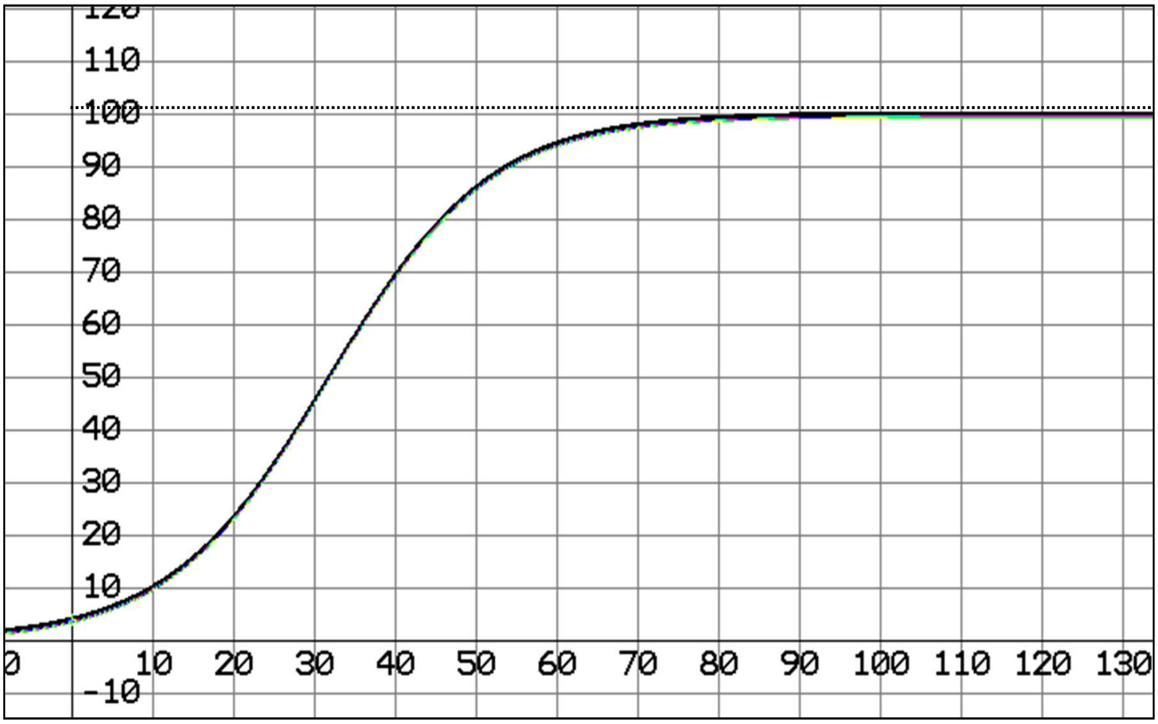
verifica la ecuación (I).
A esta función que aparece en muchos fenómenos biológicos y químicos, se la conoce con el nombre de "***ecuación logística o de saturación***"

Completar: **i)** Si $\mathbf{P_0 = M}$ entonces **P(t) =** .... $\forall t \geq 0$
ii) $\forall$ **P₀**, $\lim_{t \to \infty} P(t) =$ ....

e) Si **P₀** > **M**/2 el grafico de **P** no presenta punto de inflexión, mientras que si **P₀** < **M**/2 la curva presenta un punto de inflexión para un único t > 0.
El instante en que se produce este "punto de inflexión" la población es exactamente la mitad de la población de equilibrio.

* El gráfico que se adjunta corresponde a la situación en que **P₀** < **M**/2 ; evalúa y marca en el mismo **P₀** ; **M** ; **M**/2 y el punto de inflexión que según te informamos existe en este caso.
Describe luego el comportamiento de la población que describe este gráfico, particularmente que pasa con la velocidad de crecimiento con el transcurso del tiempo, que indica al respecto el punto de inflexión.

* Grafica en el mismo sistema la función **P = P**(t) en el caso que $\mathbf{P_o = M}$.



NOTA:
La gráfica anterior es la forma típica que toma la ecuación de crecimiento (*decrecimiento*) (I) ó ***ecuación logística*** cuando $P_o < M/2$. Esta ecuación modeliza muchos otros fenómenos además del crecimiento de una población, entre ellos la propagación de una epidemia o la concentración del producto en ciertas reacciones químicas.

5. Una persona en una cierta población, P*, contrae una enfermedad infecciosa de la cual son susceptibles de contagiarse todos los miembros de la población. Si con i(t) indicamos el número de personas infectadas hasta el instante "t" , con s(t) el número de personas aún no infectadas hasta ese instante; o sea,

$i(t) + s(t) = P^*$; entonces en tal caso se tiene que $\frac{ds}{dt} = k\,.\,s(t).\ i(t)$.

Se pide:

a) Expresar en palabras que dice esta ecuación. Mostrar que esta es, en esencia, la ecuación (I) del problema 4 (expresar la ecuación con sólo la función ***s***).

b) Discutir el signo de k para que la ecuación modelice efectivamente lo que pasa con "s".

c) Dar fórmula explícita para ***s***(t). (tener en cuenta la solución dada en el problema 4 para ecuaciones del tipo (I))

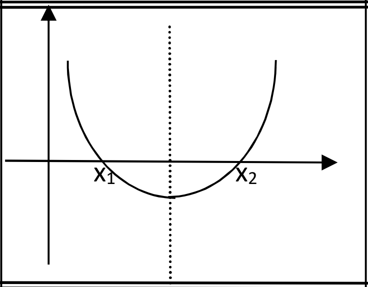
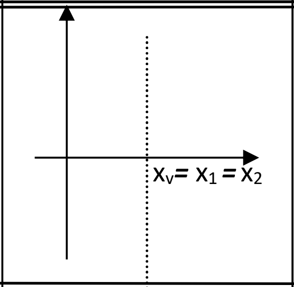
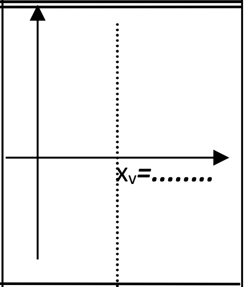
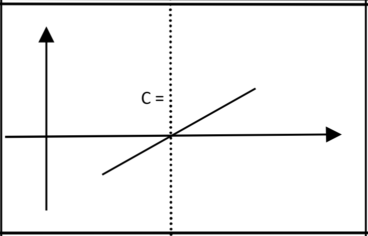
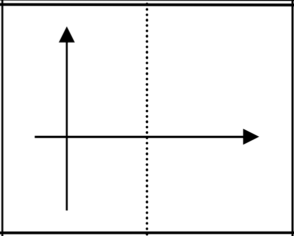
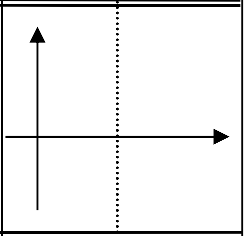
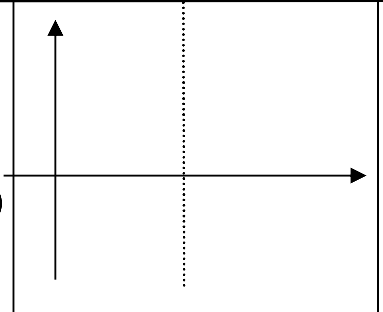
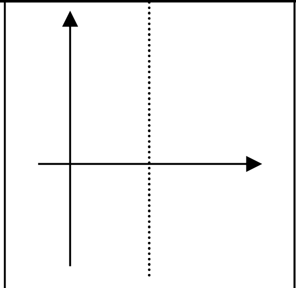
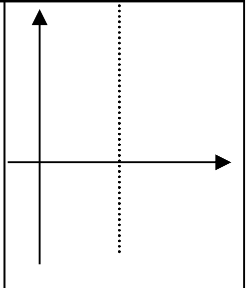
d) ¿Qué pasa con ***s***(t) a medida que pasa el tiempo si no llega asistencia sanitaria; o sea, si no se controla la epidemia? ¿Cómo "estima" esto?, ¿tiene sentido el resultado obtenido?

6. Dada **f**(x) = **A x^3 + B x^2 + C x + D** con **A** $\neq$ 0 ; Df = R:

a) ¿Qué condiciones sobre A, B y C determinan que **f** sea estrictamente creciente?

b) Demostrar que cualquiera sean los coeficientes, **f** siempre tiene punto de inflexión.

c) Demostrar que f puede tener dos, uno o ningún punto crítico; hacer un bosquejo del gráfico de f para cada caso completando el cuadro de "gráficos" para A>0 ; B< 0. ***Resumir*** en palabras, y ***en orden al nro de ceros de f***, todas las situaciones que se (*Sugerencia*: en el caso de ser posible, "factorizar" f puede ayudar)

f´(x) = 0	$x_1 \neq x_2$ (reales)	$x_1 = x_2$	$x_1 \neq x_2$ (complejos)
Graf. f´			
Graf. f´´			
Graf. f (Concluir sobre los ceros de f)	 *Graficar los 5 casos posibles*:	 *Graficar la recta tg* *Graficar 3 casos posibles*	 *Graficar la recta tg* *Graficar para*
	1-2) 0 $\leq$ f (x_m) < f (x_M). 3) f (x_m) < 0 < f (x_M). 4-5) f (x_m) < f (x_M) $\leq$ 0	1*) f (x_1) > 0. 2) f (x_1) = 0 3) f (x_1) < 0.	1**) f (x_v) > 0. comparar con (1*)

7. Mostrar que si f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D con A $\neq$ 0 tiene tres raíces reales y distintas x_1, x_2, x_3, entonces la abscisa del punto de inflexión es:

$$x_{PI} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Sugerencia: derivar la forma "factorizada" de f ; o sea, f(x) = A (x-x_1) (x-x_2) (x-x_3).

8. Hallar f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D y graficarla si se sabe que tiene un máximo relativo en x = -2 con $\mathbf{M}_r$ = 10 y un mínimo relativo en x = 1 con $\mathbf{m}_r$ = - 7/2 .

Si tiene tres raíces reales y distintas verificar que $x_{PI} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

9. S puede probar que si f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D con A $\neq$ 0 tiene tres raíces reales y distintas x_1, x_2, x_3, entonces :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = -\dfrac{B}{A} \\ x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + x_1 . x_3 & = \dfrac{C}{A} \\ x_1 . x_2 . x_3 & = -\dfrac{D}{A} \end{cases}$$

Hallar y graficar f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D si se sabe que sus raíces son $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$ y f (0) = 4.

10. **a)** Mostrar que si f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D con A $\neq$ 0 tiene tres raíces reales e iguales $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, entonces
f(x) = A x^3 - 3α A x^2 + 3α^2 A x - α^3A , y que en tal caso en $x = \alpha$ hay un punto de inflexión a tangente horizontal.

b) Hallar y graficar f(x) = A x^3 + B x^2 + C x + D si se sabe que $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ y f(0) = 4

11. Supongamos que la presión **p** (en atm,), el volumen **V** (en cm^3) y la temperatura **T** (en grados Kelvin) de **n** moles de bióxido de carbono (CO_2) satisfacen la ecuación de Van der Waals:

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right).(V - n.b) = n.R.T$$ con a, b y R constantes empíricas.

Para determinar el valor de estas constantes se realiza el siguiente experimento: se comprime un mol de CO_2 manteniendo la temperatura constante e igual a T = 304 K. Los datos medidos de presión y volumen se grafican en el plano en una curva pV (isoterma). A la temperatura en que se realiza la experiencia la curva (que es decreciente) presenta un punto de inflexión a *tangente horizontal*, en V = **128,1** ; p = **72,8** .
Usar estos datos para determinar **a, b** y **R**.

Sugerencia : *despejar* ***p*** *en función de* ***V*** *de la ecuación de Van der Waals, calcular p´ y p´´ .*

5— Vectores

Las distintas ciencias que se ocupan de estudiar fenómenos naturales tienen por fin describirlos en forma *cualitativa* y, toda vez que sea posible, hacerlo también en forma ***cuantitativa.*** O sea que un objetivo importante de estos estudios es tratar de caracterizar los fenómenos a través de ´*magnitudes*´ .

(*) ***magnitud*** **:** toda característica de un cuerpo o sistema susceptible de ser *comparada y sumada*. (o sea, ***medida***)

Las magnitudes se dividen en escalares y vectoriales según alcancen o no los números reales para caracterizarlas. (escalar ≈ número real)

» ***Magnitudes escalares****:* longitud; temperatura; tiempo; volumen……..
» ***Magnitudes vectoriales****:* fuerza; velocidad; aceleración…..

Para *"caracterizar"* una magnitud vectorial "*no bastan los números reales"*. Sabido es que el efecto de una fuerza no queda determinado sólo por su *intensidad*, sino que depende también de su *dirección y sentido*. Luego, para las ***magnitudes vectoriales***, es necesario establecer ***un nuevo instrumento matemático*** el cual oficie como los números para las magnitudes escalares. Tal instrumento deberá entonces identificar en forma precisa no solo una ´***medida***´, sino también una ´***dirección***´ y un ´***sentido***´.

BÚSQUEDA DEL NUEVO INSTRUMENTO: de la geometría clásica conocemos que, dos puntos distintos determinan un ***segmento;***

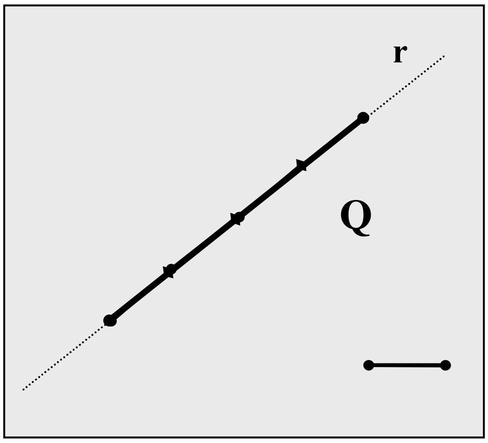
$\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ $\xrightarrow{\text{determinan}}$ segmento $\overline{PQ}$

y, que en un segmento se distingue:

- **una medida**: número de veces que la unidad de long. **(U)** **"**entra" en el segmento.

$$\text{longitud } \overline{PQ} = \textbf{med } \overline{PQ} \text{ x } \mathbf{U} = \underbrace{\mathbf{4 \text{ cm.}}}_{} \quad \frac{\text{med}\,\overline{PQ}=4}{U=\text{cm.}}$$

- **una dirección:** recta determinada por **P** y **Q.**



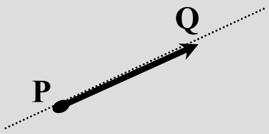
☺ Se observa así que los segmentos poseen ***"dos"*** de los elementos requeridos.
El elemento faltante, el ***sentido***, se obtiene fijando un ***orden*** entre los puntos que determinan el segmento.

5.1 DEFINICIÓN

DEFINICIÓN 1: segmento orientado

Segmento determinado por un ***par “ordenado”*** (*) ***(P,Q)*** de ***puntos distintos.***

Se indica: $\overline{PQ}$ ó $\overrightarrow{PQ}$



(*) ***par ordenado***:

Par de puntos donde el *orden* es otro elemento del par. O sea , donde **(P, Q)** ≠ **(Q, P)**

$$(P,Q)\begin{cases} P \rightarrow \text{Primer punto del par: origen} \\ Q \rightarrow \text{Último punto del par: extremo} \end{cases}$$

Así, en el “segmento orientado” $\overline{PQ}$ se distinguen tres elementos:

- » **MEDIDA** ➔ la del segmento $\overline{PQ}$. Se indica $|\overline{PQ}|$ y se llama “***módulo***”.
- » **DIRECCIÓN** ➔ recta determinada por P y Q.
- » **SENTIDO** ➔ el segmento “*se orienta*” desde el origen hacia el extremo. Este hecho se indica poniendo una flecha en el extremo.

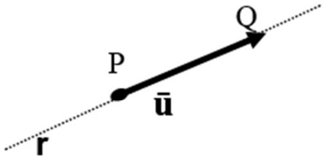
OBSERVACIÓN: los ***segmentos orientados*** presentan los ***tres elementos*** que caracterizan al ***nuevo instrumento*** que estamos buscando. Pero ***no alcanzan*** para definirlo, existe todavía una cuestión a resolver: si **P ≠ Q,** los segmentos orientados tienen una medida “*no nula*”; o sea, con ellos no podemos representar *magnitudes nulas* (como por ejemplo: fuerza nula, velocidad o aceleración cero, etc.).

Esta cuestión se resuelve si sacamos la restricción de que los puntos sean distintos; o sea, aceptamos que origen y extremo “*coincidan”*. En tal caso el segmento queda reducido a un ***punto***, el cual podemos asimilar a un segmento de “***medida cero”***.

Finalmente estamos en condiciones de definir el nuevo instrumento, al que llamamos ***“vector”.***

DEFINICIÓN 2: **VECTOR**

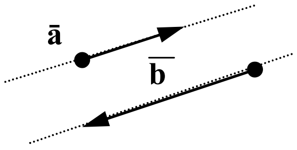
VECTOR ***es todo segmento orientado ó todo punto del espacio.***

VECTORES	GEOMETRÍA	GEOMETRÍA ANALÍTICA
• **vectores no nulos:** $\bar{u} = \overline{PQ}$  	**ū** ➔ seg. orientado **módulo** : $\lvert \bar{u} \rvert$ = med $\overline{PQ}$ **dirección** : recta **r** **sentido** : **P ➔Q**	(*) en ***geometría analítica*** el vector se define de otra forma, pues si bien la ′flecha′ contiene toda la información, es una representación pictórica más que un objeto cuantitativo. Veremos luego la definición ′***formal***′ del concepto de VECTOR.
• **vector nulo**: $\bar{0}$ ● P≡Q	**ō** ➔ punto P **módulo** : 0 (cero) **dirección**: (*no tiene*) **sentido**: (*no tiene*)	

DEF 3: **versor** ➔ vector de módulo 1.

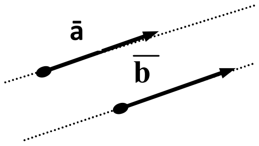
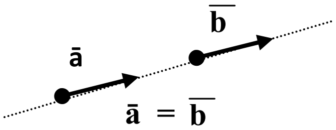
DEF 4: $\bar{u}_0$ = versor asociado al vector $\bar{u}$ ➔
$|\,\bar{u}_0\,| = 1$
dirección $\bar{u}_0$ = dirección $\bar{u}$
sentido $\bar{u}_0$ = sentido $\bar{u}$

DEF 5: ***vectores paralelos*** ➔ $\bar{a} \,//\, \overline{b}$



$\bar{a} \,//\, \overline{b} \Leftrightarrow \bar{a}$ y $\overline{b}$ tienen la misma *"dirección"*

DEF 6: **igualdad de vectores.** (existen tres definiciones de igualdad)

$\overline{a} = \overline{b}$		
6.1- LIBRES	**6.2** - DESLIZANTES	**6.3** - FIJOS
$\bar{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \bar{a} \,//\, \overline{b}$ e igual módulo y sentido  $\bar{a} = \overline{b}$	$\bar{a} = \overline{b} \Leftrightarrow$ colineales e igual módulo y sentido 	$\bar{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \bar{a} \equiv \overline{b}$ • o sea, igual módulo, dirección y sentido e igual origen.  $\bar{a} \equiv \overline{b}$

En el desarrollo de la materia trabajamos con "VECTORES LIBRES"

5.2 Operaciones

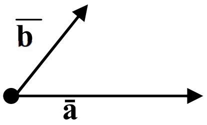
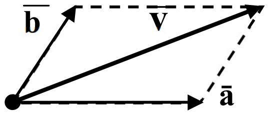
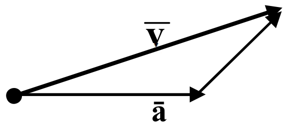
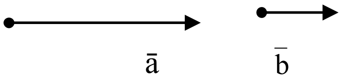
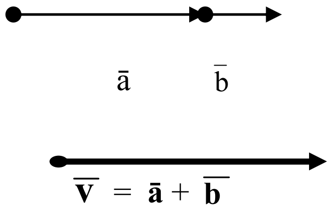
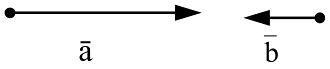
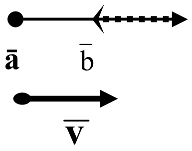
	resultados	
OPERACIONES CON VECTORES:	**vector**	**número**
O_1 – SUMA ……..	$\overline{u} + \overline{V}$	
O_2 – PRODUCTO por un ESCALAR ……..	$\alpha \,.\, \overline{u}$	
O_3 - PRODUCTO ESCALAR ……………………………………….		$\overline{u} \,.\, \overline{V}$
O_4 - PRODUCTO VECTORIAL …….	$\overline{u} \wedge \overline{V}$	
O_5 - PRODUCTO MIXTO ……………………………………….		$(\overline{u} \wedge \overline{V}).w$

OBSERVACIÓN: vimos que los vectores admiten dos formas de ser definidos; luego, existen dos formas de definir las operaciones entre vectores:

a) ***geométrica;***
b) ***analítica***.

a) DEFINICIÓN ***GEOMÉTRICA*** DE LAS OPERACIONES.

O₁ – SUMA : $\bar{a} + \bar{b} = \bar{v}$ → es un nuevo vector definido como sigue:

$\bar{a}$ y $\bar{b}$ $\not\parallel$	en término de paralelogramos	en término de triángulos
	$\bar{v}$ ➔ diagonal del paralelogramo que determinan $\bar{a}$ y $\bar{b}$ 	$\bar{v}$ ➔ 3er lado del triángulo que determinan $\bar{a}$ y $\bar{b}$, uno a continuación de otro. 
$\bar{a}//\bar{b}$ ♦ **Igual Sentido**	- no existe paralelogramo.	- el triángulo colapsa en un en un ***segmento.*** ♦ **Igual Sentido**
 (los dos ´contribuyen´ al nuevo vector) ♦ **Distinto Sentido**		 ♦ **Distinto Sentido**
 (el 2do ´resta´ al 1ro)		

PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES:

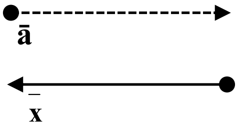
S₁) conmutativa ➔ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

S₂) asociativa ➔ $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

S₃) existencia **de neutro**: el vector nulo $\bar{o}$ ➔ $\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$

S₄) existencia de **opuesto de $\bar{a}$** : $\bar{x}$ ➔ $\bar{x} + \bar{a} = \bar{o}$

Por definición, el vector nulo es ´***un punto***´. Luego, para que $\bar{x} + \bar{a}$ de por resultado ´***un punto***´, $\bar{x}$ debe tener igual *mdulo* y *dirección* que $\bar{a}$ pero, ***distinto sentido*** que $\bar{a}$.

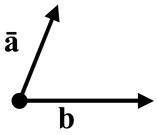


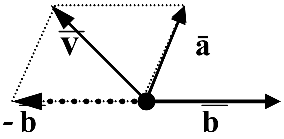
OBSERVACIONES:

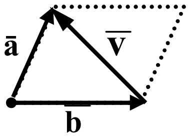
1) $\bar{x}$ (opuesto de $\bar{a}$) se indicará: **$-\bar{a}$** .

2) la existencia de opuesto, permite definir otra operación: ***resta de vectores***

RESTA : $\overline{v} = \bar{a} - \overline{b} \overset{def.}{=} \bar{a} + (-\overline{b})$ ($\bullet\!\!\longrightarrow$ opuesto de $\overline{b}$)







$\overline{v}$ → vector que *cierra* el triángulo que determinan **ā** y $\overline{b}$

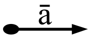
O2 – PRODUCTO por un ESCALAR → α . ā → es un nuevo vector

$\overline{v} = \alpha . \bar{a}$ ↔ $\alpha \in R$ ↔ número x vector

es un

VECTOR →

EJEMPLO :

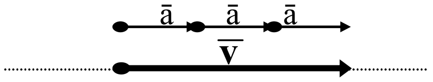


valor absoluto

MÓDULO: $|\alpha . \bar{a}| = |\alpha| . |\bar{a}|$

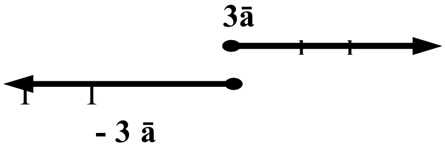
módulo

$\overline{v} = 3 . \bar{a} \rightarrow |\overline{v}| = 3\,|\bar{a}|$



DIRECCIÓN: la de **ā**, si $\alpha \neq 0$
(si $\bar{a} \neq \bar{o}$)

SENTIDO: (si $\bar{a} \neq \bar{o}$)
- el de **ā** ; si $\alpha > 0$
- opuesto de **ā** ; si $\alpha < 0$



PROPIEDADES:

1) $0 . \bar{a} = \bar{o}$

2) $\alpha . \bar{o} = \bar{o}$

3) $(-1). \bar{a} = -\bar{a}$ → ***opuesto de*** ā , pues:
- módulo (-1).ā = módulo ā
- dirección (-1).ā = dirección ā
- sentido (-1).ā *opuesto* al de ā

4) $\bar{a}_0 = \frac{1}{|\bar{a}|} . \bar{a}$ → ***versor asociado a*** ā, pues:

$$|\bar{a}_0| = \left|\frac{1}{|\bar{a}|} . \bar{a}\right| = \frac{1}{|\bar{a}|} . |\bar{a}| = 1$$ → módulo $\bar{a}_0 = 1$

→ dirección $\bar{a}_0$ = dirección **ā**

$\frac{1}{|\bar{a}|} > 0$ → sentido $\bar{a}_0$ ***igual*** al de **ā**

5) CONDICIÓN DE PARALELISMO

$\bar{a}$ y $\bar{b}$ no nulos; entonces $\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \mathbf{R}$ **tal que** $\bar{a} = \alpha . \bar{b}$

* el símbolo ⇔ es una doble implicación, luego “la demostración de un teorema que involucre este símbolo consta de *dos demostraciones*, una para cada implicación”.

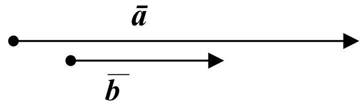
(1)(⇐) Si $\bar{a} = \alpha . \bar{b}$ entonces $\bar{a} \parallel \bar{b}$

Demostración: Si $\bar{a} = \alpha . \bar{b}$ entonces por definición de *nro por vector* tenemos:
dirección $\bar{a}$ = dirección $\bar{b}$; luego, por def . de paralelismo: $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

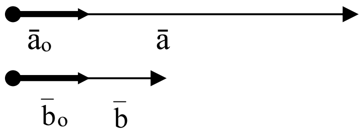
(2)(⇒) Si $\bar{a} \parallel \bar{b}$ entonces $\bar{a} = \alpha . \bar{b}$

Demostración: si $\bar{a} \parallel \bar{b}$, entonces tienen igual dirección pero pueden tener distinto sentido.

(5-I) $\bar{a}$ y $\bar{b}$ → igual sentido



(5-I) Consideramos los versores asociados



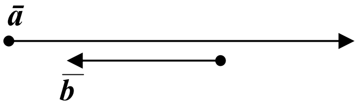
$$\bar{a}_0 = \bar{b}_0$$

$$\frac{1}{|\bar{a}|} . \bar{a} = \frac{1}{|\bar{b}|} . \bar{b}$$

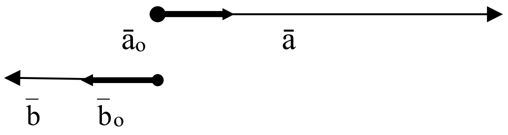
$$\bar{a} = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} . \bar{b}$$

$$\boxed{\bar{a} = \alpha . \bar{b}}$$

(5-II) $\bar{a}$ y $\bar{b}$ → distinto sentido



(5-II) Consideramos los versores asociados



$$\bar{a}_0 = - \bar{b}_0$$

$$\frac{1}{|\bar{a}|} . \bar{a} = - \frac{1}{|\bar{b}|} . \bar{b}$$

$$\bar{a} = - \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} . \bar{b}$$

$$\boxed{\bar{a} = \alpha . \bar{b}}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN VECTOR

$\forall\ \bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores y $\forall\ \alpha, \beta$ números reales se verifica:

P_1) Existencia de elemento neutro → $1.\ \bar{a} = \bar{a}$
P_2) Asociativa → $\alpha . (\beta . \bar{a}) = (\alpha . \beta) . \bar{a}$
P_3) Distributiva respecto de la suma de vectores → $\alpha . (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha . \bar{a} + \alpha . \bar{b}$
P_4) Distributiva respecto de la suma de números → $(\alpha + \beta) . \bar{a} = \alpha . \bar{a} + \beta . \bar{a}$

OBSERVACIÓN:

Las propiedades enunciadas respecto a las operaciones vistas indican que las **ecuaciones vectoriales** se resolverán de la misma forma que las numéricas.
Así, por ejemplo, si en la siguiente expresión $\boldsymbol{x}$ es un vector incógnita y los restantes son vectores conocidos, $\boldsymbol{x}$ se obtiene *despejando* en la ecuación.

$$2\ \bar{a} + 3\boldsymbol{x} - 5\ \bar{b} = 5\ \bar{a} \Rightarrow 3\boldsymbol{x} = 3\ \bar{a} + 5\ \bar{b} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \bar{a} + 5/3\ \bar{b}$$

5.3 Espacios Vectoriales – Bases

El espacio en que vivimos tiene 3 dimensiones, o sea, es ***tridimensional***. Esto significa que para poder ubicar e identificar puntos y/o vectores del espacio se necesita un sistema de referencia formado con tres ejes . Muchas veces las particularidades del hecho a estudiar permite el trabajo en un espacio de menor dimensión (uni ó bi-dimensional).
Para identificar el ***espacio de trabajo***, usaremos las siguientes notaciones:

R ➔ ***espacio unidimensional*** ➔ sistema de referencia: *un eje graduado*

$\mathbf{R}^2$ ➔ ***espacio bidimensional*** ➔ sistema de referencia: *dos ejes graduados* ⊥ entre sí.

$\mathbf{R}^3$ ➔ ***espacio tridimensional*** ➔ sistema de referencia: *tres ejes graduados* ⊥ entre sí.

Según la dimensión también distinguimos tres conjuntos de vectores; a los que llamamos

ESPACIOS VECTORIALES

$\mathbf{V_1}$ = { ū / ū es un vector de **R** ; o sea, vectores ´*contenidos*´ en ´*una recta*´ }

$\mathbf{V_2}$ = { ū / ū es un vector de **$\mathbf{R}^2$;** o sea, vectores ´*contenidos*´ en ´*un plano*´) }

$\mathbf{V_3}$ = { ū / ū es un vector de **$\mathbf{R}^3$;** o sea, vectores en el *espacio tridimensional* }

.....En lo que sigue se supone la existencia de un sistema de referencia y los vectores son concebidos como "flechas" con origen en el origen del sistema.

DEF 7 - **"combinación lineal de vectores" (c. l.)**

Dado un conjunto de "n" vectores, llamamos "combinación lineal" al

nuevo vector que resulta de multiplicar cada uno de los dados por un número real

Por ejemplo, dados los vectores ā ; $\bar{b}$; $\bar{c}$.

$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{2}\ .\ \bar{a} + \mathbf{3}\ .\ \bar{b} + ½\ \bar{c}$; **ū** es combinación lineal de ā ; $\bar{b}$ y $\bar{c}$
$\bar{\boldsymbol{v}} = \mathbf{5}\ .\ \bar{a}$; $\bar{\boldsymbol{v}}$ es combinación lineal de ā.

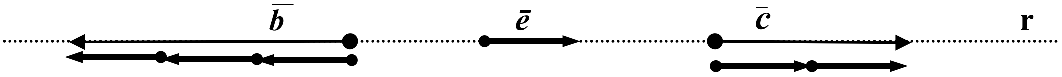
Nos interesa particularmente el caso de n = 1, n = 2 y n = 3

	vectores	*escalares*	*combinación lineal*
n = 1	$\bar{a}$	α	$\alpha \cdot \bar{a}$
n = 2	$\bar{a}$, $\bar{b}$	α , β	$\alpha . \bar{a} + \beta . \bar{b}$
n = 3	$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$	α , β , γ	$\alpha . \bar{a} + \beta . \bar{b} + \gamma . \bar{c}$

<u>Consideraciones generales acerca de la c. l. de vectores</u>

<u>NOTA</u>: En lo que sigue usamos en forma indistinta el término ´contenido´ o ´paralelo´ ya que, al trabajar con vectores libres, ambos términos *´significan lo mismo´*.

⏩ n = 1



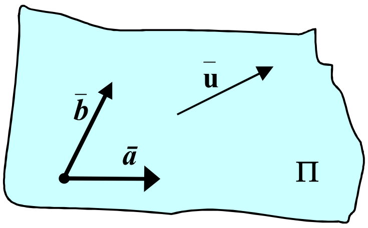
Un vector **($\bar{e}$)** determina ***una recta*** **(r) ;** por ende, un espacio vectorial unidimensional **V_1** : el de todos los vectores *´paralelos´* a **r** .
V_1 = { $\bar{v}$ / $\bar{v}$ // **r** } = { **$\bar{e}$** ; $\bar{b}$; $\bar{c}$; ....}

<u>TEOREMA 1</u>: todos los vectores de un ***espacio unidimensional*** se pueden escribir como ***combinación lineal de "un vector no nulo" de dicho espacio***.
O sea; si **$\bar{e} \in V_1$** entonces **V_1** = { $\bar{v}$ / $\bar{v} = \alpha . \bar{e}$, para algún $\alpha \in$ **R** , con **$\bar{e} \neq \bar{o}$** }

Ejemplos: $\bar{c} = 2.\bar{e}$; $\bar{b} = -3 . \bar{e}$

⏩ n = 2

Dos vectores ***no paralelos***, $\bar{a}$ y $\bar{b}$, determinan un ***plano,*** Π ; por ende, un espacio vectorial bidimensional, **V_2** (el de todos los vectores *´contenidos´* en Π).



V_2 = { $\bar{u}$ / $\bar{u}$ // Π }

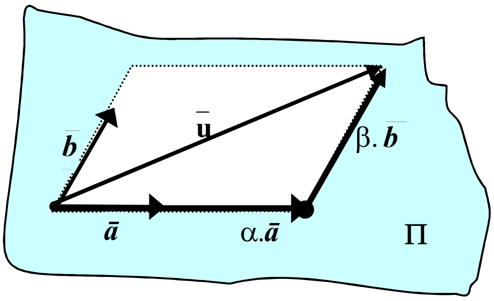
<u>TEOREMA 2</u>: todos los vectores de un ***espacio bidmimensional*** se pueden escribir como ***combinación lineal de "dos vectores no paralelos, no nulos" de dicho espacio***.
O sea; si $\bar{a}$; $\bar{b}$ $\in$ **V_2** entonces **V_2 = {** $\bar{u}$ / $\bar{u} = \alpha . \bar{a} + \beta . \bar{b}$, con α ; $\beta \in$ **R**; $\bar{a} \neq \bar{o}$; $\bar{b} \neq \bar{o}$ **}**

(*) Demostrar este teorema requiere demostrar que:

- ♦ <u>$\bar{u} \in V_2$</u> $\Rightarrow$ existen α ; $\beta \in$ **R** tal que <u>$\bar{u} = \alpha . \bar{a} + \beta . \bar{b}$</u> (lo vemos luego)
- ♦ <u>$\bar{u} = \alpha . \bar{a} + \beta . \bar{b}$</u> $\Rightarrow$ <u>$\bar{u} \in V_2$</u> (lo vemos a continuación)
- ♦ <u>$\bar{u} = \alpha . \bar{a} + \beta . \bar{b}$</u> $\Rightarrow$ <u>$\bar{u} \in V_2$</u>

En el gráfico adjunto vemos que si $\underline{\bar{u} = \alpha.\, \bar{a} + \beta.\, \bar{b}}$ entonces $\bar{u}$ **;** $\alpha.\bar{a}$ **y** $\beta.\bar{b}$ forman un <u>*triángulo*</u>. El triángulo es una figura <u>*plana*</u>; luego, $\bar{u}$ **,** $\alpha.\, \bar{a}$ y $\beta.\bar{b}$ están <u>*en el mismo plano*</u>.

Como $\alpha.\, \bar{a}$ y $\beta.\bar{b}$ están en el mismo plano que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ (o sea, en el plano Π) tenemos entonces que $\bar{u}$ está en Π (ó, $\bar{u}\ //\ \Pi$ **)** **.** Concluimos así que, $\underline{\bar{u} \in V_2}$ **.**

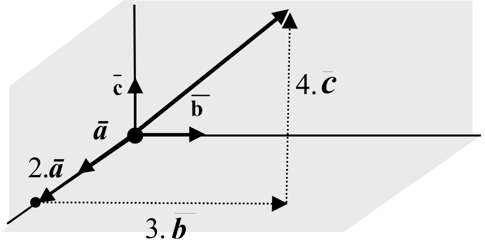


<u>TEOREMA 3</u>: todos los vectores de un ***espacio tridmimensional*** se pueden escribir como ***combinación lineal de "tres vectores no nulos con distintas direcciones" de dicho espacio***.

O sea; si $\bar{a}$; $\bar{b}$ **;** $\bar{c} \in V_3$ entonces

$V_3 = \{ \bar{v} \,/\, \bar{v} = \alpha.\, \bar{a} + \beta.\bar{b} + \gamma.\bar{c}$, con $\alpha; \beta; \gamma \in \mathbf{R}$; $\bar{a} \neq \bar{o}$; $\bar{b} \neq \bar{o}$; $\bar{c} \neq \bar{o} \}$ (s/demost.)

<u>Ejemplo</u>: $\bar{v} = 2.\, \bar{a} + 3.\bar{b} + 4.\bar{c}$



<u>OBSERVACIÓN</u>:

Los teoremas propuestos permiten observar que existe una relación entre el "*número de vectores necesarios para describir un espacio vectorial*" y la "*dimensión*" del mismo:

- **V_1** → dimensión 1 → 1 vector
- **V_2** → dimensión 2 → 2 vectores.
- **V_3** → dimensión 3 → 3 vectores.

Tenemos así el concepto de ***<u>base de un espacio vectorial</u>***.

<u>DEF 8</u> - BASE de un ESPACIO VECTORIAL

⌧ BASE de un ESPACIO VECTORIAL, es el **mínimo conjunto de vectores** necesarios para escribir con ellos "**todos los vectores del espacio** ".

<u>DEF 9</u> - BASE CANÓNICA de un ESPACIO VECTORIAL

⌧ Es una BASE cuyos elementos son **versores perpendiculares entre sí.**

<u>NOTA</u>: A los fines de estudiar *analíticamente* los vectores, trabajamos con ***BASES CANÓNICAS***.

- Base canónica de **V_1** → $\mathbf{B_1} = \{ \bar{i} \ / \ |\bar{i}| = 1 \}$
- Base canónica de **V_2** → $\mathbf{B_2} = \{ \bar{i} ; \bar{j} \ / \ |\bar{i}| = |\bar{j}| = 1 \ ; \bar{i} \perp \bar{j} \}$
- Base canónica de **V_3** → $\mathbf{B_3} = \{ \bar{i} ; \bar{j} ; \bar{k} \ / \ |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1 \ ;$

  $\bar{i} \perp \bar{j} \ ; \bar{j} \perp \bar{k} \ ; \bar{k} \perp \bar{i} \ \}$

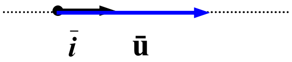
5.4 Componentes de un Vector

V_1 - ESPACIO UNIDIMENSIONAL

Ya vimos que bastaba **un vector** para escribir todos los vectores de V_1 y sólo ellos; o sea que, en el espacio unidimensional, la base está formada por un único vector.

Luego si tomamos $B_1 = \{ \bar{i} \;/\; |\bar{i}| = 1 \}$ (BASE CANÓNICA de V_1);

tenemos que: $V_1 = \{ \bar{v} \;/\; \bar{v} = \alpha . \bar{i} ,\ \alpha \in \mathbf{R} \}$
y vemos que:



$$\text{a cada } \bar{u} \in V_1 \xrightarrow[\textit{le corresponde}]{} \alpha \in R \;;\; (\alpha \,/\, \bar{u} = \alpha . \bar{i})$$

$$\text{a cada } \alpha \in R \xrightarrow[\textit{le corresponde}]{} \bar{u} \in V_1 \;;\; (\bar{u} = \alpha . \bar{i})$$

$$\bar{u} \in V_1 \xleftrightarrow[B_1]{} \alpha \in \mathbf{R}$$

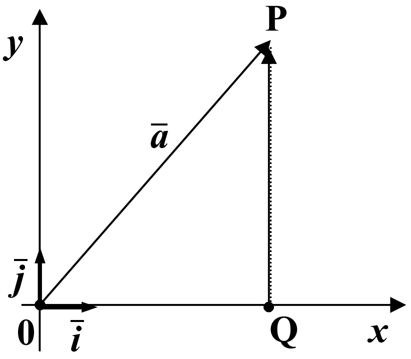
En definitiva, vemos que dada una base (B_1) podemos establecer una ***correspondencia biunívoca*** entre vectores de la recta y números reales; o sea, podemos identificar ***vectores de la recta*** con ***números reales*** .
Al número α que identifica a $\bar{u}$, lo llamamos: ***componente de*** $\bar{u}$**.**

V_2 - ESPACIO BIDIMENSIONAL

Ya vimos que la combinación lineal de dos vectores del plano es otro vector del mismo plano. Faltaba verificar que *"**todo vector del plano se puede escribir como combinación lineal de dos vectores no paralelos de dicho plano**"*; o sea, que ***dos vectores no paralelos*** del plano constituyen una base en V_2. Por simplicidad demostramos esto para B_2 (la base canónica)

$$B_2 = \{ \bar{i} \;;\; \bar{j} \;/\; |\bar{i}| = |\bar{j}| = 1 \;;\; \bar{i} \perp \bar{j} \}$$

Luego, debemos probar que si $\bar{a} \in V_2$ existen $\alpha \,;\, \beta \in \mathbf{R}$ tal que $\bar{a} = \alpha . \bar{i} + \beta . \bar{j}$



Sea $\bar{a} \in V_2$. Si por **P** (extremo de $\bar{a}$) trazamos una paralela a $\bar{j}$, obtenemos **Q**.

Luego: $\bar{a} = \overline{OQ} + \overline{QP}$

$$\overline{OQ} \,//\, \bar{i} \Rightarrow \exists\ a_x \in R \;/\; \overline{OQ} = a_x . \bar{i}$$

$$\overline{QP} \,//\, \bar{j} \Rightarrow \exists\ a_y \in R \;/\; \overline{QP} = a_y . \bar{j}$$

$$\boxed{\bar{a} = a_x . \bar{i} + a_y . \bar{j}}$$

Conclusión: todo vector del plano se puede escribir como c.l. de ***dos vectores*** , $\bar{i}$ y $\bar{j}$; o sea, **B**$_2$ es base; más aún, es la ´BASE CANÓNICA´

$$\bar{a} \in V_2 \longleftrightarrow (a_x ; a_y) \in R^2$$

$$\downarrow B_2$$

$$\overbrace{\bar{a} = a_x . \bar{i} + a_y . \bar{j}}$$

Vemos así que dada una base (B$_2$) podemos establecer una ***correspondencia biunívoca*** entre vectores del plano y pares de números reales; o sea, podemos identificar ***vectores del plano*** con ***pares de números reales*** (las ***componentes del vector***)

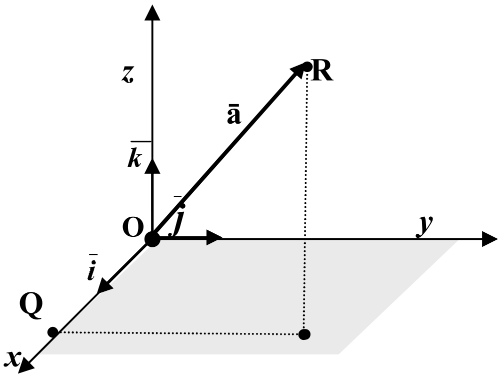
Esta correspondencia la indicamos directamente poniendo $\bar{a} = (a_x ; a_y)$

» Al número a_x lo llamamos: **1er componente de** $\bar{a}$.

» Al número a_y lo llamamos: **2da componente de** $\bar{a}$.

V$_3$ - ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Si en R^3 se trabaja en forma semejante a lo hecho en el plano se concluye que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ***vectores del espacio*** y ***ternas de números reales***.



- Sea $B_3 = \{ \bar{i} ; \bar{j} ; \bar{k} \;/\; |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1 \}$

$$\bar{a} = \overline{OQ} + \overline{QP} + \overline{PR}$$

$$\bar{a} = a_x . \bar{i} + a_y . \bar{j} + a_z . \bar{k}$$

$$\bar{a} \in V_3 \longleftrightarrow (a_x , a_y, a_z) \in R^3$$

$$\downarrow B_3$$

$$\overbrace{\bar{a} = a_x . \bar{i} + a_y . \bar{j} + a_z . \bar{k}}$$

RESUMEN:

☐ Introducido un sistema de referencia encontramos otra forma de representar un vector En forma genérica hablamos de la ***forma cartesiana*** de un vector.

☐ Existen dos maneras de representar un vector en ***forma cartesiana*** (las cuales a su vez dependen de la dimensión del espacio donde se encuentre el vector).
Así un vector puede darse como combinación lineal de los vectores de la base canónica, la cual llamamos la ***descomposición canónica del vector*** ó, por sus ***componentes***.

$$\bar{a} \in V_1 \xleftrightarrow{B_1} \bar{a} = a_x . \bar{i} \xleftrightarrow{ó} \bar{a} = (a_x)$$

$$\bar{a} \in V_2 \xleftrightarrow{B_2} \bar{a} = a_x . \bar{i} + a_y . \bar{j} \xleftrightarrow{ó} \bar{a} = (a_x , a_y)$$

$$\bar{a} \in V_3 \xleftrightarrow{B_3} \bar{a} = a_x . \bar{i} + a_y . \bar{j} + a_z . \bar{k} \xleftrightarrow{ó} \bar{a} = (a_x , a_y , a_z)$$

descomposición canónica del vector

componentes del vector

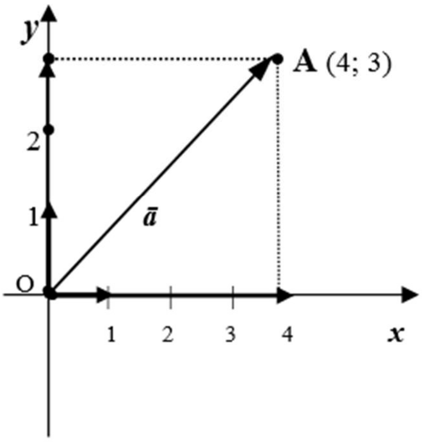
EJEMPLOS:

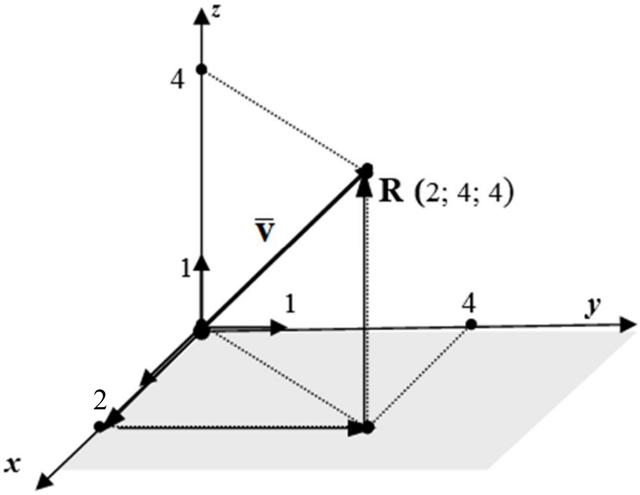
R^2: $\bar{a} = 4\,\bar{i} + 3\,\bar{j}$

$\bar{a} = (4\,;3) = \overline{\mathbf{OA}}$

R^3: $\bar{\mathbf{v}} = 2\,\bar{i} + 4\,\bar{j} + 4\,\bar{k}$

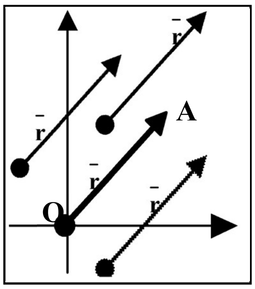
$\bar{\mathbf{v}} = (2\,;\,4\,;\,4) = \overline{\mathbf{OR}}$





• *VECTOR POSICIÓN - COMPONENTES*

Fijado un sistema de referencia sabemos ya que todo punto **A** del plano queda identificado por sus coordenadas cartesianas (***x ; y***); o sea, existe una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de nros reales (correspondencia que ´justifica´ la expresión "***punto (x ; y)***")
Para señalar el punto **A**, también se puede usar un ***"vector"***: el $\overline{\mathbf{OA}}$; o sea el vector que tiene como "*origen*" , el origen del sistema coordenado, **O**(0,0) y como "*extremo*" el punto **A**(***x; y***).



El ***segmento orientado*** $\overline{\mathbf{OA}}$ es "***una representación***" de $\bar{r}$ (***vector*** de igual módulo, dirección y sentido que $\overline{\mathbf{OA}}$**)** entre todas las representaciones posibles para este vector. A esta particular representación de $\bar{r}$**,** dado la forma como se construye, la llamamos "***vector posición del punto A"*** .
Fácilmente se ve que las **"*componentes del vector posición*** $\overline{\mathbf{OA}}$ ***"*** son las ***"coordenadas de A"***.

NOTAS:

- Cabe aclarar que trabajamos en el espacio bidimensional sólo para simplificar el tratamiento del tema. El concepto puede ser trasladado al espacio con solo considerar otro eje (el eje z).

- La relación entre $\bar{\mathbf{r}}$; $\overline{\mathbf{OP}}$ y **P** es tan cercana que en ciertos contextos resulta *conveniente* considerarlos como *"el mismo objeto matemático"*. Pero existen casos en los que resulta necesario distinguir entre $\bar{\mathbf{r}}$ y $\overline{\mathbf{OP}}$; tener en cuenta que $\bar{\mathbf{r}}$ es *cualquier* segmento orientado con igual largo y dirección que $\overline{\mathbf{OP}}$, mientras que $\overline{\mathbf{OP}}$ debe tener su origen en el origen de coordenadas.

- ***Representación gráfica de un vector***

> Dado un vector por sus componentes, $\bar{a} = (a_x ; a_y)$; el ***vector posición*** proporciona una forma simple y rápida de ***representar gráficamente dicho vector***.
> Basta graficar el punto **A** $(a_x ; a_y)$; o sea, el punto del plano cuyas "***coordenadas***" sean las componentes de $\bar{a}$; construir luego el vector posición de **A** . Finalmente, $\bar{a} = \overline{\mathbf{OA}}$.

- Cabe entonces "recordar" a que llamamos "coordenadas" de un punto **A** del plano. Si **A (x; y)** , entonces al par ordenado **(x; y)** lo llamamos "***coordenadas***" del punto **A.** En particular decimos que "***x***" es la "***abscisa***" e "***y***" la "***ordenada***" del punto **A.**
  ¿Cómo se definen las "coordenadas" ?:
  Si **P** y **R** son las proyecciones de **A** sobre el ***eje x*** y el ***eje y*** respectivamente.
  Entonces:

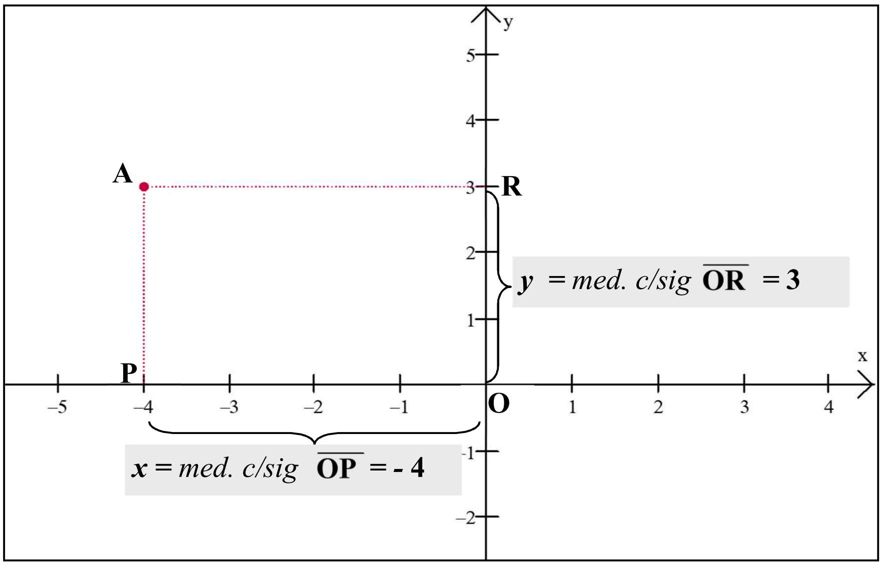
$$\boldsymbol{x} = \textit{med.c/sig } \overline{\mathbf{OP}} \begin{cases} - \textit{ med.c/sig } \overline{\mathbf{OP}} = \textit{med } \overline{\mathbf{OP}} \text{ , si } \mathbf{P} \ \underline{\text{está en el semieje } \boldsymbol{x} \text{ positivo (+)}} \\ - \textit{ med.c/sig } \overline{\mathbf{OP}} = \mathbf{-}\ \textit{med } \overline{\mathbf{OP}} \text{ , si } \mathbf{P} \ \underline{\text{está en el semieje } \boldsymbol{x} \text{ negativo (-).}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{y} = \textit{med.c/sig } \overline{\mathbf{OR}} \begin{cases} - \textit{ med.c/sig} \overline{\mathbf{OR}} = \textit{med} \overline{\mathbf{OR}} \text{ , si } \mathbf{R} \ \underline{\text{está en el semieje } \boldsymbol{y} \text{ positivo (+)}} \\ - \textit{ med.c/sig} \overline{\mathbf{OR}} = -\ \textit{med} \overline{\mathbf{OR}} \text{ , si } \mathbf{R} \ \underline{\text{está en el semieje } \boldsymbol{y} \text{ negativo (-)}} \end{cases}$$

Ejemplo*:* graficar el punto **A (- 4; 3)**

→ $\boldsymbol{x} = \mathbf{-\ 4} = \textit{med. c/sig } \overline{\mathbf{OP}}$; indica **P** a **4** unidades de **O** y en el ***semieje x*** **(-)**

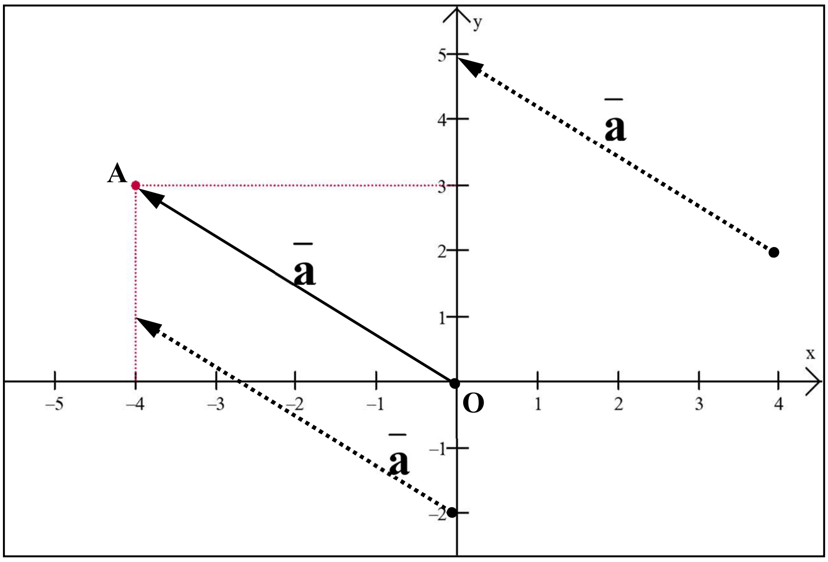
→ $\boldsymbol{y} = \mathbf{3} = \textit{med. c/sig } \overline{\mathbf{OR}}$; indica **R** a **4** unidades de **O** y en el ***semieje y*** **(+)**



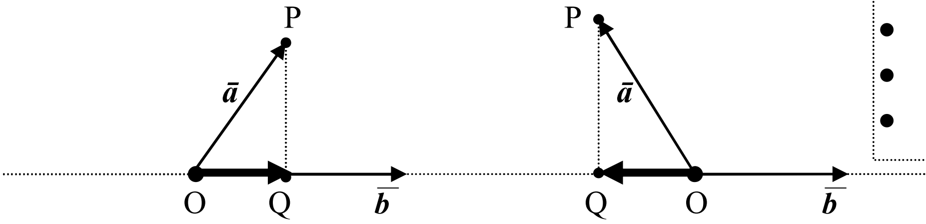
Ejemplo:

Graficar $\bar{\mathbf{a}}$ = **(- 4; 3)**

Observar que todos los segmentos orientados mostrados en el grafico adjunto, representan al vector $\bar{\mathbf{a}}$ (recordar que trabajamos con vectores "libres"); que el más "fácil" de graficar es el "***vector posición del punto* A (- 4; 3)**" ; o sea, el $\overline{\mathbf{OA}}$.



5.5 Proyección de un vector sobre otro



DATOS:
- $\bar{a}$; $\bar{b}$ → vectores
- $\bar{a} = \overline{\mathbf{OP}}$
- **O:** origen

Si por **P,** extremo de ***ā* ,** trazamos una perpendicular a la recta que contiene al vector $\bar{b}$ hasta cortarla en el punto **Q,** determinamos un nuevo vector, el vector $\overline{\mathbf{OQ}}$

DEF 10 "***vector proyección***"

Llamamos ***vector proyección de ā* sobre $\bar{b}$** al vector determinado por la proyección del extremo de $\bar{a}$ sobre la dirección de $\bar{b}$; o sea, a $\overline{\mathbf{OQ}}$

NOTA: observamos que $\overline{\mathbf{OQ}}$// $\bar{b}$ y que, sentido de $\overline{\mathbf{OQ}}$, es *igual* u *opuesto* al de $\bar{b}$.

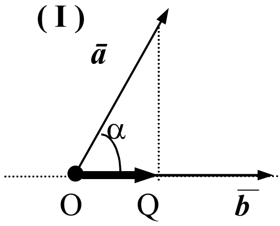
DEF 11 "***proyección de ā sobre*** $\bar{b}$ "

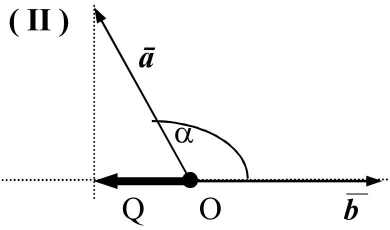
$proy_{\bar{b}}\ \bar{a}$ = medida con signo **del** vector proyección **de** $\bar{a}$ **sobre** $\bar{b}$ = $med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ}$

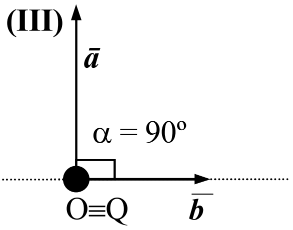
NOTA 1:
La proyección de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$ es ***la medida*** del vector proyección $\overline{\mathbf{OQ}}$ con "***un signo***" (+ ó **-**) que tiene por objetivo indicar si $\overline{\mathbf{OQ}}$ apunta (o no) en el mismo sentido que $\bar{b}$. Luego:

$$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = \begin{cases} |\overline{\mathbf{OQ}}|; & \text{si sentido } \overline{\mathbf{OQ}} \text{ \underline{igual} al sentido } \bar{b}\ ; \\ -|\overline{\mathbf{OQ}}|; & \text{si sentido } \overline{\mathbf{OQ}} \text{ \underline{opuesto} al sentido de } \bar{b}\ ; \\ \mathbf{0}; & \text{si } \overline{\mathbf{OQ}} = \bar{0} \end{cases}$$

Se observa así que existen tres situaciones posibles para el caso de la proyección de un vector sobre otro, las cuales tienen que ver con el ángulo que formen $\bar{a}$ y $\bar{b}$







$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = |\overline{OQ}|$ ($\overline{OQ}$ ***igual*** sentido que $\bar{b}$)

$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = -\,|\overline{OQ}|$ ($\overline{OQ}$ sentido *opuesto* al de $\bar{b}$)

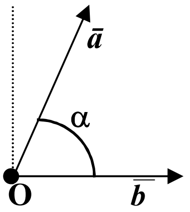
$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = 0$ ($\overline{OQ} = \bar{o}$)

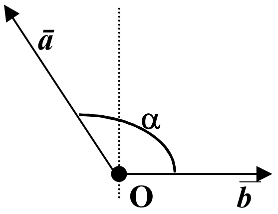
NOTA 2:

en lo que sigue veremos cómo, poniendo en juego el "*ángulo entre los vectores*", estas tres situaciones se pueden resumir en una sola fórmula.

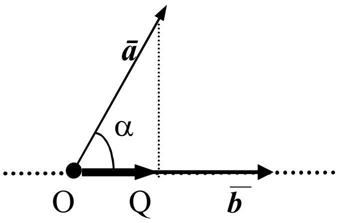
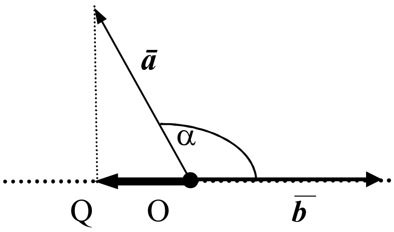
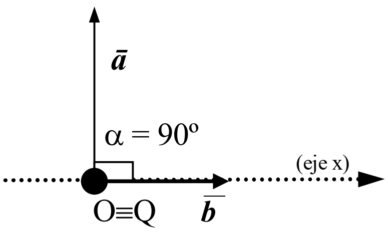
DEF: Ángulo entre dos vectores: $\alpha = \bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}$

α ➔ por ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ entendemos el ángulo ***convexo*** o ***llano*** que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$ al ubicarlos con origen común. ➔ **$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$**





Luego, y en relación al ángulo que pueden formar $\bar{a}$ y $\bar{b}$, tenemos las situaciones sgtes:

(I) $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	**(II)** $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$	**(III)** $\alpha = 90^\circ$
		
$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = |\overline{OQ}|$	$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = -\,|\overline{OQ}|$	$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = 0$

Introducido un sistema de referencia en que el *eje x* tenga la dirección y sentido de $\bar{b}$, tenemos que:

- ♦ por *trigonometría* : $abscisa\ de\ Q = |\bar{a}|\,.\,\cos\alpha$
- ♦ por *definición* de abscisa: $abscisa\ de\ Q = med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ}$.

Luego, y dado que, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, concluimos que cualquiera sea α:

$$med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ} = |\bar{a}|\,.\,\cos\alpha \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que por definición: $proy_{\bar{b}}\ \bar{a} = med.sg._{\bar{b}}\ \overline{OQ}$;

finalmente y por **(*),** tenemos que: $proy_{\bar{b}}\ \bar{a} = |\bar{a}|.\cos\alpha$.

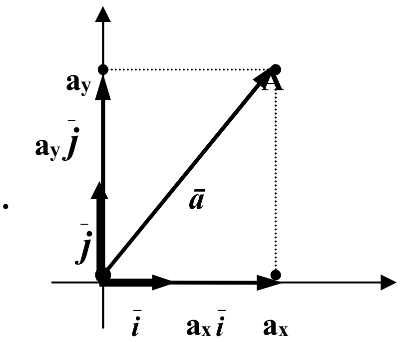
Concluimos así una *"fórmula de cálculo"* para la proyección de un vector sobre otro.

FÓRMULA DE CÁLCULO : $proy_{\bar{b}}\ \bar{a} = |\bar{a}|.\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$

- ***Relación entre las componentes de un vector y las proyecciones del vector sobre los versores de la base canónica.***

☒ Sean $\bar{a} \in V_2$ y $A(a_x; a_y)$ tal que: $\bar{a} = \overline{OA} = (a_x; a_y)$;

o sea : $\bar{a} = \underbrace{a_x.\bar{i}}_{\text{vector proy de. } \bar{a} \text{. sobre. } \bar{i}} + \underbrace{a_y.\bar{j}}_{\text{vector proy. de. } \bar{a} \text{. sobre. } \bar{j}}$



$a_x =$ abscisa de A = med. signo $(a_x.\bar{i}) = proy_{\bar{i}}\ \bar{a}$

$a_y =$ ordenada de A = med. signo $(a_y.\bar{j}) = proy_{\bar{j}}\ \bar{a}$

Luego:

$$a_x = proy_{\bar{i}}\ \bar{a} = |\bar{a}|.\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{i})$$

$$a_y = proy_{\bar{i}}\ \bar{a} = |\bar{a}|.\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{j})$$

☒ $\bar{a} \in V_3$:

En forma análoga tenemos la relación entre las componentes de un vector en el espacio y su proyección sobre cada eje coordenado.

$\bar{a} = a_x.\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ ➔

$$a_x = proy_{\bar{i}}\ \bar{a} = |\bar{a}|.\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{i})$$

$$a_y = proy_{\bar{j}}\ \bar{a} = |\bar{a}|.\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{j})$$

$$a_z = proy_{\bar{k}}\ \bar{a} = |\bar{a}|.\cos(\bar{a}\hat{\ }\bar{k})$$

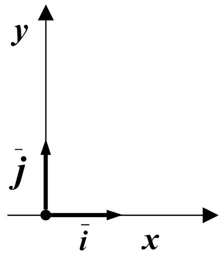
NOTA: los ángulos $\alpha = \bar{a}\hat{\ }\bar{i}$; $\beta = \bar{a}\hat{\ }\bar{j}$ y $\gamma = \bar{a}\hat{\ }\bar{k}$ se llaman ***"ángulos directores"*** y , sus cosenos, ***"cosenos directores"***.

- ***Componentes de los versores de la BASE CANÓNICA*** :

- $B_2 = \{\ \bar{i}\ ;\ \bar{j}\ /\ |\bar{i}| = |\bar{j}| = 1\ ;\ \bar{i} \perp \bar{j}\ \}$

$$\bar{i} = (i_x; i_y) = \left(\begin{array}{l} i_x = proy_{\bar{i}}\ \bar{i} = |\bar{i}|.\cos 0^\circ = 1 \\ \\ i_y = proy_{\bar{j}}\ \bar{i} = |\bar{i}|.\cos 90^\circ = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{i} = (1\ ;\ 0)$$

$$\bar{j} = (j_x; j_y) = \left(\begin{array}{l} j_x = proy_{\bar{i}}\ \bar{j} = |\bar{j}|.\cos 90^\circ = 0 \\ j_y = proy_{\bar{j}}\ \bar{j} = |\bar{j}|.\cos 0^\circ = 1 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{j} = (0; 1)$$



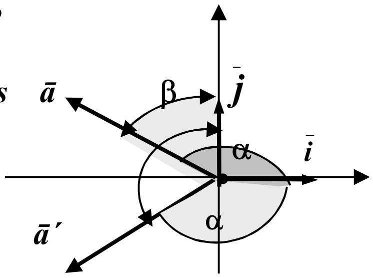
- $\mathbf{B_3 = \{ \ \bar{i} \ ; \bar{j} \ ; \bar{k} \ \ / \ |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1 \}}$

Trabajando en forma análoga se comprueba que: $\left\{ \begin{array}{l} \bar{i} = (1 ; 0 ; 0) \\ \bar{j} = (0 ; 1 ; 0) \\ \bar{k} = (0 ; 0 ; 1) \end{array} \right.$

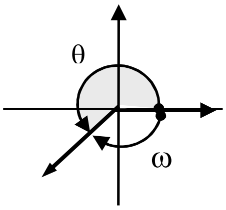
Observaciones:

Para dar un vector "***geométricamente***" debemos dar el *"módulo, dirección y sentido"* del mismo. Para el ***módulo*** basta un número real positivo mientras que para dar *´**dirección y sentido**´* se requiere de ***dos ángulos***; los ***ángulos directores*** α y β .
i damos sólo *un ángulo director*, por ejemplo $\bar{a}\,\hat{}\,\bar{i} = \alpha = 135^\circ$, este identifica dos vectores: $\bar{a}$ y $\bar{a}'$; o sea, no se identifica "***un único vector***" **.** Luego , para indicar ***uno de los vectores*** $\bar{a}$ ($\bar{a}$ ó $\bar{a}'$), debemos dar el otro ángulo *director;* o sea, $\beta = \bar{a}\,\hat{}\,\bar{j}$.

⏩ $\beta = 45^\circ \rightarrow \bar{a}$
⏩ $\beta = 135^\circ \rightarrow \bar{a}'$

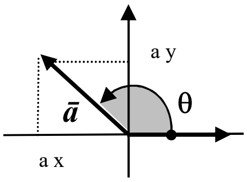


Acudiendo a las funciones trigonométricas y a los ***ángulos trigonométricos*** podemos dar ***dirección y sentido*** de un vector a través de ***un único ángulo***.



ángulo trigonométrico: porción de plano barrida por el "***semieje x*** (+)" al girar alrededor del origen de coordenadas. Para estos ángulos se distingue sentido de giro; así: el ángulo es positivo si el giro es en el sentido contrario a las agujas del reloj y, negativo en caso contrario.
Por ejemplo: θ = + 225º ; ω = - 135º

Cualquiera sea la posición del vector respecto del ***semieje x positivo***, los cosenos directores se pueden escribir en función de θ. Como consecuencia de esto, las componentes del vector se pueden expresar en función de su módulo y *un único ángulo*: θ (el "***argumento***" del vector).



$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{i}) = \cos\theta \\ \cos(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{j}) = \operatorname{sen}\theta \end{array}}$$

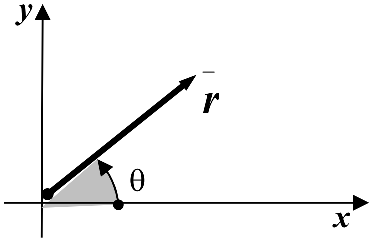
$$\boxed{\begin{array}{l} a_x = |\bar{a}| \,.\, \cos\theta \\ a_y = |\bar{a}| \,.\, \operatorname{sen}\theta \end{array}}$$

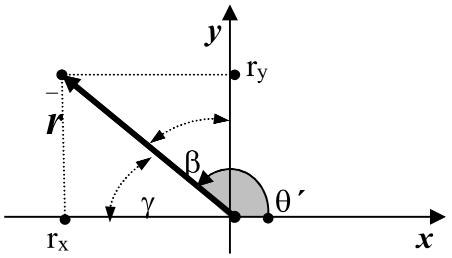
En el caso que las componentes de un vector estén dadas por el "***ángulo trigonométrico***", θ ; decimos que el vector está dado en "***forma polar***"

• *Forma polar de un vector*

Cuando el vector está dado en la forma geométrica (“*vector flecha*”), una forma rápida de identificarlo es la **“forma polar” (**basta un número real positivo y un ángulo (θ)).

$$\bar{r} = \begin{cases} r = \textbf{\textit{módulo del vector}} \ (\textit{ó radio vector}) \\ \theta = \textbf{\textit{argumento}} \ (\text{ángulo positivo entre el vector y el eje x (+)}) \end{cases}$$





NOTA: el ***argumento*** (θ) toma valores entre 0º y 360º y los ***ángulos directores*** entre 0º y 180º ; y ***son estos ángulos los que definen las componentes de un vector***.

Sin embargo, es una “*costumbre”* extendida tomar los *ángulos agudos* que el vector forma con los semiejes coordenados (β y/ó γ), realizar *luego* la discusión del signo que corresponde a las componentes, según el cuadrante donde está el vector. Esta costumbre “*histórica*” proviene de cuando *no existían las calculadoras* y el cálculo de las funciones trigonométricas de *ángulos mayores de 90º* exigía la *reducción al primer cuadrante*. Hoy día las calculadoras han resuelto este problema y permiten calcular, *directamente*, el seno o coseno del ángulo θ (con el signo que corresponde, según el cuadrante). El hecho de considerar *ángulos agudos* puede “*confundir*” los cálculos, particularmente porque seno o coseno en tal caso dan siempre “*positivos*”, podemos olvidarnos de “*discutir el signo”* que en realidad corresponde al caso.

Por ejemplo para el caso de un vector en el 2º cuadrante, podemos calcular sus componentes con cualquiera de las siguientes expresiones. ¿Porqué se recomienda la primera?: porque así se “sistematiza” el cálculo, no existe el riesgo de “olvidar” el signo, pues este lo da directamente la calculadora.

$r_x = |\bar{r}| \,.\, \cos\theta'$

$r_y = |\bar{r}| \,.\, \text{sen}\,\theta'$

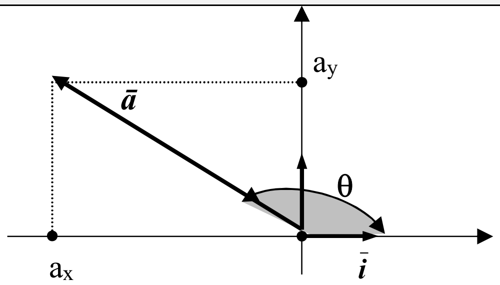
$r_x = -\,|\bar{r}|.\text{sen}\ \beta$

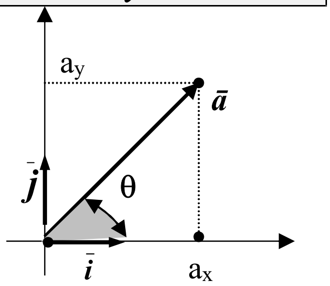
$r_y = \ |\bar{r}|.\cos\beta$

$r_x = -\,|\bar{r}| \,.\, \cos\ \gamma$

$r_y = \ |\bar{r}| \,.\, \text{sen}\ \gamma$

• *Pasaje de ´Forma Cartesiana´ a ´Forma Geométrica ó Polar ´ y viceversa*





DATO: forma POLAR de $\bar{r}$

$\bar{r}_\theta$
módulo ➔ r
dirección y sentido } θ
argumento

➔ **INCÓGNITA**: forma CARTESIANA

¿ componentes de $\bar{r}$?

$r_x = r \cos\theta$

$r_y = r \text{ sen } \theta$

DATO: forma CARTESIANA de $\bar{a}$
(componentes de $\bar{a}$)

$\bar{a} = (a_x \,;\, a_y)$
$a_x = |\bar{a}|.\cos\theta$
$a_y = |\bar{a}|.\text{sen }\theta$

➔ **INCÓGNITA**: forma POLAR de $\bar{a}$
(módulo, dirección y sentido de $\bar{a}$)

$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
$\cos\theta = a_x / |\bar{a}|$ ➔ θ
$\text{sen }\theta = a_y / |\bar{a}|$ ➔ θ

$\text{tg }\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a_y}{a_x}$ ➔ θ **(argumento)**

⌧ Para obtener θ ; debemos aplicar la *función inversa* de la tg ➔ **arc. tg**

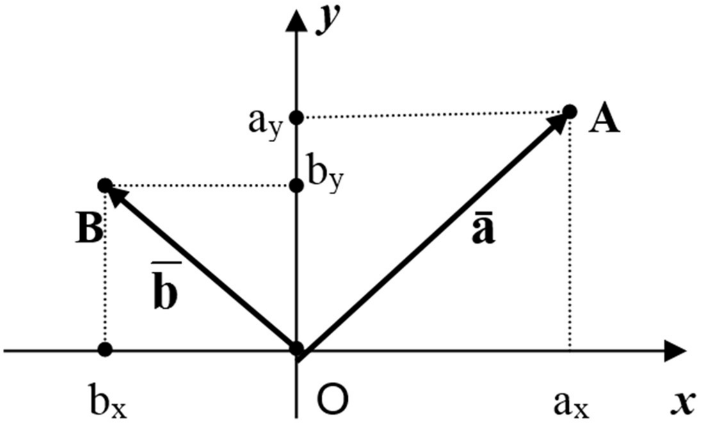
NOTA: esta función, cuyos valores obtenemos por medio de una calculadora, está definida sólo para ángulos del 1er. y 4to cuadrante; o sea, "***arc. tg θ***" da directamente el ángulo buscado *sólo en el caso que* θ *sea un ángulo del 1er. ó 4to cuadrante*. Si el vector está en el 2do ó 3er cuadrante, al ángulo obtenido con la calculadora debe aplicarse las reducciones del caso hasta obtener el ángulo que corresponda. (ver ejercicio de la práctica).

5.6 Operaciones por componentes

La correspondencia biunívoca entre vectores y pares (ó ternas) de números reales, permite identificar los vectores como pares (o ternas) de números reales, hallar así una forma más conveniente de operar con los mismos. Para demostrar esto trabajamos en $\mathbf{V_2}$

$\mathbf{V_2} = \{ \bar{v} \;/\; \bar{v} = (v_x , v_y)$ con (v_x , v_y) par ordenado de nros reales $\}$

Sean entonces $\bar{a} = (\mathbf{a_x} \,;\, \mathbf{a_y})$ y $\bar{b} = (\mathbf{b_x} \,;\, \mathbf{b_y})$ en $\mathbf{V_2}$



• OPERACIONES Y PROPIEDADES DADOS POR COMPONENTES

MÓDULO : $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ (x Pitágoras)

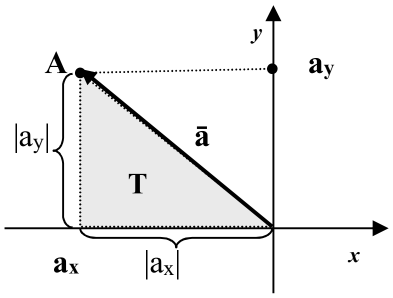
IGUALDAD: $\bar{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a_x = b_x \ , \ a_y = b_y$

SUMA : $\bar{a} + \overline{b} = (a_x + b_x \ ; \ a_y + b_y)$

PRODUCTO POR UN ESCALAR: $\alpha . \bar{a} = (\alpha . a_x \ ; \ \alpha . a_y)$

COMPONENTES DEL OPUESTO: $-\bar{a} = (-1) . \bar{a} = (-a_x \ ; -a_y)$

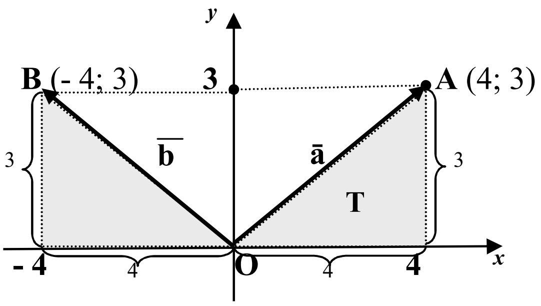
RESTA: $\bar{a} - \overline{b} = \bar{a} + (-\overline{b}) = (a_x - b_x \ ; \ a_y - b_y)$



En el triángulo rectángulo **T** el vector **ā** hace las veces de "hipotenusa"; mientras que las componentes de **ā** (en valor absoluto) proporcionan las medidas de los catetos. Luego para calcular | **ā** | (medida de la hipotenusa) aplicamos Pitágoras en **T .**

Observación: $|a_x|^2 = a_x^2$ y $|a_y|^2 = a_y^2$

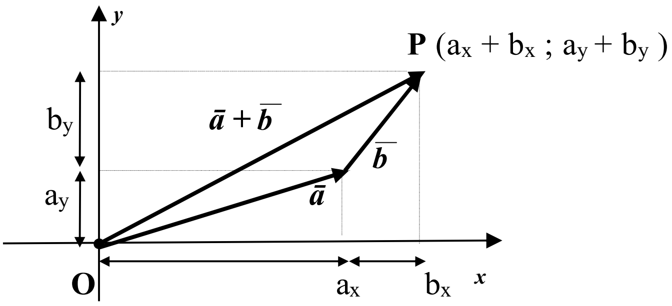
Ejemplo: Hallar el módulo de $\bar{a}$ y $\overline{b}$, si $\bar{a} = (4 \ ; 3)$ y $\overline{b} = (-4 \ ; 3)$.



$$|\bar{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

SUMA: $\bar{a} + \overline{b} = (a_x + b_x \ ; \ a_y + b_y)$



Acudiendo a la **ley del triángulo para la suma de vectores *flecha***, se tiene una justificación geométrica simple para la definición de la suma vectorial por componentes → $\bar{a} + \overline{b} = \overline{OP}$

$\bar{a} = (3;1)$; $\overline{b} = (1,2)$

$\bar{a} + \overline{b} = (3+1 \ ; \ 1+2) = (4;3)$

● *VECTOR DADO POR DOS PUNTOS - COMPONENTES*

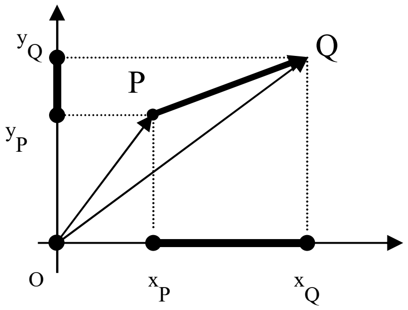
Sean **P** $(x_P ; y_P)$ y **Q** $(x_Q ; y_Q)$ origen y extremo respectivamente del vector $\overline{PQ}$.
¿componentes de $\overline{PQ}$?

Observamos que:

$$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$$

$$\overline{PQ} = (x_Q ; y_Q) - (x_P ; y_P)$$

$$\overline{PQ} = (\underbrace{x_Q - x_P}_{\text{1er componente}} ; \underbrace{y_Q - y_P}_{\text{2da componente}})$$



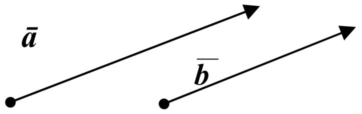
$$\boxed{\overline{PQ} = (x_Q - x_P ; y_Q - y_P)}$$

Coordenadas del extremo menos coordenadas del origen

● *CONDICIÓN DE PARALELISMO POR COMPONENTES*

$\bar{a} = (a_x ; a_y)$

$\bar{b} = (b_x ; b_y)$



$\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \alpha$ real tal que $\bar{a} = \alpha . \bar{b}$ (por propiedad de //)

$\bar{a} = \alpha . \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad (a_x , a_y) = \alpha \ (b_x ; b_y) \quad \Leftrightarrow \quad (a_x ; a_y) = (\alpha\, b_x ; \alpha\, b_y)$

Luego : $\bar{a} \parallel \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_x = \alpha\ b_x} \quad \Leftrightarrow \quad$ *si* $b_x \neq 0$ *y* $b_y \neq 0$ $\quad \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \alpha$

5.7 Producto Escalar - [O3]

Se definen dos productos entre vectores , *producto escalar* y *producto vectorial.* Estudiamos primero el *´**producto escalar**´* (también llamado *producto interno* ó *producto punto*). Este producto es muy útil en física y en geometría. Por ejemplo, el producto escalar permite resolver el problema de, conocidos dos vectores, *<u>determinar el ángulo que subtienden</u>*.

<u>DEF 1</u> : ***PRODUCTO ESCALAR***

Dados dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ el ***producto escalar*** de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, que indicamos $\bar{a} . \bar{b}$, se define como :

$$\bar{a} . \bar{b} = |\bar{a}| . |\bar{b}| . \cos\ (\bar{a}\ \hat{}\ \bar{b})$$

Observaciones:

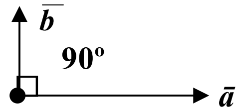
1) el producto escalar tiene por resultado **un número real.**
2) ***" no se puede realizar el producto escalar de 3 o más vectores".***
3) $\bar{i} \,.\, \bar{i} = \bar{j} \,.\, \bar{j} = \bar{k} \,.\, \bar{k} = 1 \;;\quad \bar{i} \,.\, \bar{j} = \bar{i} \,.\, \bar{k} = \bar{j} \,.\, \bar{k} = 0$

PROPIEDADES:

PE1) $\bar{a} \,.\, \bar{b} = \bar{b} \,.\, \bar{a}$ (conmutativa)
PE2) $(\bar{a} + \bar{b}) \,.\, \bar{c} = \bar{a} \,.\, \bar{c} + \bar{b} \,.\, \bar{c}$; (distributivo respecto a la suma)
PE3) $(\alpha \bar{a}) \,.\, \bar{b} = \alpha\,(\bar{a} \,.\, \bar{b}) = \bar{a} \,.\,(\alpha \bar{b})$ / $(\alpha \in R)$
PE4) $\bar{a} \,.\, \bar{a} = |\bar{a}|^2$

PE5) *CONDICIÓN* de *PERPENDICULARIDAD* entre *VECTORES NO NULOS*

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff \bar{a} \,.\, \bar{b} = 0$$



Demostración: Por definición: $\bar{a} \,.\, \bar{b} = |\bar{a}| . |\bar{b}| . \cos \bar{a} \wedge \bar{b}$;

$\Rightarrow)\quad \bar{a} \perp \bar{b} \;\Rightarrow\; \bar{a} \wedge \bar{b} = 90° \;\Rightarrow\; \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \cos 90° = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{a} \,.\, \bar{b} = 0}$

$\Leftarrow)\quad \bar{a} \,.\, \bar{b} = 0 \;\Rightarrow\; \cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{a} \wedge \bar{b} = 90° \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{a} \perp \bar{b}}$

$|\bar{a}| \neq 0$ y $|\bar{b}| \neq 0$

TEOREMA: Dados dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ por sus componentes, entonces si $\bar{a} = (a_x , a_y , a_z)$ y $\bar{b} = (b_x , b_y , b_z)$ se tiene que:

$$\bar{a} \,.\, \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Demostración para realizar la demostración se acude a la descomposición canónica del vector y luego a las propiedades del producto escalar.

Sean $\bar{a} = a_x \,.\, \bar{i} + a_y \,.\, \bar{j}$; $\bar{b} = b_x \,.\, \bar{i} + b_y \,.\, \bar{j}$

$$\bar{a} \,.\, \bar{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \,.\, [\,b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}\,] = [\text{PE2}]$$

$$= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \,.\, b_x \mathbf{i} + (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \,.\, b_y \mathbf{j} = [\text{PE2}]$$

$$= a_x \mathbf{i} \,.\, b_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \,.\, b_x \mathbf{i} + a_x \mathbf{i} \,.\, b_y \mathbf{j} + a_y \mathbf{j} \,.\, b_y \mathbf{j} = [\text{PE3}]$$

$$= a_x b_x (\mathbf{i} \,.\, \mathbf{i}) + a_y b_x (\mathbf{j} \,.\, \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \,.\, \mathbf{j}) + a_y b_y (\mathbf{j} \,.\, \mathbf{j}) =$$

$$= a_x b_x \;\mathbf{1} + a_y b_x \;\mathbf{0} + a_x b_y \;\mathbf{0} + a_y b_y \;\mathbf{1} =$$

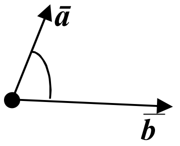
$$= \mathbf{a_x b_x + a_y b_y}$$

[nota : se hace la demostración en dos variables. Para tres variables es similar agregando la tercer componente. *Actividad*]

EJEMPLO: $\bar{a} = (2 , 5 , -1)$
$\bar{b} = (3 , -5 , 4)$

$\Rightarrow\; \bar{a} \,.\, \bar{b} = 2 \,.\, 3 + 5 \,.\, (-5) + (-1) \,.\, 4 = \mathbf{-23}$

• *ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES*

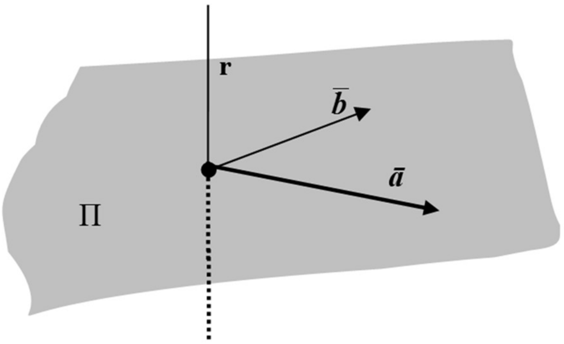


De la definición de producto escalar ➔ $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| . |\bar{b}| . \cos(\bar{a} \wedge \bar{b})$
Si algunos de los vectores es el vector nulo; por definición: $\bar{a} \wedge \bar{b} = 0°$
Si los dos vectores son no nulos , entonces:

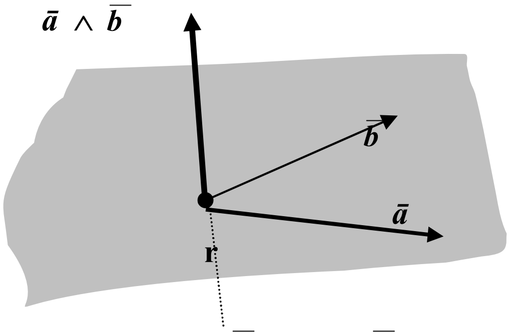
$$\cos(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| . |\bar{b}|} \qquad \text{(luego, de aquí se obtiene } \bar{a} \wedge \bar{b} \text{)}$$

5.8 Producto Vectorial - [O_4]

En esta sección vemos otro producto entre vectores el cual tiene como rasgos distintivos que su resultado es un **vector** y que sólo puede calcularse para vectores de **V_3**.
Vimos ya que dos vectores no paralelos , $\bar{a}$ y $\bar{b}$, determinan un plano (Π).



Del gráfico vemos que existen ***infinitos*** vectores perpendiculares al plano que determinan $\bar{a}$ y $\bar{b}$. (cualquier vector paralelo a **r** , con $r \perp \Pi$). Entre ellos distinguimos uno al que,
* llamamos: ***producto vectorial de*** $\bar{a}$ **y** $\bar{b}$; e * indicamos: $\bar{a} \wedge \bar{b}$ ➔ **¿ Quién es** $\bar{a} \wedge \bar{b}$ **?**



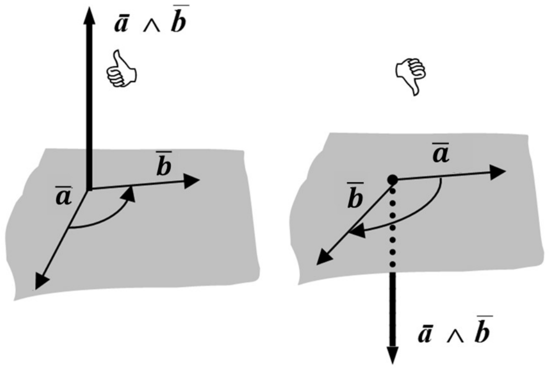
DEFINICIÓN: $\bar{a} \wedge \bar{b}$ es el ***vector*** que tiene:

- **módulo** ➔ $|\bar{a} \wedge \bar{b}| = |\bar{a}| . |\bar{b}| . \text{sen}(\bar{a} \wedge \bar{b})$
- **dirección** ➔ la de **r** ; o sea, ***perpendicular al plano que determinan*** $\bar{a}$ **y** $\bar{b}$ **.**
- **sentido** ➔ el sentido de $\bar{a} \wedge \bar{b}$ es aquel para el cual la terna $\bar{a}$; $\bar{b}$ y $\bar{a} \wedge \bar{b}$ tiene la misma orientación que la terna *derecha* **x y z .(*)**

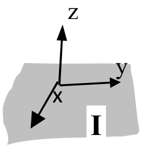
Existen distintas reglas para obtener el *sentido* de $\bar{a} \wedge \bar{b}$.
Una de ellas: *regla de la mano derecha :*

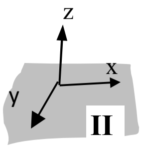
Regla de la mano derecha

" si se coloca la palma de la mano derecha de manera que los dedos se curven desde el 1er vector ($\bar{a}$) hacia el 2do vector ($\bar{b}$), entonces el sentido en que apunte el dedo pulgar es el sentido de $\bar{a} \wedge \bar{b}$ "



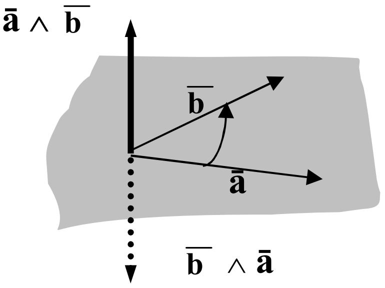
(*) OBSERVACION: Sabido es que en el espacio trabajamos con tres ejes coordenados perpendiculares entre sí. Luego, adoptada la posición vertical para el eje z, quedan dos posibilidades para los ejes x *e* y





Si la configuración de los ejes es como en I, se dice que el sistema coordenado es un *sistema derecho*; en el otro caso es *izquierdo*. Estos dos sistemas *son diferentes* . En este curso trabajamos exclusivamente con sistemas *derechos.*

PROPIEDADES



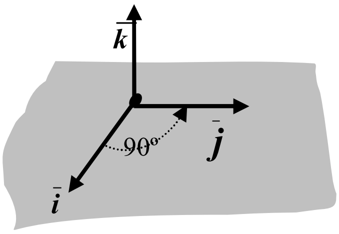
PV1) $\bar{a} \wedge \bar{b} = -(\bar{b} \wedge \bar{a})$ (anticonmutativa)

PV2) $\alpha(\bar{a} \wedge \bar{b}) = (\alpha \bar{a}) \wedge \bar{b} = \bar{a} \wedge (\alpha \bar{b})$; $(\alpha \in R)$

PV3) $\bar{a} \wedge (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) + (\bar{a} \wedge \bar{c})$
(distributiva respecto de la suma)

OBSERVACIONES:

a) El cálculo del producto vectorial a partir de la definición se puede hacer fácilmente en el caso de los versores de la base canónica ($\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$) ya que, en este caso, el ángulo entre los mismos es conocido (0º ó 90º).
Tenemos entonces:



$$\bar{i} \wedge \bar{i} = \bar{j} \wedge \bar{j} = \bar{k} \wedge \bar{k} = \bar{0}$$

$$\bar{i} \wedge \bar{j} = \bar{k} \quad ; \quad \bar{j} \wedge \bar{k} = \bar{i} \quad ; \quad \bar{k} \wedge \bar{i} = \bar{j}$$

(verificar aplicando la definición)

b) Conocidos los "productos vectoriales fundamentales" (los de la base) se pueden obtener las "componentes" de $\bar{a} \wedge \bar{b}$ conocidas las de $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Esto se logra en forma similar a lo hecho con el producto escalar; o sea, trabajando con la descomposición canónica de los vectores, las propiedades del producto vectorial y los resultados de los productos vectoriales fundamentales.

Así dados $\bar{a} = a_x . \bar{i} + a_y . \bar{j} + a_z . \bar{k}$ y $\bar{b} = b_x . \bar{i} + b_y . \bar{j} + b_z . \bar{k}$; se plantea:

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z . \bar{k}) \wedge (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z . \bar{k})$$

Luego, aplicando las propiedades [PV3 ; PV2 y PV1] se obtiene (ejercicio) :

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y) . \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) . \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}$$

c) Las expresiones que permiten calcular cada una de estas componentes de $\bar{a} \wedge \bar{b}$ resultan "complicadas", difíciles de recordar, por ello se acude a otros conceptos matemáticos (*matriz* y *determinante*) a los efectos de encontrar una expresión formal que facilite el cálculo.
(Estos conceptos se presentan a continuación a los efectos de recordarlos o presentarlos a quien no los conozca).

➢ APÉNDICE

MATRIZ : es un cuadro de números.

- matriz 2×2 ➔ *arreglo* de cuatro números reales de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

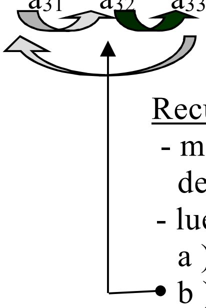
- matriz 3×3 ➔ *arreglo* de nueve números reales de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE: el determinante de una matriz es un número asociado a la misma que se calcula como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5.2 - 1.3 = 7$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mathbf{a_{12}} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + \mathbf{a_{13}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



Recurso mnemotécnico:

- moverse a lo largo del primer renglón para la obtención de los ***coeficientes*** de los determinantes 2×2.
- luego, para formar los correspondientes determinantes $\mathbf{2 \times 2}$ proceder a:
  - a) *eliminar* el primer renglón de la matriz 3×3 ;
  - b) tomar a continuación y en forma sucesiva **:**
    2da y 3ra columna para el 1er determinante;
    3ra y 1ra columna para el 2do determinante y,
    1ra y 2da columna para el 3er determinante.

PRODUCTO VECTORIAL por componentes

- Dados dos vectores $\bar{\mathbf{a}} = (a_x\ ;\ a_y\ ;\ a_z)$ y $\overline{\mathbf{b}} = (b_x\ ;\ b_y\ ;\ b_z)$ la siguiente expresión permite obtener la descomposición canónica de $\bar{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}}$:

$$\bar{\mathbf{a}} \wedge \overline{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_y} & \mathbf{a_z} \\ \mathbf{b_y} & \mathbf{b_z} \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{a_z} & \mathbf{a_x} \\ \mathbf{b_z} & \mathbf{b_x} \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{a_x} & \mathbf{a_y} \\ \mathbf{b_x} & \mathbf{b_y} \end{vmatrix} \bar{k}$$

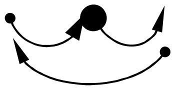
- Esta expresión, a su vez, se puede expresar a través de un *"determinante"* :

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

El concepto de determinante se define para arreglos de <u>números reales</u>. Esta expresión incluye vectores, luego no es "*rigurosamente*" un determinante. *Sin embargo, como la resolución 'formal' de esta expresión como determinante 3x3, proporciona las componentes de* $\bar{a} \wedge \bar{b}$, se usa al efecto de plantear y calcular dicho producto.

<u>EJEMPLO</u>: hallar $\bar{a} \wedge \bar{b}$ siendo $\bar{a} = (3, -1, 1)$ y $\bar{b} = (1,2,-1)$

$$\bar{a} \wedge \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{(-1)} . \bar{i} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{(4)} . \bar{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{(7)} . \bar{k} = -i + 4j + 7k$$



• CONDICIÓN DE PARALELISMO EN V3

Dados $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores *no nulos* de V_3 , entonces:

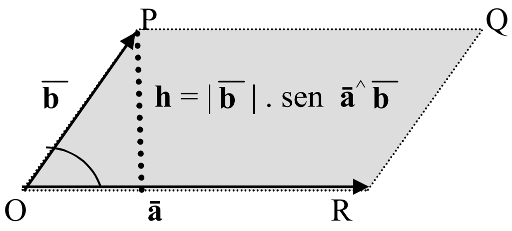
$$\bar{a} \,//\, \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{o}$$

<u>Demostración</u>:

$\bar{a} \,//\, \bar{b} \Leftrightarrow \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 0º$ ó $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 180º \Leftrightarrow \text{sen}\,.\widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 0$

$\Leftrightarrow |\bar{a} \wedge \bar{b}| = |\bar{a}|.|\bar{b}|.\,\text{sen}\,.\widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b} = \bar{o}$

• INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE $|\bar{a} \wedge \bar{b}|$



A = área OPQR

A = base x altura → $A = |\bar{a}| \times h$

$$A = |\bar{a}|\,.\,|\bar{b}|\,.\,\text{sen}\ \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = |\bar{a} \wedge \bar{b}|$$

<u>CONCLUSION</u>: $|\bar{a} \wedge \bar{b}|$ es el área del paralelogramo determinado por $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

5.9 Producto Mixto - $[O_5]$

DEFINICIÓN Dados tres vectores $\bar{a}$; $\bar{b}$; $\bar{c}$ de V_3 ; el *producto mixto* entre ellos es el número real que resulta de combinar los dos productos, el escalar y el vectorial:

$$\bar{a} \,.\, (\bar{b} \wedge \bar{c})$$

- Si $\bar{a} = (a_x ; a_y ; a_z)$; $\bar{b} = (b_x ; b_y ; b_z)$; $\bar{c} = (c_x ; c_y ; c_z)$; entonces:

$$\bar{a} \,.\, (\bar{b} \wedge \bar{c}) = (a_x ; a_y ; a_z).(\bar{b} \wedge \bar{c}) = (a_x ; a_y ; a_z).\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right)$$

$$\bar{a} \,.\, (\bar{b} \wedge \bar{c}) = a_x . \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y . \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z . \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

OBSERVACIÓN:

Realizado el ´*producto escalar*´ la expresión que se obtiene no es otra cosa que el cálculo de un determinante 3x3 en el cual :

primer fila ➔ componentes del primer vector
segunda fila ➔ componentes del segundo vector
tercer fila ➔ componentes del tercer vector

O sea que:

$$\bar{a} \,.\, (\bar{b} \wedge \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

OBSERVACIÓN: $\bar{a} \,.\, (\bar{b} \wedge \bar{c}) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \,.\, \bar{c}$ (ejercicio)

EJEMPLO: hallar $(\bar{a} \wedge \bar{b}).\, \bar{c}$ siendo $\bar{a} = (3, -1, 1)$; $\bar{b} = (1,2 ,-1)$ y $\bar{c} = (4, 1,1)$

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \,.\, \bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \,.\, 3 + (-1).(-5) + 1.(-7) = 7 \,.$$

EJEMPLO: hallar $(\bar{a} \wedge \bar{b}).\, \bar{c}$ siendo $\bar{a} = (3, -1, 1)$; $\bar{b} = (1,2 ,-1)$ y $\bar{c} = (4, 1,0)$

$$(\bar{a} \wedge \bar{b}) \,.\, \bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

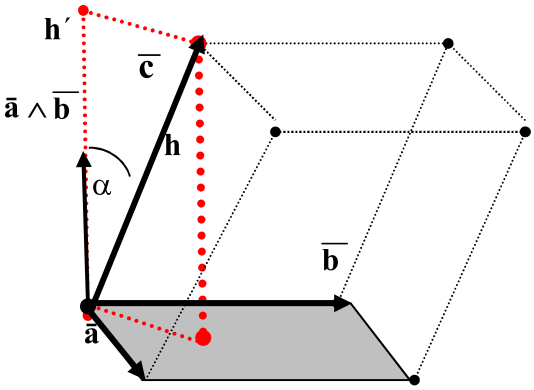
$$= 3 \,.\, 1 + (-1).(-4) + 1.(-7) = \mathbf{0} \,.$$

- El producto mixto de estos vectores es *'cero'*: ¿ nos dice algo este resultado? : Si, que $\bar{c}$ es *perpendicular* a $\bar{a} \wedge \bar{b}$ vector que, a su vez, es perpendicular $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Luego, no queda otra opción: $\bar{c}$ es *paralelo* a $\bar{a}$ y $\bar{b}$ **;** o sea , $\bar{a}$ **,** $\bar{b}$ **y** $\bar{c}$ son ***coplanares*.**

• *INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO MIXTO*

a) El valor absoluto de $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \cdot \bar{c}$ es el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores $\bar{a}$; $\bar{b}$ y $\bar{c}$.

$$V_P = \underbrace{\text{área base}}_{\substack{\text{paralelogramo} \\ \text{determinadopor} \\ \bar{a}\,.\,y\,.\,\bar{b}}} \text{ x altura}$$



$$V_P = |\bar{a} \wedge \bar{b}| \text{ x } h$$

$$h = h'$$

$$h' = |\operatorname{proy}_{\bar{a} \wedge \bar{b}} \bar{c}|$$

$$V_P = |\bar{a} \wedge \bar{b}| \cdot |\operatorname{proy}_{\bar{a} \wedge \bar{b}} \bar{c}| =$$

$$= ||\bar{a} \wedge \bar{b}| \cdot \operatorname{proy}_{\bar{a} \wedge \bar{b}} \bar{c}| =$$

$$= ||\bar{a} \wedge \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\alpha| \underset{\substack{\text{por. def.} \\ \text{prod. esc.}}}{=} |(\bar{a} \wedge \bar{b}) \cdot \bar{c}|$$

b) $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ son ***coplanares*** $\Leftrightarrow$ $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$

Demostración: $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$, ***coplanares*** $\Leftrightarrow$ $h = 0$ $\Leftrightarrow$ $V_P = 0$ $\Leftrightarrow$ $(\bar{a} \wedge \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$

5.10 Actividades

1. Dados los siguientes vectores del plano, se pide:

Vector	Módulo	θ *argumento: ∠ entre el vector y el semieje* x (+)
$\bar{a}$	2	0º
$\bar{b}$	2	30º
$\bar{c}$	6	180º
$\bar{d}$	4	270º

a) Graficar $\bar{a}$,$\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$ en un mismo sistema coordenado, y con origen en el origen del sistema .

b) dar los coordenadas de **A, B, C** y **D,** puntos extremos de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$, respectivamente.

c) Hallar *gráficamente* los siguientes vectores:

$$\bar{p}=\bar{b}+\bar{a}\ ; \quad \bar{q}=\bar{b}+2\bar{a}; \quad \bar{r}=\bar{b}+3\bar{a}.$$

Leyendo del gráfico, dar las coordenadas de **P**, **Q, R,** sus puntos extremos.

d) Indicar V ó F, justificando la respuesta:

d1) Si **P**, **Q** y **R** son los puntos extremos de $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ entonces dichos puntos pertenecen a la recta δ de ecuación, $y = 1$.

d2) Si $\bar{v}=\bar{b}+t.\bar{a}$ con $t \in$R entonces **S,** punto extremo de $\bar{v}$, pertenece a δ **.**

e) Hallar *gráficamente* y en un mismo sistema coordenado, los siguientes vectores:

$$\bar{u}=\bar{c}+\bar{d} \quad ; \quad \bar{v}=\bar{c}-\bar{d} \quad ; \quad \bar{w}=-\bar{c}-\bar{d} \quad ; \quad \bar{x}=\frac{1}{3}.\bar{c}$$

f) Dar, *analíticamente,* los ***versores*** asociados a $\bar{a}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$.

g) Indicar V ó F, justificando la respuesta con una propiedad o definición.
En el caso de ser falso corregirlo para que sea verdadero.

$$\bar{c} = 3\ \bar{a} \quad ; \quad |\ \bar{c}| = |3\ \bar{a}\ | \quad ; \quad \bar{x} = -\ \bar{a} \quad ; \quad |\ \bar{x}\ | = -\ |\ \bar{a}\ |\ ;$$

$$\bar{w} = -\ \bar{u} \quad ; \quad \bar{u} + \bar{w} = \bar{0} \quad ; \quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{0}\ ; \quad |\ \bar{u}\ | = |\ \bar{c}\ | + |\ \bar{d}\ |\ ;$$

$$\bar{a} = |\ \bar{a}\ |.\bar{a}_o\ ; \quad \bar{a}_o = \bar{c}_o \quad ; \quad \bar{w}_o = -\ \bar{u}_o \quad ; \quad \bar{u}_o = \bar{c}_o + \bar{d}_o \quad .$$

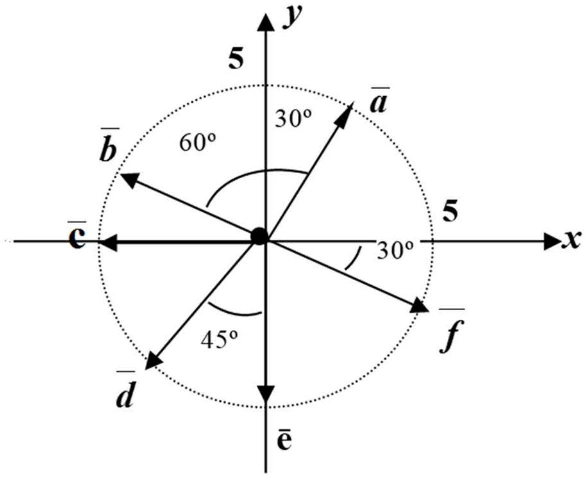
h) Dar:
(*) dos vectores paralelos y de igual sentido que $\bar{b}$. Indicar su módulo
(*) dos vectores paralelos y de sentido opuesto a $\bar{b}$. Indicar su módulo
(*) un vector paralelo y de sentido contrario a $\bar{b}$ y de módulo 86.
(*) dos vector perpendicular a $\bar{c}$ y de módulo 8.

i) Graficar y dar las coordenadas de los puntos **K** , **L** y **M** si sus vectores posición son respectivamente:

$$-2\ \bar{a}\ ; \quad -\ \bar{b}\ ; \quad \frac{2}{3}\ \bar{c}\ .$$

Dar módulo y argumento de los vectores posición determinados por dichos puntos.

2. a) Indicar *módulo* y *argumento* de los vectores que se dan a continuación.
b) Hallar las *componentes* de los vectores.



3. Para los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$ del ejercicio 1 , se pide :

a) Hallar sus componentes.
b) Escribir su ´descomposición canónica´ .

4. Hallar las componentes y módulo de los vectores :
$\bar{a}_o$, $\bar{b}_o$, $\bar{c}_o$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{u}$, $\bar{V}$, $\bar{w}$, $\bar{x}$, del ejercicio 1.

5. a) Indicar módulo, argumento y componentes de los *versores* de la base canónica en V_2.
b) Graficar los siguientes vectores:

$\bar{a} = 4\,\bar{i}$ $\qquad$ $\bar{c} = -3\,\bar{i} + 4\bar{j}$

$\bar{b} = 4\,\bar{i} + 3\,\bar{j}$ $\qquad$ $\bar{d} = -5\bar{j}$

c) Dar componentes y módulo de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$, del item (a).

6. a) Graficar los siguientes vectores:

$\bar{a} = (-2 ; 3)$; $\bar{b} = (4 ; 0)$; $\bar{c} = (3 ; -4)$; $\bar{d} = (0 ; -5)$

b) Dar módulo de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$. Escribir su descomposición canónica.

7. Dado el vector **ā** = (4;3) , se pide:
a) dar un vector $\bar{u}$ // **ā** , de módulo 10 e igual sentido que **ā** .
b) dar un vector $\bar{u}$ // **ā** , de módulo 15 y sentido opuesto al de **ā** .
c) dar el versor asociado **ā** .

8. a) Demostrar que si $\bar{v}$ // $\bar{i}$, su ***módulo*** es igual al valor absoluto de la componente no nula.

b) Demostrar que si $\bar{v}$ // $\bar{j}$, su ***módulo*** es igual al valor absoluto de la componente no nula.

c) Dar dos vectores paralelos al ***eje x*** y de módulo 5. Dar dos vectores paralelos al ***eje y***.

9. En cada caso graficar un vector $\bar{a} \in V_2$. Dar sus componentes y su descomposición canónica.

a) $a_x = 4$; $a_y < 0$; $|\bar{a}| = 5$.

b) $\bar{a} \,//\, \bar{i}$ y $|\bar{a}| = 3$

c) $\bar{a} \perp \bar{i}$ y $|\bar{a}| = 2$

d) $\bar{a} \perp \bar{b}$ con $\bar{b} \perp \bar{j}$; $|\bar{a}| = |5\bar{j}|$

e) $\bar{a} \,//\, \bar{b}$ con $\bar{b} \perp \bar{j}$; $|\bar{a}| = |\bar{j}|$

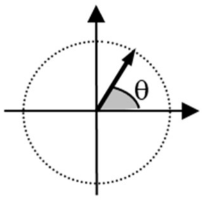
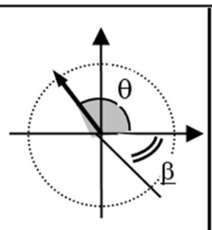
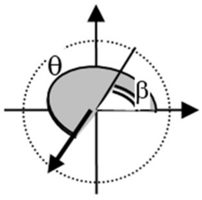
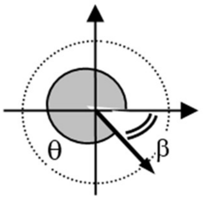
f) $\bar{a} \,//\, \bar{b}$; $\bar{b} \perp \bar{c}$; $\bar{c} \perp \bar{i}$ y $|\bar{a}| = |\bar{i} + \bar{j}|$.

10. Graficar ; hallar ***módulo*** y ***argumento*** de los siguientes vectores:

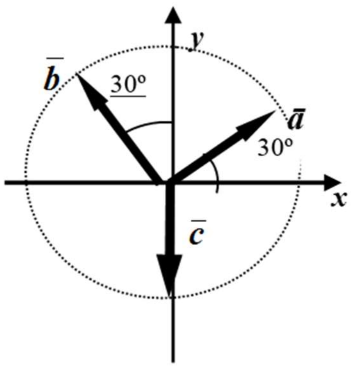
$\bar{a} = (3, -4)$ $\bar{c} = (-3; -4)$

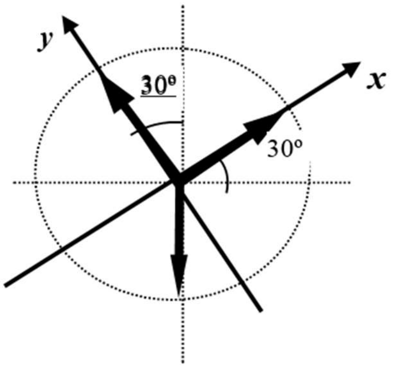
$\bar{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\bar{d} = (-6; 8)$

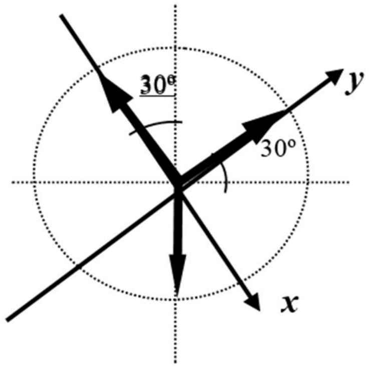
NOTA: Para hallar el argumento (θ) de un vector debemos acudir a la *´función inversa´* de la tangente (*arc tg.*). Esta función tiene por *´imagen´* ángulos del I*C* y IV*C* (1er y 4to cuadrante) Luego, si el vector pertenece a otro cuadrante, habrá que hacer las consideraciones del caso. Sea $\bar{a} = (a_x ; a_y)$:

			
$\text{tg } \theta = \frac{a_y}{a_x}$ $\text{arc tg } \frac{a_y}{a_x} = \theta$	$\text{tg } \theta = \frac{a_y}{a_x} = \text{tg } \beta$ $\text{arc tg } \frac{a_y}{a_x} = \beta$ (neg.) $\Rightarrow \theta = 180° + \beta$	$\text{tg } \theta = \frac{a_y}{a_x} = \text{tg } \beta$ $\text{arctg } \theta = \frac{a_y}{a_x} = \beta$ (pos) $\Rightarrow \theta = 180° + \beta$	$\text{tg } \theta = \frac{a_y}{a_x} = \text{tg } \beta$ $\text{arc tg } \theta \frac{a_y}{a_x} = \beta$ (neg) $\Rightarrow \theta = 360° + \beta$

11. Obtener las componentes de $\bar{a}$; $\bar{b}$ y $\bar{c}$ en cada uno de los sistemas de referencia que se indican, sabiendo que : $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$.







12. Dados los puntos A(4 ; 1) y B (0; 2) se pide:

a) Graficar los vectores posición de A y B.

b) Dar las componentes de los respectivos vectores posición.

c) Dar las componentes de $\overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{BA}}$. ¿qué puede decir de estos vectores?

d) Demostrar que $\overline{\mathbf{OA}} - \overline{\mathbf{OB}} = \overline{\mathbf{BA}}$

e) Hallar un punto C tal que $\overline{\mathbf{OA}} + \overline{\mathbf{AC}} = 3\,\overline{\mathbf{OB}}$.

f) Dar las componentes del vector $\overline{\mathbf{OP}}$ si $\overline{\mathbf{OP}} = \overline{\mathbf{OA}} + \mathbf{t}.\overline{\mathbf{OB}}$; $\mathbf{t} \in \Re$.
Hallar gráficamente y disponiendo un vector a continuación de otro, los vectores $\overline{\mathbf{OP}}$ para $\mathbf{t} =$ 0 , 1 ; 2 ; ½ ; - ½ ; -1 . Concluido el trabajo observar y discutir qué particularidad presentan los puntos **P** ; qué se obtiene si " t " varía en todos los reales.

13. Dado los vectores $\bar{\mathbf{a}} = (1,2,2)$; $\bar{b} = (3 , 0 , 2)$; $\bar{c} = (6 , 8 , 0)$, $\bar{d} = (0,0,2)$ se pide:

a) Dar su descomposición canónica y, acorde a ella, indicar si el vector presenta alguna particularidad en cuanto a su posición en el espacio. Graficarlos en un mismo sistema.

b) Dar el módulo de $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{\mathbf{a}} + \bar{b}$; $3\,\bar{\mathbf{a}} - \bar{c}$; $\frac{1}{2}\,\bar{d}$.

c) Hallar un vector $\bar{\mathbf{x}}$ tal que $\bar{\mathbf{a}} - 3\bar{b} + 2\,\bar{\mathbf{x}} = \bar{0}$.

d) Hallar los versores asociado a $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{c} - 4\,\bar{\mathbf{a}}$.

e) Dar un vector paralelo a $\bar{\mathbf{a}}$, de módulo 3 e igual sentido que $\bar{\mathbf{a}}$ **.**

f) Dar un vector paralelo a $\bar{\mathbf{d}}$, de módulo 4 y sentido opuesto a $\bar{d}$.

g) Graficar 5 vectores no paralelos y *perpendiculares* a $\bar{d}$ (analizar gráficamente).

14. Dados los puntos A(2 ;4 ; 4) ; B (0; 3; 4) ; C (3; 4;0) ; D (3; 0; 4)

a) Graficarlos en un mismo sistema coordenado.

b) Marcar los vectores posición, dar componentes y módulo de los mismos.

c) Dar las descomposición canónica de los vectores posición.

d) Hallar las componentes de los vectores $\overline{\mathbf{AB}}, \overline{\mathbf{AC}}, \overline{\mathbf{AD}}$; $3\,\overline{\mathbf{AB}} - 2\,\overline{\mathbf{CD}}$; $3\,\overline{\mathbf{AB}} - 2\,\overline{\mathbf{AB}}$

e) Hallar un punto P tal que: $\overline{OC} + \overline{CP} = \overline{CD}$

f) Hallar un punto P tal que: $\overline{OC} + \overline{CP} + \overline{PA} = \overline{OA}$

15. a) Dados $\bar{v} = (3 ; 4)$ y $\bar{\mathbf{u}}$ hallar $proy_{\,\bar{u}}\,\bar{v}$ si $(\widehat{\bar{v}\,\bar{u}}) = 60^{\circ}$.

b) Dados $\bar{\mathbf{a}} = (3; 4)$ y $\bar{b} = (6; 8)$ hallar $proy_{\,\bar{b}}\,\bar{a}$. Dar una *'regla'* para esta situación.

c) Si $|\,\bar{\mathbf{a}}\,| = |\bar{b}\,|$ y $proy_{\,\bar{c}}\,\bar{a} = proy_{\,\bar{c}}\,\bar{b}$, ¿ implica esto que $\bar{\mathbf{a}} = \bar{b}$?.

c) Graficar $\bar{v}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ tal que $|\bar{v}\,| = |\,\bar{\mathbf{u}}\,| = 4$; $\theta_{\bar{v}}$(arg. $\bar{v}$) = 90° ; $\theta_{\,u} = 30^{\circ}$;

c1) calcular $proy_{\,\bar{u}}\,\bar{v}$; graficar y dar las componentes de $\overline{\omega}_{p}$, el ***vector proyección*** .

c2) calcular $proy_{\,\bar{u}}\,(-\bar{v})$; graficar y dar las componentes de $\overline{\omega}_{p}$, el ***vector proyección***.

c3) Dar las componentes de $\bar{\mathbf{u}}_{\mathrm{o}}$; verificar que $\overline{\omega}_{p}$ (*vector proyecc. sobre* $\bar{\mathbf{u}}$) // $\bar{\mathbf{u}}_{\mathrm{o}}$.

c4) Demostrar que cualquiera sea $\bar{v}$, si $\overline{\omega}_p$ es el *vector proyección de* $\bar{v}$ *sobre* $\bar{\mathbf{u}}$,

entonces: $\boxed{\overline{\omega}_p = (\, proy_{\bar{u}}\, \bar{v}\,).\bar{\mathbf{u}}_o.}$

16. a) Dado $\bar{v}$ de módulo *4* y argumento $\theta = 120^\circ$ se pide:

* graficar $\bar{v}$; $\bar{i}$; $\bar{j}$. Hallar las *componentes* de $\bar{v}$, dar su *descomposición canónica.*

* calcular $proy_{\bar{i}}\, \bar{v}$, graficar $\bar{v}_{(x)}$ = *vector proyec.* de $\bar{v}$ sobre $\bar{i}$, dar sus componentes.

* calcular $proy_{\bar{j}}\, \bar{v}$, graficar $\bar{v}_{(y)}$ = *vector proyec.* de $\bar{v}$ sobre $\bar{j}$, dar sus componentes.

**** Indicar V ó F*** : $\bar{v} = (\, proy_{\bar{i}}\, \bar{v}\,).\bar{i} + (\, proy_{\bar{j}}\, \bar{v}\,).\bar{j}.$

b) Dado $\bar{v} = (v_x\, ; v_y)$ de argumento ´θ´ *demostrar* que:

$$v_x \ (= proy_{\bar{i}}\, \bar{v}\,) = |\bar{v}|.\cos\alpha$$

$$v_y \ (= proy_{\bar{j}}\, \bar{v}\,) = |\bar{v}|.\ \cos\beta$$

Sugerencias: recordar que

$v_x = |v|.\cos\theta$; $v_y = |v|\ \mathrm{sen}\ \theta$

Considerar: $\alpha = \widehat{\bar{v}\,\bar{i}}$ y $\beta = \widehat{\bar{v}\ \bar{j}}$

Notas: * α y β son los "***ángulos directores***", y sus cosenos, los "***cosenos directores***" del vector.

* en particular para $\bar{v}_o$ (versor asociado a $\bar{v}$), se tiene: $\bar{v}_o = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$

17. En tres dimensiones se concluye también que dado $\bar{v} = (v_x\, ; v_y\, ; v_z)$, entonces

$$v_x = proy_{\bar{i}}\, \bar{v} = |\bar{v}|.\cos\alpha$$

$$v_y = proy_{\bar{j}}\, \bar{v} = |\bar{v}|.\ \cos\beta$$

$$v_z = proy_{\bar{k}}\, \bar{v} = |\bar{v}|.\ \cos\gamma$$

con α ; β y γ los respectivos "ángulos directores" ; o sea, ángulos del vector con los versores fundamentales , $\bar{i}\ ; \bar{j}\ ; \bar{k}$

a) Dado $\bar{v} = (4; 3; 0\,)$, dar la descomposición canónica de $\bar{v}$.

Graficar $\bar{v}$; $\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$ y los ***vectores proyección*** de $\bar{v}$ sobre cada uno de los ejes ; comparar estos vectores con los de la descomposición canónica de $\bar{v}$ y concluir. Luego, dar los ángulos directores de $\bar{v}$.

b) Dado $\bar{v} = (2; 4; 4)$, dar la descomposición canónica de $\bar{v}$.

Graficar $\bar{v}$; $\bar{i}$; $\bar{j}$; $\bar{k}$ y los ***vectores proyección*** de $\bar{v}$ sobre cada uno de los ejes ; comparar estos vectores con los de la descomposición canónica de $\bar{v}$ y concluir. Luego, dar los cosenos directores de $\bar{v}$; verificar que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

18. Sea $\overline{\mathbf{OP}} = \bar{\mathbf{a}} + t\, \bar{b}$ con $\bar{\mathbf{a}} = (1,-1,2)$; $\bar{b} = (2,3,1)$; $t \in$ R ; **O**: origen .
Mostrar que las coordenadas (x; y; z) del punto **P** (extremo del vector) satisfacen la siguiente ecuación : $5x - 3y - z - 6 = 0$.

¿Satisfacen la siguiente ecuación: $10\,x - 6\,y - 2\,z - 12 = 0$?
¿Satisfacen la siguiente ecuación: $10\,x - 6\,y - 2\,z - 6 = 0$?
Discutir la respuesta a las dos últimas preguntas sin reemplazar coordenadas.

PRODUCTO ESCALAR –PRODUCTO VECTORIAL – PRODUCTO MIXTO

19. Los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ forman un ángulo de 45º siendo $\sqrt{2}$ y 1/3 sus respectivos módulos. Realizar, de ser posible, las siguientes operaciones:

a) $\bar{u} \cdot \bar{v}$
b) $\bar{v} \cdot \bar{v}$
c) $(2\,\bar{u}) \cdot \bar{v}$
d) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot \bar{u}$
e) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v})$
f) $(3\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} + 2\bar{v})$
g) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) \cdot \bar{u}$
h) $(\bar{u} \cdot \bar{v})\, \bar{u}$
i) $(\bar{u} \cdot \bar{v}) + \bar{u}$

20. Dados los vectores $\bar{u} = (1; -1; 5)$ y $\bar{v} = (2; 2; z)$, hallar “ z ” (si existe) tal que:

a) $2\bar{u} \cdot 3\bar{v} = 10$
b) $\bar{u} \perp \bar{v}$
c) $|\bar{v}| = 3$
d) $|\bar{v}| = 1$
e) $\bar{v} \perp \bar{k}$
f) $\bar{v} \perp \bar{i}$

21. Dados $\bar{u} = (-3; 4)$ y $\bar{v} = (-1; ½)$ se pide:

a) Hallar $\widehat{\bar{u}\,\bar{v}}$, ángulo formado por los vectores.
b) Hallar $\text{proy}_{\bar{v}}\, \bar{u}$.
c) Hallar $\bar{w}$ paralelo a $\bar{u}$ sabiendo que $\bar{v} \cdot \bar{w} = -5$.
d) Dar tres vectores no nulos perpendiculares a $\bar{u}$.
e) Dar $\bar{a}$ tal que $\bar{a} \perp \bar{u}$ y $|\bar{a}| = |\bar{u}|$. ¿Cuántos vectores encuentra?, ¿Qué particularidad tienen sus componentes con respecto a las de $\bar{u}$?
f) Hallar $\bar{b}$, *versor* perpendicular a $\bar{u}$ tal que $\bar{b} \cdot \bar{j} < 0$.
g) *Verificar* que: $\text{proy}_{\bar{i}}\, \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{i}$ y que $\text{proy}_{\bar{j}}\, \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{j}$
h) *Demostrar* que, cualquiera sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$, se tiene : $\widehat{\bar{u}\,\bar{v}} = \widehat{\bar{u}\,\bar{v}_\circ}$
i) *Demostrar* que, cualquiera sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$, se tiene : $\text{proy}_{\bar{v}}\, \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{v}_\circ$
Verificar esta igualdad para $\bar{u}$ y $\bar{v}$ dados.
j) *Demostrar* que, cualquiera sea $\bar{u}$, se tiene: $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$. *Verificar*

22. a) Dar cinco vectores no paralelos entre sí y perpendiculares a $\bar{k}$. Discutir si los vectores dados presentan alguna particularidad en relación a su posición en el espacio.
b) Dar cinco vectores perpendiculares *simultáneamente* a $\bar{i}$ y a $\bar{k}$. Discutir si los vectores dados presentan alguna particularidad en relación a su posición en el espacio.

23. Dados $\bar{u} = (1; 2; 2)$ y $\bar{v} = (-1;\ ½\ ; 0)$ se pide:

a) Hallar $\widehat{\bar{u}\,\bar{v}}$, ángulo formado por los vectores.

b) Hallar $\mathbf{proy}_{\bar{v}}\ \bar{u}$.

c) Dar cinco vectores no nulos perpendiculares a $\bar{u}$.

d) Dar $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ tres vectores no nulos perpendiculares a $\bar{u}$ tal que: $\bar{a}$ sea paralelo al plano xz ; $\bar{b} \perp \bar{k}$ y $\bar{c} \perp \bar{v}$.

24. Verificar gráfica y analíticamente que los puntos **A** (3;0;5); **B** (3;4;0) y **C** (3;4;5) determinan un triángulo rectángulo. Hallar su área usando geometría elemental.

25. Sabiendo que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ se encuentran sobre el plano xy; que $|\bar{u}| = |\bar{v}| = 2$ que $\bar{u}$ es paralelo e igual sentido que $\bar{i}$; que $(\widehat{\bar{u}\,\bar{v}}) = 30^{\circ}$ y $\bar{v}.\bar{j}>0$; se pide, graficar (*si existe*) el vector resultado de las siguientes operaciones:

a) $\bar{u} \wedge \bar{v}$	e) $\bar{v} \wedge \bar{u}$	i) $(\bar{v}.\bar{u}) \wedge \bar{v}$
b) $\bar{v} \wedge \bar{v}$	f) $(\bar{u} + \bar{v}) \wedge \bar{v}$	j) $(\bar{u} \wedge \bar{u}) \wedge \bar{v}$
c) $(2\,\bar{u}) \wedge \bar{v}$	g) $(\bar{u} + \bar{v}) \wedge (\bar{u} + \bar{v})$	k) $\bar{u} \wedge (\bar{u} \wedge \bar{v})$
d) $(\bar{v}.\bar{u}) \wedge (\bar{v}.\bar{u})$	h) $\bar{u} \wedge \bar{j}$	l) $(\bar{u}.\bar{v})(\bar{u} \wedge \bar{u})$

26. Hallar $|\bar{u} \wedge \bar{v}|$ si : a) $|\bar{u}| = 5$; $\bar{v} = (1; 2; 2)$ y $(\widehat{\bar{u}\,\bar{v}}) = 30^{\circ}$.
b) $\bar{u} = (2; -1; 2)$; $|\bar{v}| = 2\,|\bar{u}|$ y $\bar{u}.\bar{v} = 0$.

27. Dados los puntos **A** (3; 0; 5) ; **B** (3; 4; 0) y **C** (3; 4; 5) :

a) hallar, usando producto vectorial, el área del paralelogramo que determinan $\overline{CA}$ y $\overline{\mathbf{CB}}$.

b) hallar el área del triángulo que determinan **A, B** y **C**.

c) hallar el ángulo que forman $\overline{\mathbf{CA}}$ y $\overline{\mathbf{AB}}$. ¿Es uno de los ángulos del triángulo?

28. Si $\bar{u} = (2; 5; 3)$; $\bar{v} = (2; 7; 4)$; $\bar{w} = (3; 3; 6)$, calcular:

a) $\bar{u} \wedge \bar{v}$	d) $(-\bar{u}) \wedge (-\bar{v})$	g) $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w})$
b) $\bar{v} \wedge \bar{u}$	e) $(\bar{u} - \bar{v}) \wedge \bar{w}$	h) $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w}$
c) $(2\,\bar{u}) \wedge \bar{v}$	f) $\bar{u} \wedge \bar{u}$	i) $[\bar{v} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w})].\bar{v}$

29. Dados $\bar{u} = (4; 3; 2)$; $\bar{v} = (4; 3\ ; 0)$ hallar:

a) Un vector perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

b) Tres vectores perpendiculares a $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

c) Un vector $\bar{a}$ perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{v}$ de módulo 5 y tal que $\mathbf{proy}_{\bar{i}}\ \bar{a} > 0$.

d) Un versor $\overline{w}$ perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{v}$ tal que $\overline{w} . \bar{j} > 0$.
e) Módulo, dirección y sentido de $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{v}$.
f) Módulo, dirección y sentido de $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{v})$
g) Un vector $\overline{V}_1$ perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{c} = - \bar{v}$.
h) Un vector $\overline{V}_2$ perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{c} = 2 \bar{v}$.
i) Un vector $\overline{V}_3$ perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{c} = \bar{u} + \bar{v}$.
j) Un vector $\overline{V}_4$ perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{c} = \bar{u} - \bar{v}$.
k) Un vector $\overline{V}_5$ perpendicular a $\bar{u}$ y $\bar{c} = 2\bar{u} + \bar{v}$.
(*) Discutir que particularidad presentan los vectores $\bar{v}_i$ con i = 1,2,3,4,5, y que relación tiene la misma con los vectores $\bar{c}$ considerados en cada caso.

30. Usando producto vectorial hallar el valor de "α" (si existe) para el cual los puntos **A** ; **B** y **C** resulten colineales :

a) **A** (1, 2,3) ; **B** (2,4,6) y **C** (5, 10, α) .
b) **A** (1, 2,3) ; **B** (2,9,4) y **C** (3, 16, α) .
c) **A** (1,2, 3) ; **B** (1,2,0) y **C** (α, 2, 5) .
d) **A** (1, 2, 3) ; **B** (1,2,0) y **C** (1, 2, α) .
e) **A** (1, 2,3) ; **B** (1,2,0) y **C** (1, 0, α) .
f) **A** (1, 2,3) ; **B** (1,α,0) y **C** (1, 0, α) .
g) **A** (1, 2,3) ; **B** (α,0,3) y **C** (α, 4, 3) .
h) **A** (1, 2,3) ; **B** (α,0,3) y **C** (1, 0, α) .

31. Dados $\bar{a} = (2; -1; 0)$; $\bar{b} = (-1; 5; 0)$ y $\bar{c} = (0; -4; 1)$

a) Calcular su producto mixto.
b) Verificar (realizando los productos vectorial y escalar) que $\bar{a} \wedge \bar{b} . \bar{c} = \bar{a} . \bar{b} \wedge \bar{c}$
c) Verificar que $\bar{a} . \bar{b} \wedge \bar{c} = \bar{b} . \bar{c} \wedge \bar{a} = \bar{c} . \bar{a} \wedge \bar{b}$

32. Dados $\bar{a} = (5;0;1)$; $\bar{b} = (3;-2; 0)$ y $\bar{c} = (-4; 1; x)$

a) Hallar el volumen del paralelepípedo que determinan si x =2. En tal caso, el paralelepípedo correspondiente a los vectores *opuestos* a los dados, ¿tiene el mismo volumen que el original ? , ¿ porqué? .
b) Calcular x para que el volumen del paralelepípedo sea 10 .
c) Calcular x para que los vectores sean coplanares.

33. Usando producto mixto hallar el valor de "α" (si existe) para el cual el punto **P** (1;1; 0) y los puntos **A** ; **B** ; **C** resulten coplanares :

a) **A** (1, 2,3) ; **B** (2,2,6) y **C** (2, 5, α) .
b) **A** (2, 1,3) ; **B** (2, α ,4) y **C** (2, 0, α) .
c) **A** (1,1, 3) ; **B** (1,2,0) y **C** (2, 5, α) .
d) **A** (1,1, 3) ; **B** (1,2,0) y **C** (1, 2, α) .
e) **A** (1, 2,3) ; **B** (α,0,3) y **C** (α, 4, 3) .
f) **A** (2, 2,3) ; **B** (α,0,3) y **C** (1, 2, α) .

34. Hallar el valor de "α" (si existe) para el cual el punto **P** (1;1;0) y los puntos **A** ; **B** ; **C** determinan un paralelepípedo de volumen 4:

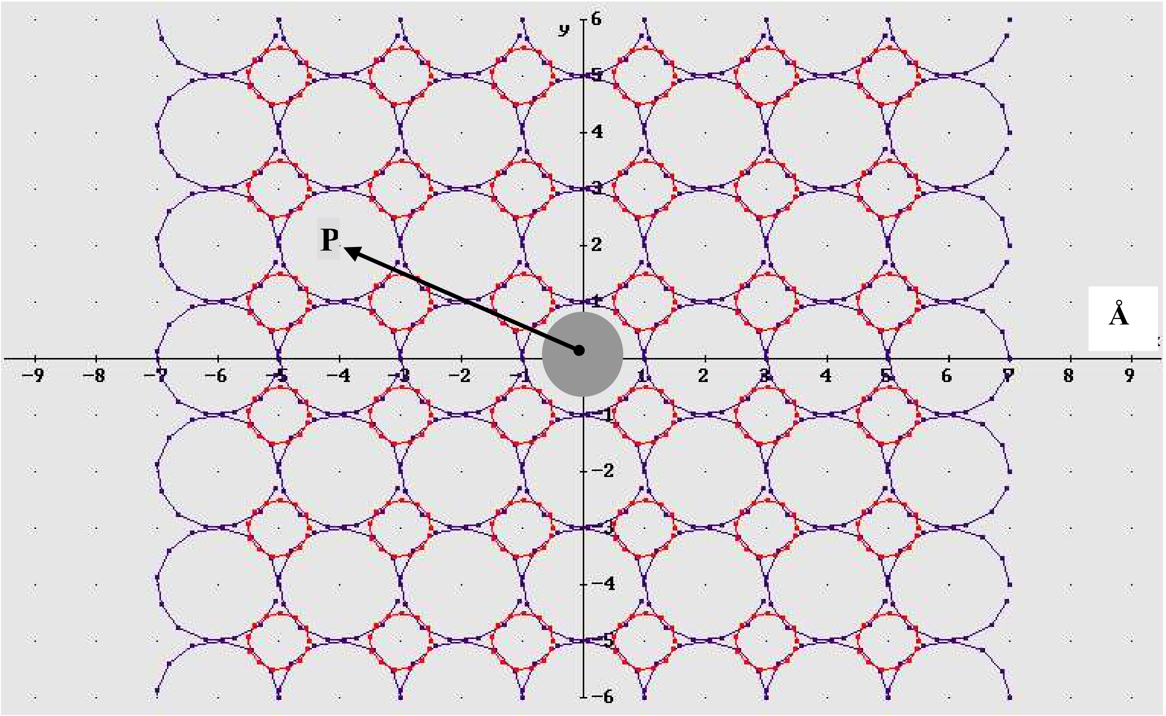
a) **A** (1, 2,3) ; **B** (2,2,6) y **C** (2, 5, α) .
b) **A** (2, 1,3) ; **B** (2, α ,4) y **C** (2, 0, α) .
c) **A** (1,1, 3) ; **B** (1,2,0) y **C** (2, 5, α) .
d) **A** (1,1, -4) ; **B** (1,2,0) y **C** (2, 5, α) .
e) **A** (1,1, 3) ; **B** (1,2,0) y **C** (1, 2, α) .
f) **A** (1, 2,3) ; **B** (α,0,3) y **C** (α, 4, 3) .
g) **A** (2, 2,3) ; **B** (α,0,3) y **C** (1, 2, α).

5.11 Problemas

35. *Se sabe que si para una sustancia dada se baja la temperatura lo suficiente (o sea, se disminuye la agitación molecular) manteniendo inalterable las demás condiciones, las moléculas se unen formando una estructura sólida en la que cada átomo ocupa un lugar determinado (estos sólo pueden vibrar en torno a esa posición); o sea, que en general, se da la situación de una estructura bien ordenada y regular, la cual recibe el nombre de sólido cristalino.*

Si pudiéramos ver la disposición de los átomos en un sólido cristalino, encontraríamos que estos están en posiciones ´fijas´ alineados geométricamente y en forma regular en las tres direcciones del espacio, de manera similar a los nudos de una red. De allí la denominación "red cristalina". Esta disposición regular permite ubicar fácilmente los átomos de la estructura en un ´sistema de referencia´ (un sistema de ejes coordenados x-y-z).

Para simplificar el tratamiento del tema se puede trabajar con una red ´bidimensional´; o sea, con átomos sólo del plano. En tal caso las representaciones se pueden hacer en el plano considerando para ello que un círculo representa un átomo donde el núcleo atómico está representado por el centro del círculo (P) y el círculo mismo significa el espacio donde está contenida la nube electrónica. La posición de un átomo (círculo) queda determinada dando las coordenadas de su núcleo o, por el vector posición del mismo que indicamos $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{p}}$.



Así, por ejemplo, el esquema adjunto corresponde a la estructura cristalina de la sal común (Cl Na); donde los círculos grandes corresponden al Cl^- y los chicos al Na^+ . Para este gráfico se pide entonces:

a) Ubicar los átomos cuyos centros están en **P**(-4, 2) ; **Q**(-5, 3) y **R**(-3, 3), indicar de qué tipo de átomos se trata y marcar sus vectores posición $\bar{r}_P, \bar{r}_Q, \bar{r}_R$. Dar la distancia al origen de estos átomos y el ángulo que forman con el eje x(+).

b) Marcar en el gráfico todos los átomos cuyos núcleos estén a una distancia menor que 4,5 Å del origen del sistema y sus argumentos entre 20º y 120º. Dar sus coordenadas.

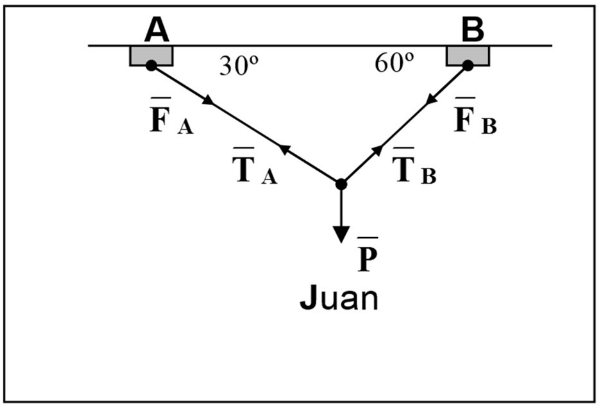
c) Indicar V ó F: " $\bar{r}_R$- $\bar{r}_P$ indica cuanto y hacia donde me debo desplazar para llegar del átomo **P** al **R** "

d) Hallar (usando (b)) el átomo **A** si $\bar{r}_A - \bar{r}_P = (6, 2)$. Calcular componentes, módulo y argumento de $\bar{r}_A$. Verificar que $|\bar{r}_A| = |\bar{r}_P|$ y, (usando los argumentos) que $\bar{r}_A \perp \bar{r}_P$. Existe otro átomo que también cumple estas condiciones: ¿cuál es? .

e) Hallar la distancia internuclear Cl-Na y la menor distancia internuclear Na-Na .

f) Indicar quienes son los átomos **C** y **D** si: $\bar{r}_C + \bar{r}_D = (7,1)$ y $\bar{r}_C - \bar{r}_D = (1;-1)$.

36. Hallar las fuerzas $\bar{F}_A$ y $\bar{F}_B$ ejercidas por Juan sobre A y B si Juan pesa 72 kg. y se mantiene en reposo en la posición indicada durante 2 minutos de su ejercicio. Analizar en qué punto, A ó B, es mayor la intensidad de la fuerza ejercida por Juan.



Sugerencias:

- Fijar en sistema de referencias en el nudo de unión de las tres cuerdas **.**
- considerar dicho nudo como si fuese el cuerpo y recordar que, si está en reposo, la resultante $\bar{r}$ de las fuerzas ejercidas sobre el mismo debe ser cero.
- Observar que $\bar{r} = \bar{T}_A + \bar{T}_B + \bar{P}$.
- Recordar que: $\bar{F}_A = - \bar{T}_A$
  $\bar{F}_B = - \bar{T}_B$

37. *Para un objeto en movimiento, sea cual sea el espacio donde se mueve (uni, bi o tri ´dimensional´), para representar el ´**desplazamiento**´ del mismo en ´**t** hs´, se acude al llamado ´**vector desplazamiento**´ (* $\bar{d}$ *). Este vector, tiene tantas componentes como el espacio donde se estudia el movimiento e indica no sólo cuanto se desplaza el objeto, sino también en que dirección y sentido lo hace.*

*Si el movimiento se realiza a **velocidad constante**,* $\bar{v}$*, el vector desplazamiento* $\bar{d}$ *resulta **paralelo** al vector velocidad; o sea* $\bar{d} = t\,.\bar{v}$*("desplazamiento" ="velocidad por tiempo").*

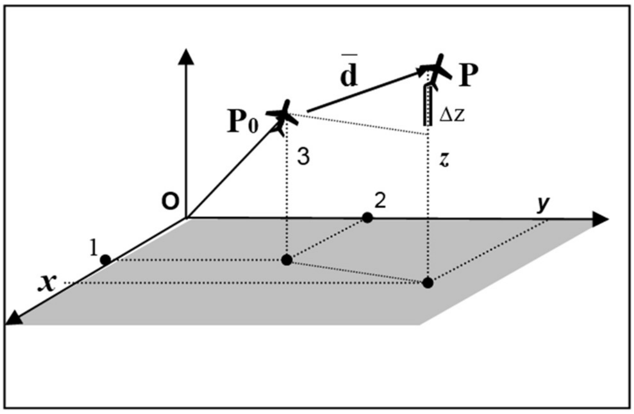
a) Si P_0 y **P** son origen y extremo de $\bar{d}$ (*vector desplazamiento de un móvil)* demostrar que $\overline{OP}$ (vector posición del móvil) se puede escribir en "función" de t como sigue: $\overline{OP} = \overline{OP_0} + t\,.\bar{v}$.

Luego, hallar $\overline{OP}$ en "función" de t para los movimientos que se indican a continuación**:**

i) unidimensional; $\bar{v}= 3\,\bar{i}$; $\mathbf{P_o}(1)$; $\mathbf{P}(x)$
ii) bidimensional; $\bar{v}= (3; 2)$; $\mathbf{P_o}(1; 4)$; $\mathbf{P}(x; y)$
iii) tridimensional; $\bar{v}= (3; 2; 4)$; $\mathbf{P_o}(1; 4; 0)$; $\mathbf{P}(x; y; z)$

En cada caso, graficar $\overline{OP}$ y $\bar{\mathbf{d}}$ para **t** = 1; 2; 3 ; realizar una conjetura acerca del tipo de "*trayectoria"* que estaría siguiendo el móvil.

b) Si con **P** representamos una paloma volando en línea recta con una velocidad $\bar{v} = 10\,\bar{i} + 6\,\bar{j} + \bar{k}$ y, con (***x, y, z***), indicamos las coordenadas de **P** en el espacio (***z*** = altura respecto al suelo y $v = |\bar{v}|$ en km/h) se pide:

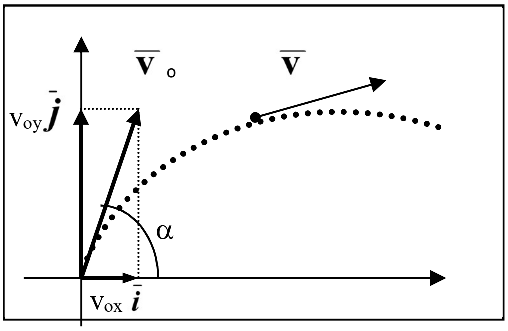


i) dar la posición **P** de la paloma una hora después de observarla si en el instante que la divisamos (t=0) su posición es $\mathbf{P}_o(1,2,3)$. Dos horas después: ¿donde está ?; ¿tres horas después?; ¿t horas ?

ii) Verificar que la paloma tarda 36 seg. en *subir* 10 *m*.

(*) Tener en cuenta que ´lo que sube la paloma´ corresponde al segmento ´Δz´ del gráfico adjunto y que, para el desplazamiento vertical se tiene: $\Delta z = v_z.t$ (MRU con $v = v_z$).

38. *La descomposición de un vector o resolución del mismo en sus componentes horizontal y vertical ($\bar{v}= v_x.\,\bar{i} + v_y.\,\bar{j}$) es una técnica importante en el estudio de fenómenos en los que intervienen cantidades vectoriales. Por ejemplo si $\bar{v}$ es una velocidad entonces esta expresión nos dice que el efecto físico de sólo la velocidad $\bar{v}$ es igual al efecto ´**sumado**´ de las velocidades horizontal y vertical, ($v_x.\,\bar{i}$) y ($v_y.\,\bar{j}$), respectivamente. De tal forma un problema ´bidimensional´ se puede "descomponer" en dos problemas ´unidimensionales´ los cuales, normalmente, resultan más fáciles de resolver. Resueltos los problemas unidimensionales se combinan los resultados (otra vez mediante métodos vectoriales) y se obtiene la solución del problema original. Este hecho se usa, por ejemplo, para estudiar el MOVIMIENTO de PROYECTILES en el PLANO.*



a) Sea **P** un proyectil que se lanza desde el origen con un ángulo de inclinación igual a α (ángulo que forma $\bar{v}_o$ (veloc. inicial) con la horizontal).
En tal caso su aceleración, $\bar{a} = (a_x ; a_y)$, es la de la gravedad; o sea, $\bar{a} = - g.\bar{j}$, (g = 9.8 m/seg^2).
Si indicamos con $\bar{v}= (v_x ; v_y)$ la velocidad de **P** en cada instante "***t*** " te pedimos que demuestres, acudiendo a las *leyes de la física para movimientos rectilíneos*, que:

"$\bar{v}$ es 'función' de 't' ; en particular, que $\bar{v} = \bar{v}_o + t\,.\bar{a}$ "

Sugerencias: para hallar v_x y v_y en función de "t" tener en cuenta que, en toda la trayectoria:

(*) el desplazamiento *horizontal* es a *´velocidad´* (v_x) constante e igual a la inicial ($v_{o\,x}$) (MRU);

(*) el desplazamiento *vertical* es a *´aceleración´* (a_y) constante e igual a la de la gravedad (MRUA).

b) Indicar V ó F, justificar la respuesta.

- Existe un instante "t" en que la *intensidad* de la velocidad es cero.
- v_y disminuye a medida que pasa el tiempo.
- Existe un instante "t" en que v_y es cero.
- Existe un instante "$t \neq 0$" en que $\bar{v} = \bar{v}_o$.
- Existe una $\bar{v}_o$ para la cual $\bar{v}$ // eje y.
- Si $t = (2\,v_{oy}) / g$ entonces $\bar{v} = -\bar{v}_o$
- $\overline{OP} = \bar{v}_o\, t + ½\, \bar{a}\,.t^2$, con $\overline{OP}$ (vector posición del proyectil).

c) Lanzamos un proyectil con $v_o = 80$ m/s (rapidez inicial) y $\alpha = 30^o$.

Para este proyectil te pedimos que:

- halles las componentes de $\bar{v}_o$;
- halles las componentes de $\overline{OP}$ (vector posición del proyectil).
- demuestres que en este caso la trayectoria es una parábola de ecuación:

$$y = \frac{v_{oy}}{v_{ox}}.x - \frac{g}{2v_{ox}^2}.x^2$$

- ¿En qué instante el proyectil llega al punto de máxima altura?. ¿qué velocidad tiene en ese instante?

(PRODUCTO ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO)

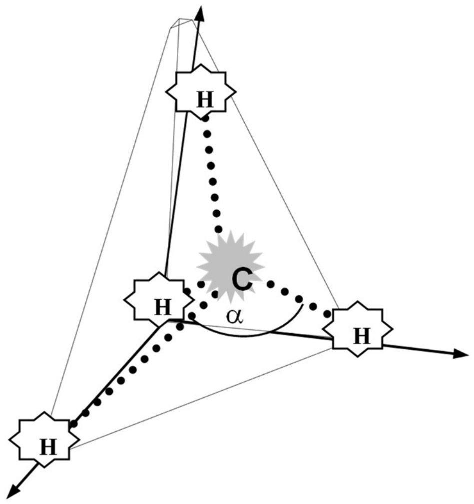
39. Dados los puntos **A** (5;0) y **B**(3;y) , determinar "y" de modo que $\overline{\mathbf{OA}}$ **y** $\overline{\mathbf{OB}}$ determinen un paralelogramo de lados iguales. Luego hallar **C**, vértice faltante, y demostrar que las diagonales del paralelogramo **0ABC**, son perpendiculares entre sí.

40. a) Dado el punto fijo **A** (1,3,0), el punto **P**(x,y,z) y el vector $\bar{k}$, escribir una *ecuación* en *x,y,z* que diga lo siguiente: $\overline{\mathbf{AP}}$ y $\bar{k}$ son perpendiculares. Dar una descripción *geométrica* de los puntos que cumplen la ecuación hallada.

b) Idem con $\bar{j}$.

c) Idem con $\bar{i}$.

41. La molécula de metano, CH_4, está ordenada de modo que los cuatro átomos de hidrógeno están en los vértices de un tetraedro regular (todos sus lados iguales), con el átomo de carbono en el centro.



Suponiendo que los ejes y escalas se eligen de modo tal que las coordenadas de los vértices del tetraedro son (0,0,0); (1,1,0); (1,0,1) ; (0,1,1) y las del centro (½ ; ½ ; ½) , determinar:

a) la distancia H-H y C-H,

b) ´α´ (ángulo de enlace en la combinación H-C-H); ángulo entre las rectas que unen el átomo de carbono con el de hidrógeno.

42. Sea P una partícula que se mueve sobre una ´*curva*´ de forma tal que su posición inicial es (r; 0) (r>0) y su vector posición en cada instante "t" viene dado por :

$$\bar{\boldsymbol{r}}(t) = r\cos(\omega t).\ \bar{\boldsymbol{i}} + r\ \mathrm{sen}(\omega t).\bar{\boldsymbol{j}}$$

a) Demostrar que $|\bar{\boldsymbol{r}}(t)| = r$; ∀ t. ¿ Sobre que curva están estos puntos ?

b) Demostrar que $\bar{\boldsymbol{v}}(t) = -r\,\omega\ \mathrm{sen}(\omega t).\ \bar{\boldsymbol{i}} + r\,\omega\cos(\omega t).\bar{\boldsymbol{j}}$ es perpendicular al vector posición $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$; ∀ t y que $|\bar{\boldsymbol{v}}(t)| = r\,\omega$; ∀ t.

c) Si $\omega = 2$ y $r = 5$ graficar $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ y $\bar{\boldsymbol{v}}(t)$ para $t = 0$; $\pi/4$; $\pi/2$; $3\pi/4$ (para cada "t" graficar $\bar{\boldsymbol{v}}(t)$ con origen en el extremo de $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$)

d) Si la longitud de la trayectoria recorrida se mide en metros y el tiempo en segundos, verificar que en π/4 seg. la partícula recorre 5 π/2 m. (≈ 7,85 m) En un segundo: ¿cuánto recorre ? ¿ rω m.? .
***Discutir la siguiente afirmación*:**

" $|\bar{\boldsymbol{v}}(t)|$ da la *rapidez* con que la partícula recorre la curva"

5.12 Proyecto

Los vectores se utilizan en FISICA para representar FUERZAS ya que las mismas tienen una magnitud (medida en Kgr o Newton), una dirección y un sentido. Sabido es también que si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo su efecto sobre el mismo es igual al de la fuerza resultante (vector suma de las fuerzas actuantes).
Las fuerzas actúan sobre los cuerpos de distintas formas, por ejemplo: produciendo “desplazamientos”, produciendo “rotaciones”. La búsqueda de una relación entre fuerza y desplazamiento producido por efecto de la misma, lleva al concepto físico de TRABAJO.

NOTACIONES CONVENIDAS *(para los elementos a utilizar):*

P ➔ *cuerpo en movimiento sobre una recta (*P_i *: posición inicial ,* P_f *: posición final)*

$\overline{\mathbf{F}}$ ➔ *vector fuerza que actúa sobre* P *;*

$F = |\,\overline{\mathbf{F}}\,|$ ➔ *módulo de* $\overline{\mathbf{F}}$

$\bar{\mathbf{d}} = \overline{\mathbf{P_i P_f}}$ ➔ *vector desplazamiento, indica cuánto y en que* dirección *y* sentido *la fuerza mueve al cuerpo.*

$d = |\bar{\mathbf{d}}|$ ➔ *módulo de* $\bar{\mathbf{d}}$. *(d indica sólo cuanto se ha movido el cuerpo)*

DESARROLLO:

1er CASO ⇨ ***constante***
$\overline{\mathbf{F}} \;//\; \bar{\mathbf{d}}$; $\overline{\mathbf{F}}_o = \bar{\mathbf{d}}_o$

1-a) Escribir, usando las notaciones convenidas, una fórmula que exprese lo siguiente:
“ el trabajo W realizado por una fuerza $\overline{\mathbf{F}}$ dirigida
a lo largo de la línea de movimiento, se calcula como el producto
de la magnitud de la fuerza por la magnitud del desplazamiento”.

1- b) Indicar si W es una magnitud escalar o vectorial: …………………………

1- c) Una partícula P que inicialmente se halla a 2 m. del origen de un sistema de referencia dado por un eje coordenado horizontal, es desplazada 8 m. en el sentido positivo por la acción de una fuerza paralela al mismo y de intensidad igual a 3 N. Se pide: representar gráficamente la situación indicada y calcular el trabajo (en N.m = Joule) realizado por la fuerza . (Escalas : 1m = 1 cm y 1N = 1cm.)

1-d) Un bloque de 5 kg de masa se eleva 10 m. desde el piso donde reposa y luego se deja caer (caída libre). Representar gráficamente la situación indicada y calcular el trabajo realizado por el peso del bloque desde que se suelta hasta que toca el suelo, en un lugar donde la aceleración de la gravedad es de 9.8 m/seg^2.

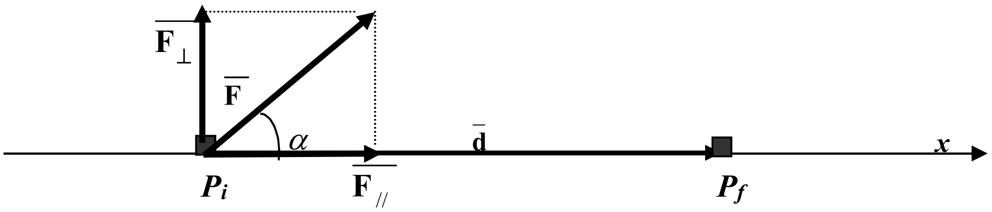
Recordar:
$\overline{\mathbf{F}}$ = m.ā . El peso es una fuerza en la que ā =$\bar{g}$, [F] = Newton / N = kg .m/seg^2

1-f) ¿Se puede usar la fórmula propuesta en (1-a) , para calcular el trabajo realizado por la fuerza $\bar{F} = 3\bar{\imath} + 4\,\bar{\jmath}$, para desplazar una partícula desde el punto Pi (-3, 0) hasta el Pf (3,8)?. Justificar la respuesta gráfica y analíticamente. Si la fórmula se puede usar, entonces calcular con ella el trabajo realizado por $\overline{\mathbf{F}}$.

1-g) Idem para $\bar{F} = 3\bar{\imath} + 4\,\bar{\jmath}$, Pi (-3, 0) y Pf (3,0) .

2do CASO ⇨

$\overline{\mathbf{F}}$ ***constante***
$\overline{\mathbf{F}}$ ***no paralela a*** $\bar{\mathbf{d}}$



Si descomponemos la fuerza $\bar{F}$ en dos direcciones, una según la dirección del movimiento ($\overline{\mathbf{F}}_{//}$) y otra perpendicular a él ($\overline{\mathbf{F}}_\perp$), el efecto físico de la sola fuerza $\overline{\mathbf{F}}$ es igual al efecto combinado de las fuerzas $\overline{\mathbf{F}}_{//}$ y $\overline{\mathbf{F}}_\perp$ ($\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}_{//} + \overline{\mathbf{F}}_\perp$). Por otro lado, la Física nos dice que el efecto de la fuerza $\overline{\mathbf{F}}$ es en definitiva el mismo que el producido por $\overline{\mathbf{F}}_{//}$ o, equivalentemente, que $\overline{\mathbf{F}}_\perp$ no realiza trabajo. Así, el trabajo realizado por $\overline{\mathbf{F}}$ es igual al trabajo realizado por $\overline{\mathbf{F}}_{//}$; o sea, al realizado por <u>la componente de</u> $\overline{\mathbf{F}}$ <u>en la dirección del movimiento</u>.

2-a) Demostrar, usando la fórmula concluida en (1-a), que en el ca so de $\overline{\mathbf{F}}$ no paralela a $\bar{\mathbf{d}}$, entonces: $\mathbf{W} = (\ \mathbf{proy}_{\bar{\mathbf{d}}}\ \overline{\mathbf{F}}\ ).\ \mathrm{d}$

2-b) Demostrar (usando propiedades de vectores) que:

$$\boxed{\mathbf{W} = \overline{\mathbf{F}}\ .\ \bar{\mathbf{d}}}$$

2-c) La fórmula hallada en (2-b): ¿incluye la dada en (1-a)?,

SI ➔ ¿porqué? NO ➔ ¿porqué?

<u>CONCLUSIÓN:</u> en cualquier caso el TRABAJO se calcula como el PRODUCTO ESCALAR de fuerza por desplazamiento.

$$\mathbf{W} = \overline{\mathbf{F}}\ .\ \bar{\mathbf{d}}$$

CUESTIONARIO:

1.- Matemáticamente : ¿puede W ser negativo? ¿Físicamente?

2.- ¿ Puede W ser cero sin que lo sean $\overline{\mathbf{F}}$ y $\bar{\mathbf{d}}$? Explicar.

3.- ¿Cual es el trabajo realizado por una persona que sostiene una valija de 5 kg en reposo, en el aire?. ¿ y si va caminando a velocidad constante?

4.- Se sabe que una partícula P sometida a la acción de una fuerza paralela a la dirección del movimiento se desplaza 20 m. Si el trabajo realizado es de - 40 Joules. ¿Cuál es la intensidad de la fuerza aplicada?. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 1:

Sea P una partícula moviéndose en el plano en la dirección del vector $\bar{\mathbf{u}}$= (8; 6), bajo la acción de una fuerza $\overline{\mathbf{F}}$ dada por el vector $3\,\bar{i} + 4\bar{j}$.

Si P_i es el origen de coordenadas se pide, graficar $\bar{\mathbf{u}}$ y $\overline{\mathbf{F}}$ con origen común en P_i y

a) descomponer $\overline{\mathbf{F}}$ como la suma de dos fuerzas, una paralela al movimiento ($\overline{\mathbf{F}_{//}}$) y otra perpendicular al mismo ($\overline{\mathbf{F}_{\perp}}$). Dar las componentes de estas fuerzas. (Sugerencia: ver ejercicio 15 de la práctica) .

b) Verificar que los trabajos realizados por $\overline{\mathbf{F}_{//}}$ y por $\overline{\mathbf{F}}$ para desplazar la partícula 20m. resultan iguales. Calcular el trabajo realizado por $\overline{\mathbf{F}_{\perp}}$. Resolver los siguientes problemas usando siempre la fórmula hallada en (2-b) .

PROBLEMA 2:

Un vector $\overline{\mathbf{F}}$ representa una fuerza de magnitud 10 N que forma un ángulo de 45º con el semieje x(+). Graficar en un mismo sistema coordenado $\overline{\mathbf{F}}$ y los vectores desplazamientos $\bar{\mathbf{d}}_i$ que indican el movimiento de una partícula P desde el origen hasta el punto P_f, si :

a) P se mueve 5m en la dirección del semieje x(+). ($\bar{\mathbf{d}}_1$)

b) $P_f(4,3)$ ($\bar{\mathbf{d}}_2$) c) $P_f(\frac{5}{\sqrt{2}} , \frac{5}{\sqrt{2}})$ ($\bar{\mathbf{d}}_3$) d) $P_f(3, 4)$ ($\bar{\mathbf{d}}_4$)

e) P se mueve 5m en la dirección del semieje y(+) ($\bar{\mathbf{d}}_5$)

f) $P_f(-\frac{5}{\sqrt{2}} , \frac{5}{\sqrt{2}})$ ($\bar{\mathbf{d}}_6$)

g) P se mueve 5m en la dirección del semieje x(-) ($\bar{\mathbf{d}}_7$)

h) $P_f(-\frac{5}{\sqrt{2}} , -\frac{5}{\sqrt{2}})$ ($\bar{\mathbf{d}}_8$)

i) P se mueve 5m en la dirección del semieje y(-) ($\bar{\mathbf{d}}_9$)

j) $P_f(\frac{5}{\sqrt{2}} , -\frac{5}{\sqrt{2}})$ ($\bar{\mathbf{d}}_{10}$)

(*) Verificar que los vectores desplazamiento tienen todos el mismo módulo.

(*) Los puntos P_f están sobre una curva conocida, ¿cuál es?.

(*) A partir del gráfico, sin hacer cálculos pero indicando en qué se basa y porqué, señalar los desplazamientos para los cuales el trabajo realizado por $\overline{\mathbf{F}}$ sobre la partícula es: positivo, negativo ó cero.

(*) Calcular el trabajo W_i realizado por $\overline{\mathbf{F}}$ sobre la partícula para cada $\bar{\mathbf{d}}_i$. Analizar y sacar conclusiones acerca de los valores obtenidos (¿Qué origina la variación de W_i ?. ¿Existe un desplazamientopara el cual el trabajo sea máximo?, ¿mínimo? . ¿ Porqué ?).

(**) Formule en una oración la propiedad detectada en el caso estudiado.

6 — Curvas

En este Capítulo comenzamos trabajando en forma genérica el concepto de **CURVA**; luego, una vez definido el mismo con todo rigor, nos ocupamos de lleno de una curva en particular: **la recta** .

Los temas desarrollados en esta unidad corresponde a una rama de la Matemática: la GEOMETRÍA ANALÍTICA. Esta, a su vez, es una rama de la Geometría. y se desarrolla a partir de las simples pero potentes ideas de un gran filósofo del siglo VII; René Descartes.

> ☞ ***René Descartes*** *propone por primera vez en un libro publicado en* ***1637****, la idea de representar* ***´puntos del plano´*** *por* ***´pares de números reales´*** *. Este libro produce una revolución en la Matemática pues a través de una idea tan simple, Descartes* ***´conecta´*** *dos grandes ramas de la Matemática, la Geometría y el Algebra, hecho que da lugar a lo que hoy se conoce como* ***Geometría Analítica****. A partir de ese momento histórico* ***los conceptos ´geométricos´ pudieron formularse algebraicamente y los ´algebraicos´, visualizarse gráficamente.***

En <u>**Geometría**</u>, las curvas se definen como "*conjunto de puntos que verifica una o más condiciones previamente dadas*". Los conjuntos se pueden dar de distintas formas. En este curso, los conjuntos los vamos a dar:

> ☞ por ***comprensión***; o sea, indicando primero los ***elementos del conjunto*** y luego, separada por una barra, ***la condición*** que debe verificar un punto para pertenecer al conjunto.

Por ejemplo; si $\mathcal{C}$ es una circunferencia (plana) entonces geométricamente se define como:

$$\mathcal{C} = \{ \underbrace{ptos \cdot del \cdot plano}_{elementos} \; / \; \underbrace{equidistan \cdot de \cdot un \cdot pto \cdot fijo}_{condición} \}$$

En <u>**Geometría Analítica**</u>, la correspondencia entre puntos del plano y pares de números reales (o puntos del espacio y ternas de números reales) permite, ***previa introducción de un sistema de referencia*** (sistema cartesiano ortogonal), ***traducir*** la condición geométrica a una expresión algebraica; expresión que llamamos, ***ecuación de la curva****.*

<u>**Ecuación de una curva**</u>: "*ecuación satisfecha por todos los puntos de la curva y sólo por ellos*".

Así, dada $\mathcal{C}$ definida geométricamente por: $\mathcal{C} = \{ \underbrace{ptos \cdot del \cdot plano}_{elementos} \; / \; \underbrace{equidistan \cdot de \cdot un \cdot pto \cdot fijo}_{condición} \}$;

Si llamamos **P** a los puntos de $\mathcal{C}$; **C** al punto fijo del que equidistan (centro de la circunferencia); ***r*** a la distancia de **P** a **C** (centro) y Π al plano donde se grafica la curva, podemos escribir:

$$\mathcal{C} = \{ P \in \Pi \; / \; d\,(P;C) = r \}.$$

Introduciendo un **sistema cartesiano ortogonal** podemos expresar los puntos por sus coordenadas, **P**(x; y) , **C**(a; b) y ´**formular algebraicamente**´ la condición que define $\mathcal{C}$:

$$d\,(P;\,C) = r \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2} = r \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + (x-b)^2 = r^2$$

Finalmente concluimos que: $\mathcal{C} = \{\, (x;\, y) \in R^2 \;/\; \underbrace{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}_{condición \;\to\; ecuación} \,\}.$

El ejemplo muestra como podemos representar una curva por el conjunto de puntos del plano que cumple cierta propiedad geométrica; dar luego, y a partir de allí, *la ecuación de la curva.*

Cabe aclarar que este proceso no se puede hacer con ´*cualquier*´ conjunto de puntos del plano (o el espacio); o sea, que ***existen conjuntos de puntos que "no definen curva"***:

$C = \{\, (x,y) \,/\; x^2 + y^2 = 25 \,\} \subset R^2$ ➔ **circunferencia** ➔ CURVA en Π

$D = \{\, (x,y) \,/\; x^2 + y^2 \leq 25 \,\} \subset R^2$ ➔ **círculo** ➔ FIGURA PLANA en Π

$D = \{\, P \in \Pi \,/\, d\,(P;\, C) \leq 5 \,\}$

Resulta necesario entonces indicar con precisión que es aquello que ´*caracteriza*´ y ´*distingue*´ a una curva de cualquier otro conjunto del plano (ó espacio); o sea, que es en esencia lo que verifican los conjuntos de puntos que llamamos curvas y sólo ellos. La ***unidimensionalidad*** es una propiedad que caracteriza al concepto de curva, y lo hace en forma esencial ya que es la que permite distinguir ´*curvas*´ de ´*no curvas*´ (por ejemplo, circunferencia de círculo). Luego veremos que entre todas las formas algebraicas de representar una curva existe una que expresa esta característica. En lo que sigue nos ocupamos de reconocer y estudiar las "ecuaciones que definen curva", empezando por las "curvas planas".

6.1 Curvas planas

Dada una curva ***C*** esta puede o no estar íntegramente contenida en un plano. Cuando existe un plano que la contiene entonces decimos que ***C*** es una "*curva plana*".

En general, una curva plana es el subconjunto de puntos del plano que satisfacen una ***condición*** dada, la cual se expresa a través de una ´***ecuación***´.

C, curva plana; entonces

C = "*conjunto de puntos del plano* ***solución*** *de una cierta* ***ecuación***".

$$C = \{\, \underbrace{(x;y) \in R^2}_{elementos} \;/\; \underbrace{.....ecuación\;.......}_{condición} \,\}\,.$$

Existen distintas formas de dar esta ecuación, las que iremos viendo una a una, y son esencialmente tres:

① ***ecuaciones cartesianas***

② ***ecuaciones paramétricas***

③ ***ecuaciones vectoriales***

① *Ecuaciones Cartesianas de una Curva Plana*

En este caso la condición que caracteriza a la curva viene dada por una ecuación que sólo muestra la relación entre las *coordenadas cartesianas **(x; y)** de los puntos de la curva*; es decir, por una **ecuación en dos variables (ó incógnitas)**:

C = "*conjunto de puntos del plano **solución** de una **ecuación con dos incógnitas***".

Normalmente al representar una curva omitimos indicar los "elementos de la curva" (particularmente cuando está claro de que curva se trata), escribimos sólo la ecuación que caracteriza a la curva.
Algunas de las ecuaciones en dos variables que definen curvas planas son:

♦ ***ecuación de 1er grado con dos incógnitas**:* $\boldsymbol{a\,x + b\,y + c = 0}$ (rectas);

$$3x + 2y - 2 = 0\ ;\quad x - 3 = 0\ ;\quad x + y = 0\ ;\quad y = 0$$

♦ ***ecuación de 2do grado con dos incógnitas**:* $\boldsymbol{A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + Dx + Ey + F = 0}$ (cónicas)

$x^2 + y^2 - 25 = 0$ (circunferencia); $4\,x^2 - y + 2 = 0$ (parábola); $4\,x^2 + y^2 - 16 = 0$ (elipse)

♦ ***toda ecuación de dos variables que defina función**;* ya sea, con fórmula $\boldsymbol{y = f(x)}$ *ó* $\boldsymbol{x = g(y)}$.

$$\underbrace{y = \mathrm{sen}x}_{\textit{onda senoidal}}\ ;\quad \underbrace{y = x^2 + 3}_{\textit{parábola}}\ ;\quad \underbrace{y = 3/x}_{\textit{hipérbola}}\ ;\quad \boldsymbol{x\,y = 3}\ ;\quad \boldsymbol{x = y^2}\ ;\quad \boldsymbol{x^2y + y - 5 = 0}$$

Observaciones:

1) En algunos casos la ecuación es directa (o indirectamente) la ***fórmula de una función de una variable*** ($y = \mathrm{sen}\ x$ ***ó,*** $x^2\ y + y - 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5}{x^2+1}$); pero no siempre es así ($x^2 + y^2 - 25 = 0$, no define función con fórmula $\boldsymbol{y = f(x)}$ ni con fórmula $\boldsymbol{x = g(y)}$). O sea, no siempre podemos asociar a una curva dada por una ecuación en dos variables, una función de una variable (hecho que veremos más adelante, al estudiar funciones).

2) Si con ***F(x; y)= 0*** representamos una "***ecuación en dos incógnitas***" y, según dijimos, ***C*** = "*conjunto de puntos del plano **solución** de una **ecuación con dos incógnitas*** ". entonces podemos escribir la curva como:

$$\boldsymbol{C = \{\,P(x;\,y) \in \Pi\ /\ F(x;\,y) = 0\,\}\,.}$$

Equivalentemente:

$$\boxed{\boldsymbol{P\,(x;\,y) \in C \quad \Leftrightarrow \quad F(x;\,y) = 0}}$$

3) Determinación de puntos de una curva dada por una ecuación con dos incógnitas

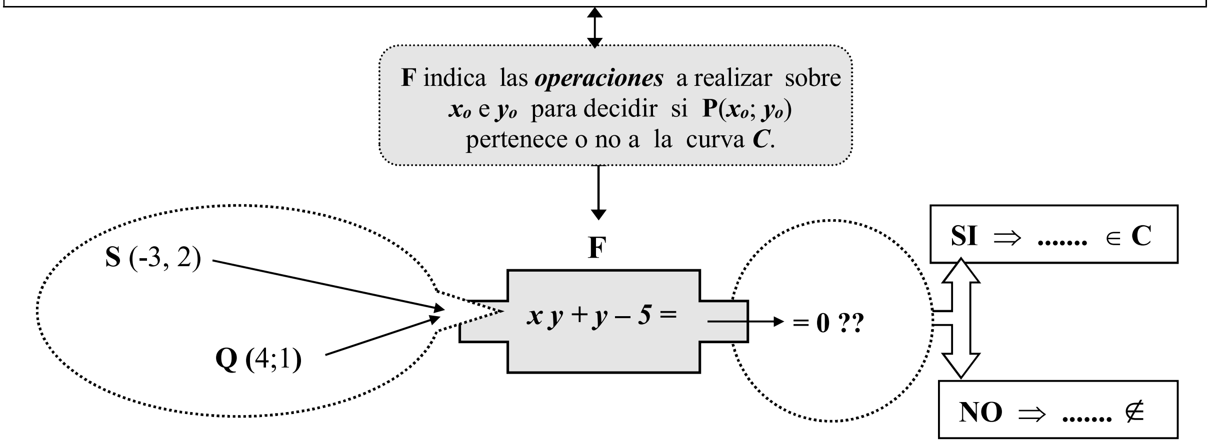
☞ Dado **P**(x_o;y_o) un punto cualquiera del plano, ¿cómo decidimos si **P** pertenece o no a ***C***?

☞ Calculamos **F**(x_o; y_o) y concluimos:

* si $\mathbf{F}(x_o;\,y_o) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{P}(x_o;y_o) \in C$
* si $\mathbf{F}(x_o;\,y_o) \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{P}(x_o;y_o) \notin C$

Ejemplo: $C = \{ P(x;\, y) \in \Pi \ / \ x\,y + y - 5 = 0\}$

$$P\,(x_o;\, y_o) \in C \iff F(x_o;\, y_o) = 0 \iff x_o\, y_o + y_o - 5 = 0$$

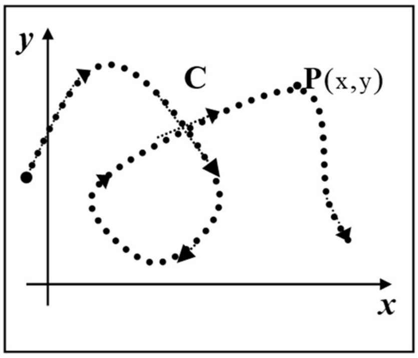


Q (4; 1) → $4 \,.\, 1 + 1 - 5 = 0$ ⇒ $Q \in C$

S (-3; 2) → $(-3) \,.\, 2 + 2 - 5 = -9$ ⇒ $S \notin C$

② *Ecuaciones Paramétricas de una Curva Plana*

Imaginemos ahora una partícula que se mueve en un plano (por ej., una *hormiga* con sus patas entintadas). Con el transcurso del tiempo se irá dibujando una curva sobre el plano, curva a la que damos el nombre de ***´trayectoria´*** de la partícula (*hormiga*).
Si la curva **C** representa la trayectoria de una ´hormiga´ en un cierto intervalo de tiempo, es fácil ver que la hormiga pasa al menos una vez por cada punto **P** de **C** y que esto lo hace en un determinado instante ´***t***´. Nos preguntamos entonces: ¿existirá alguna expresión algebraica que describa **C** y además informe en que instante **´ t ´** la hormiga pasa por cada punto de la curva **?**.



Una ecuación del tipo **F**(x; y) **= 0** **,** es una descripción *estática* de la curva; indica la *forma* de la misma pero no dice nada acerca del *movimiento* sobre ella. Luego, no es la expresión buscada.
Dado como se genera **C**, es evidente que la ***posición de* P** depende del tiempo**;** más aún, es ***función del tiempo.***
La ***posición*** de un punto viene dado por sus coordenadas, **P**(***x***; ***y***); luego, son las ***coordenadas de P*** quienes dependen del tiempo.
O sea, existen ***f*** y ***g*** tal que $x = f(t)$ e $y = g(t)$.

$$t \xrightarrow{\text{det ermina}} x = f(\text{t}) \text{ e } y = g(\text{t}) \xrightarrow{\text{det erminan}} \text{P}\,(f(t);\, g(t)) \in \text{C}$$

Tenemos así otra forma de dar la curva plana **C:** el ***par de ecuaciones***, $x = f(t)$; $y = g(t)$***;*** forma en la que aparece una tercera variable, ***t*** , a la damos el nombre de ***parámetro***.

* Cabe aclarar que aun cuando en muchas aplicaciones el parámetro *t* denota tiempo y (*f(t)*; *g(t)*) posición de la partícula al instante *t* ; esto no es siempre así , se usan también otras letras para representarlo.

O sea, y en general, conforme el parámetro (t) varíe en un cierto intervalo [a;b] el punto **P**($f(t)$, $g(t)$) varía también y lo hace recorriendo la curva **C,** la cual se conoce entonces como ***curva paramétrica***.
Tenemos así otra forma de representar curvas; aquella en la que aparece una tercer variable (el *parámetro*) y consiste en un *par de ecuaciones.*

Ecuaciones Paramétricas de una Curva Plana

Las ecuaciones: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$; con $t \in$ [a,b]

se denominan ***ecuaciones paramétricas*** de la curva plana ***C*** y la variable *t* llama *parámetro*.

(*) Esta forma de dar una curva es la que pone en evidencia la propiedad geométrica que caracteriza a las curvas: la de ser un conjunto de puntos ´unidimensional´. Esto obedece al hecho de que la ´dimensión´ de un conjunto la define la cantidad de parámetros necesarios para dar sus ecuaciones paramétricas. En el caso de las curvas basta ***un parámetro*** mientras que, por ejemplo, en el caso de las superificies planas (conjuntos bidimensionales) se requieren *dos parámetros*. Así, esta es la forma que se adopta para definir *formalmente* el concepto de *curva*.

Definición

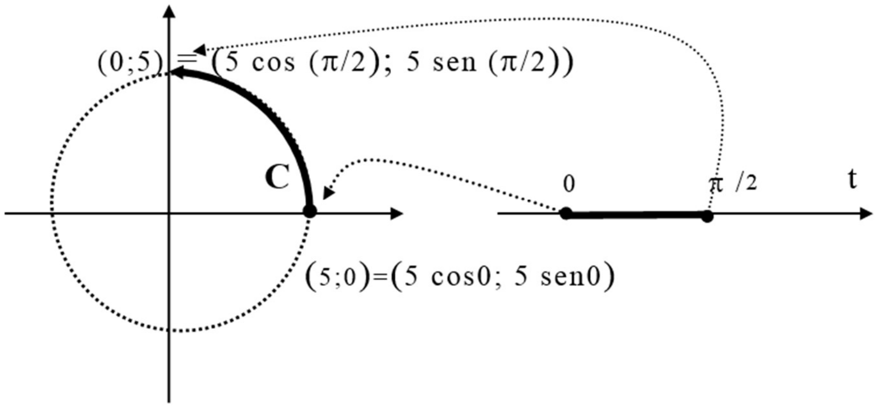
CURVA en R^2

Llamamos curva plana al conjunto de pares ordenados (***x; y***) tales que $x = f(t)$ e $y = g(t)$; con f y g funciones continuas, con dominio común en algún intervalo del eje real.

$$C = \{ (x ; y) \ / \ x = f(t); \ y = g(t) ; \ f \text{ y } g \text{ continuas en } [a,b] \}$$

Ejemplo:

$$C: \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 5 \operatorname{sen} t \end{cases}$$



En este ejemplo apreciamos como conforme ***t*** varía en los reales el punto **P** (5 cos t ; 5 sen t) varía describiendo una curva ***C***, la que en este caso es una circunferencia de radio 5.
Sabemos que **P**(***x; y***) $\in$ *Circ. radio 5* $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 25$, luego, para decidir si **P**(5 cos t ; 5 sen t) $\in$ *Circ. radio 5* , debemos reemplazar en la ecuación cartesiana de la curva y concluir (según el resultado sea o no igual a " **25** ") :

$$x^2 + y^2 = (5 \cos t)^2 + (5 \operatorname{sen} t)^2 = 25.\,(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = \mathbf{25} \ \Rightarrow \ \mathbf{P} \in \mathbf{C}.$$

Cabe observar que sin restricciones sobre el parámetro, el punto **P** se mueve indefinidamente sobre la curva ; que, si queremos que el punto recorra un *arco de curva* (por ej., un cuarto de circunferencia) debemos restringir la variación del parámetro ***t*** a un intervalo (en el ej., $t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$).

Hasta este punto tenemos entonces dos tipos de ecuaciones para dar una curva plana ***C*** :

(1) la ***ecuación cartesiana***.

(2) las ***ecuaciones paramétricas***.

Cada tipo de ecuación proporciona un tipo distinto de información sobre ***C***, y lo que se pierde por un lado se gana por otro. Por ejemplo, la ecuación cartesiana de la curva muestra sólo la relación entre las coordenadas cartesianas (x; y) de los puntos de la curva; así con esta ecuación por un lado *´ganamos´* información en cuanto a la forma de la curva pero por otro, *´perdemos´* información en relación al instante en que cada punto es alcanzado ó en cuanto al sentido de recorrido de la curva. Vemos así la importancia del *´pasaje´* de una forma a otra; cómo, cualquiera sea la forma en que esté dada la curva, esta operación permite acceder a toda la información posible acerca de ella.

Pasaje de paramétricas a cartesiana - Eliminación de parámetro

Evidentemente para pasar de paramétricas a cartesiana debemos *´eliminar´* el parámetro. Así, al proceso por medio del cual realizamos este pasaje se llama: ***eliminación de parámetro***.

Este proceso consiste esencialmente en despejar ***t*** en una de las ecuaciones paramétricas, reemplazar luego con este valor, el ó los ***t*** que aparezcan en la otra.

La ecuación obtenida con este proceso depende de la ecuación en la que despejamos ***t***.

Si despejamos en la ecuación correspondiente a ***x***, obtenemos ´***y*** en función de ***x***´.

Si en cambio despejamos en la correspondiente a ***y***, obtenemos ´***x*** en función de ***y***´.

<u>Ejemplo</u>: **C = { (x ; y) / x = t - 2; y = 3 t + 1 ; *t* ∈ R }**

$$C:\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{despejamos t}} \begin{cases} x + 2 = t \\ y = 3\,t + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2 = t \\ y = 3\,(x+2) + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t - 2 \\ \boxed{y = 3\,x + 7} \end{cases}$$

$$\boxed{y = f(x) \text{ con } f(x) = 3x+7}$$

Luego, eliminado el parámetro, obtenemos la ***ecuación cartesiana*** de la curva **C**;

C = { (x ; y) / y = 3 x + 7 ; *x* ∈ R }

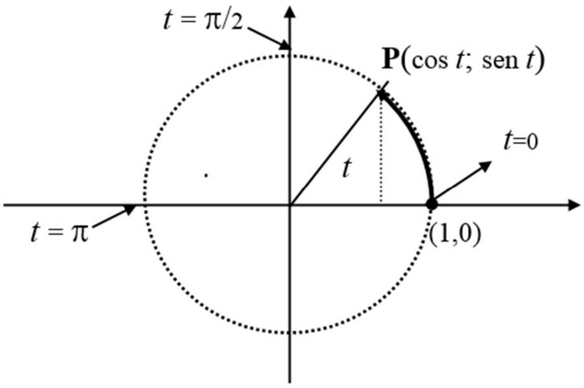
y vemos que ***f***, la función que indica la ´forma´ como se relacionan ***x*** e ***y*** , es una ***función lineal*** lo que nos permite concluir que la **C** de partida no es otra cosa que una, ***recta***.

♦ *<u>Eliminación del parámetro, otro método</u>*

Muchas veces el uso de ***identidades trigonométricas*** facilita la eliminación del parámetro.

Ejemplo 1:

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t; \quad t \in [0 \,;\, 2\pi] \end{cases}$$



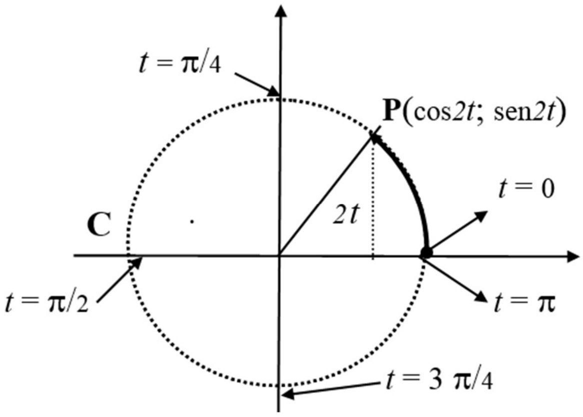
Aquí vemos que conforme t varía en $[0; 2\pi]$ los puntos **P**(x ; y) varían describiendo la curva **C** en dirección antihoraria y partiendo de (1; 0). También vemos que si consideramos el parámetro ***t*** como *ángulo trigonométrico* podemos eliminar ***t*** acudiendo a la ***identidad pitagórica***; que para hacer esto basta elevar al cuadrado ambas ecuaciones y luego sumarlas.

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C: \ x^2 + y^2 = 1}$$

La ***ecuación cartesiana*** de **C**, indica que **C** es una circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Ejemplo 2:

$$\mathbf{C}: \begin{cases} x = \cos (2t) \\ y = \operatorname{sen} (2t) \ ; \quad t \in [0 \,;\, 2\pi] \end{cases}$$



Nuevamente tenemos:

$$x^2 + y^2 = (\cos 2t)^2 + (\operatorname{sen} 2t)^2 = 1 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{C: \ x^2 + y^2 = 1}$$

* Según la ecuación cartesiana obtenida, **C** es una circunferencia de centro en el origen y radio 1. Así, y como ya observáramos, la ecuación cartesiana indica la ´forma´ de la curva pero no informa acerca de cuantas veces se ´recorre´ la misma. Aquí, cuando t varía en $[0;2\pi]$ los puntos **P** (cos 2t ; sen 2t) recorren *dos veces* la circunferencia, en dirección antihoraria y partiendo de (1;0).

♦ La representación paramétrica: ¿ es única ?

$$C_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \approx \begin{cases} t = \frac{1}{2}x \\ \boxed{y = 1 + 2x} \end{cases} \Rightarrow C_1 \equiv r$$

t = 0 → **A** (0; 1) $\in$ **C_1**
t = ½ → **B** (1; 3) $\in$ **C_1**

$$C_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \approx \begin{cases} t = x - 1 \\ \boxed{y = 1 + 2x} \end{cases} \Rightarrow C_2 \equiv r$$

t = -1 → **A** (0; 1) $\in$ **C_2**
t = 0 → **B** (1; 3) $\in$ **C_2**

Conclusión: $C_1 \equiv C_2 \equiv r$ por lo que la representación paramétrica de una curva ***no es única***, ***existen distintas representaciones paramétricas para una misma curva***.

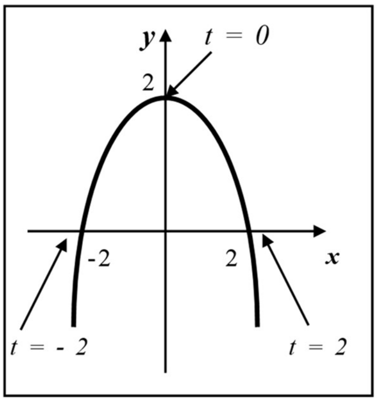
⌦ Pasaje de Cartesiana a Paramétricas.

Dada $y = f(x)$ y C = graf. f, ¿cómo obtenemos las ecuaciones paramétricas de la curva C? Dado que la representación paramétrica no es única, tenemos entonces distintas formas de dar estas ecuaciones, formas que dependen del parámetro que se elija en cada caso.

Ejemplo: hallar las ecuaciones paramétricas correspondientes a $\mathbf{y = 2 - \frac{1}{2} x^2}$ usando el parámetro: $x = t$.

Si $x = t$ entonces $y = 2 - \frac{1}{2}x^2 = 2 - \frac{1}{2}t^2$; luego:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$



En general: si no existen restricciones en cuanto al sentido de recorrido de la curva, la forma más simple de pasar de explícita a paramétricas es a partir de tomar la *variable independiente* como *parámetro.*

$$y = \phi(x) \xrightarrow{x=t} \begin{cases} x = t \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

ECUACIÓN CARTESIANA (EXPLÍCITA) de *C* **ECUACIONES PARAMÉTRICAS de *C***

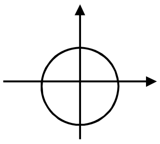
⌧ CÓNICAS.

Ya vimos que una forma de representar curvas planas era a través de una ecuación de 2do grado con dos incógnitas:

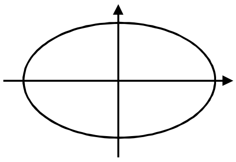
$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Las curvas que estas ecuaciones representan reciben el nombre genérico de **cónicas** pues se obtienen de la intersección de un cono con un plano, variando la posición del plano.
Las curvas que resultan de este proceso son: **circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.**
La presencia de los términos $B\,xy$, $D\,x$ ó $E\,y$ indica que la curva está *´rotada´* y/o que *´no está centrada en el origen´*. Las ecuaciones que corresponden a cónicas centradas en el origen y no rotadas, para distinguirlas de las otras, las vamos a llamar ´ecuaciones canónicas´.

♦ **Ecuaciones Canónicas de las Cónicas**:

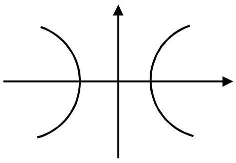


CIRCUNFERENCIA: $x^2 + y^2 = r^2$ (r = radio de la circunferencia)



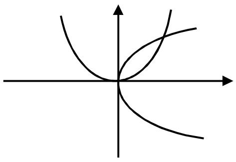
ELIPSE: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (2a y 2b; longitud de los ejes de la elipse)

(vértices: (a; 0) ; (-a; 0) ; (0; b) ; (0; -b))



HIPÉRBOLA: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (2a longitud del eje real (s / eje x))

(*eje imaginario* = eje y en este caso)
(asíntotas: y = b/a .x ; y =- b/a .x)



PARÁBOLA: $y = a\,x^2$ (Vértice en el origen, eje simetría x = 0)
$x = p\,y^2$ (Vértice en el origen, eje simetría y = 0)

♦ ***Ecuaciones Paramétricas de las Cónicas***:
Usando un método conveniente eliminar el parámetro y demostrar que las siguientes ecuaciones paramétricas corresponden a las cónicas que se indican en cada caso.

CIRCUNFERENCIA
centro en el origen y radio "a"

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\ ; & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = a\ \text{sen}\ \theta \end{cases}$$

ELIPSE
centro en el origen, ejes de longitud 2a y 2b

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\ ; & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = b\ \text{sen}\ \theta \end{cases}$$

RAMA de HIPÉRBOLA
centro en el origen, eje real de longitud 2a

$$\begin{cases} x = a\cosh t\ ; & t \in \mathbf{R} \\ y = b\ \text{senh}\ t \end{cases}$$

PARÁBOLA
vértice en el origen, eje de simetría: x = 0

$$\begin{cases} x = t\ ; & t \in \mathbf{R} \\ y = a\,t^2 \end{cases}$$

NOTA: las funciones que definen la hipérbola son :

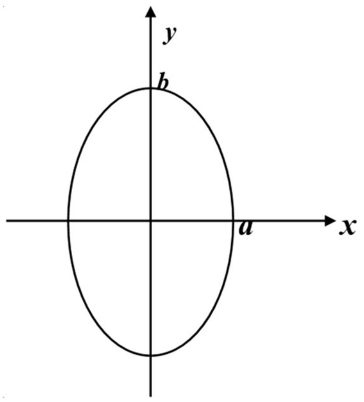
- coseno hiperbólico ; $\cosh t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}$; Dcos h = R ; Im cosh = $[1; +\infty\ ]$
- seno hiperbólico ; $\operatorname{senh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$; D sen h = R ; Im senh = R

* cosh t >0 , $\forall$ t . Luego, tenemos que: $a > 0 \Rightarrow x > 0$ ($\forall$ t) y , $a < 0 \Rightarrow x < 0$ ($\forall$ t) ; de allí que las ecuaciones dadas corresponden sólo a una de las dos ramas de la hipérbola.

* las funciones hiperbólicas verifican que: $(\cosh t)^2 - (\operatorname{senh} t)^2 = 1$; $\forall$ t .

Ejemplo: a través de la eliminación de parámetro obtener la ecuación cartesiana de **C**.

$$C: \begin{cases} x = a\ \cos\theta \\ y = b\ \operatorname{sen}\theta\ ;\ \theta \in [\,0\,;2\pi\,] \end{cases}$$



(Despejamos *sen θ* y *cos θ*): $\cos\theta = \frac{x}{a}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{b}$

(por la identidad pitagórica) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

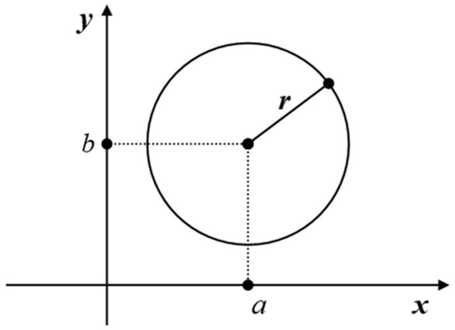
(sustituimos) $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$

(obtenemos) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ecuación canónica de la elipse)

Eliminado el parámetro obtenemos la ***ecuación cartesiana*** de **C**, la cual permite identificar **C** como una elipse con centro en el origen.
Esta elipse presenta centro de simetría (el origen) y ejes de simetría: los ejes coordenados.

Ejemplo: a través de la eliminación de parámetro obtener la ecuación cartesiana de **C** .

$$C: \begin{cases} x = r\cos\theta + a \\ y = r\ \operatorname{sen}\theta + b;\ \theta \in [\,0\,;2\pi\,] \end{cases}$$



(Despejamos sen θ y cos θ): $\cos\theta = \frac{x-a}{r}$; $\operatorname{sen}\theta = \frac{y-b}{r}$

(identidad pitagórica) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

(sustituimos) $(\frac{x-a}{r})^2 + (\frac{x-a}{r})^2 = 1$

(obtenemos) $\frac{(x-a)^2}{r^2} + \frac{(y-b)^2}{r^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

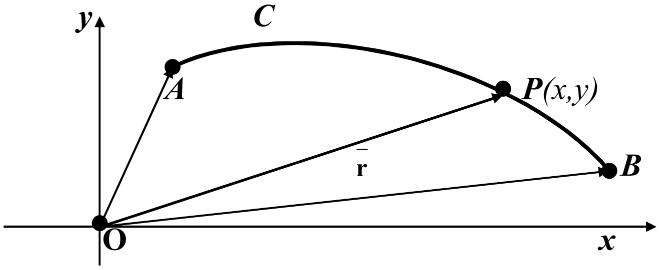
Eliminado el parámetro obtenemos la ***ecuación cartesiana*** de ***C***, la cual permite identificar ***C*** como una circunferencia de radio ***r*** y centro (a; b).

<u>Observación</u>: desarrollando los cuadrados obtenemos $x^2 + y^2 -\underline{2\,a}\,x-\underline{2\,b}\,y+(a^2 + b^2- r^2) = 0$; o sea, una ecuación de 2do grado donde los *coeficientes* de x e y, no son nulos. Verificamos así que cuando tales coeficientes no son nulos, la curva no tiene su centro en el origen.

③ *<u>Ecuaciones Vectoriales de una Curva Plana</u>*

En ② definimos una curva plana ***C*** como el conjunto de pares ordenados **(*x; y*)** que satisfacen las ecuaciones paramétricas:

$$C: \begin{cases} x = f\,(t) \\ y = g(t)\ ;\ \ t \in [a,b] \end{cases}$$

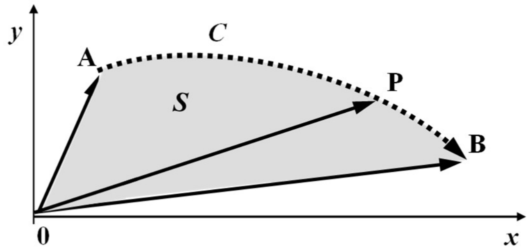


A continuación veremos como los vectores proporcionan otra forma de dar una curva. En particular, dado un punto P de la curva, trabajaremos con $\bar{r}$, **<u>vector posición de P</u>.**

- Si ***P*(x; y)** *y* $\bar{r} = \overline{OP}$ *(vector posición de **P**) vimos entonces que* $\bar{r} = x\ \bar{i}\ +\ y\ \bar{j}$
- Si ***P*(x; y)** $\in C \Rightarrow \exists\, t \in [a,b]$ *tal que* $x = f\,(t)$ *e* $y = g(t) \Rightarrow P(\,f\,(t)\,;\,g\,(t)\,)$.

Luego, $P \in C \Rightarrow P\,(\,f\,(t)\,;\,g\,(t)\,)$; y $\bar{r} = \overline{OP}\ = f\,(t)\ \bar{i} + g\,(t)\ \bar{j}$; y concluimos que el ***vector posición de los puntos de la curva es función del parámetro t***.

<u>NOTA</u>:
Al variar **t** en *[a;b]*; $\bar{r}(t)$ ´barre´ una región del plano **S** (similar a un sector circular) mientras que los **puntos extremos de** $\bar{r}\ (t)$ ´trazan´ una curva plana **C**.
Concluimos entonces que las funciones vectoriales proporcionan otra forma de representar curvas y a la ecuación $\bar{r}\ (t) = f(t)\ \bar{i} + g(t)\ \bar{j}$ *la llamamos* , **<u>ecuación vectorial de la curva</u>.**



$$t = a \ \rightarrow\ \bar{r}(a) = \overline{OA}$$
$$t = b \ \rightarrow\ \bar{r}(b) = \overline{OB}$$
$$t \ \rightarrow\ \bar{r}(t) = \overline{OP}$$

<u>Ejemplo</u>**:* obtener la ecuación cartesiana de la curva ***C , determinada por:

$$\bar{r}\,(t) = 2\ (\,cos\ t)\ \bar{i} + 2\ (sent\ t)\ \ \bar{j}$$

1ro) pasamos ***C*** a paramétricas :

$$C: \begin{cases} x = \ 2\,cos\ t \\ y = \ 2\,sen\ t \end{cases}$$

2do) eliminamos el parámetro y obtenemos la ecuación cartesiana de la curva *C*:
$x^2 + y^2 = (\,2\ cos\ t\,)^2 + (\,2\ sen\ t\,)^2 = 4 \Rightarrow$ ***C:*** $x^2 + y^2 = 4$

6.2 Curvas en el espacio

La definición dada para el caso de una curva plana se extiende fácilmente a CURVAS en $\mathbf{R}^3$.

Definición

CURVA en $\mathbf{R}^3$

Llamamos curva en R^3 al conjunto de ternas ordenadas (x; y; z) tales que $x = \boldsymbol{f}(t)$; $y = \boldsymbol{g}(t)$ y $z = \boldsymbol{h}(t)$ con $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ funciones continuas de t con dominio común en algún intervalo del eje real.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS de una CURVA en $\mathbf{R}^3$

Las ecuaciones:
$$\begin{cases} \boldsymbol{x = f(t)} \\ \boldsymbol{y = g(t)} \ ; \ \text{con } t \in [a,b] \\ \boldsymbol{z = h(t)} \end{cases}$$
son las ecuaciones paramétricas de la curva $\boldsymbol{C}$ de $\mathbf{R}^3$.
La variable t se llama *parámetro*.

¿Cuál será la curva determinada por estas ecuaciones paramétricas? O sea, ¿cómo graficamos curvas en el espacio conocidas las ecuaciones que las definen? Discutimos a continuación algunos casos particulares; pero previamente aclaramos que las curvas de $\mathbf{R}^3$ también pueden representarse a través de *funciones vectoriales*, en este caso con tres funciones componentes.

DEFINICIÓN de FUNCIÓN VECTORIAL en $\mathbf{R}^3$

Una función de la forma:

$$\bar{r}(t) = f(t)\,\bar{\boldsymbol{i}} + g(t)\,\bar{\boldsymbol{j}} + h(t)\,\bar{\boldsymbol{k}}$$

es una función vectorial en $\mathbf{R}^3$ si las componentes del vector $\bar{\mathbf{r}}$, son funciones de un parámetro $\boldsymbol{t}$ a valores reales.

NOTAS:

1) ***f(t)* , *g(t)*** *y* ***h(t)*** *son las* ***funciones componentes de*** $\bar{\mathbf{r}}$.
2) *El dominio de la función vectorial es la* ***intersección*** *de los dominios de las funciones componentes:* $\boldsymbol{D}_{\bar{r}} = Df \cap Dg \cap Dh$.
3) *En forma similar a las funciones vectoriales en el plano las funciones vectoriales en el espacio pueden usarse para representar curvas en el espacio.*
   En este caso la ***ecuación vectorial de la curva*** *es la ecuación determinada por el vector posición* $\bar{r}$ *tal que* $\bar{r} = \overline{\mathbf{OP}}$ *con* $\boldsymbol{P(x;y;z)} \in \boldsymbol{C}$ *; o sea,*
   $$\bar{r}(t) = f(t)\,\bar{\boldsymbol{i}} + g(t)\,\bar{\boldsymbol{j}} + h(t)\,\bar{\boldsymbol{k}}$$

* Así, al variar t, los puntos extremos de los vectores $\bar{r}(t)$, determinan una curva cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por las funciones componentes de $\bar{\mathbf{r}}$, y nuevamente podemos pasar sin dificultad alguna de la *ecuación vectorial de **C*** a las *ecuaciones paramétricas de **C*** y viceversa.

Ejemplo:
$$\boldsymbol{C}: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases} \quad \text{ó ;} \qquad \mathbf{C}: \ \bar{r}(t) = (3-2t)\,\bar{\boldsymbol{i}} + (2+4t)\,\bar{\boldsymbol{j}} + (1-5t)\,\bar{\boldsymbol{k}}$$

* En el plano para decidir que curva era **C** esto pasamos de paramétricas a cartesiana.
¿ ***Podemos hacer los mismo en el espacio?: la respuesta a esta pregunta es, NO.***

6.3 La recta

La recta es un caso especial de curva. Luego para representar una recta acudimos a cualquier ecuación de las que disponemos para representar *curvas (cartesianas, paramétricas ó vectorial)*. Cual elegimos depende en cada caso de los datos que se tengan. Cabe señalar que, cualquiera sea la representación algebraica por la que optemos, los elementos geométricos que caracterizan una recta son dos: ***punto de paso*** y ***dirección.*** Al respecto:

  * existe una única forma de dar el punto de paso, ***sus coordenadas;***
  * existen distintas formas de dar la ***dirección*** de una recta.

Luego, el tipo de ecuación usado para representar una recta depende fundamentalmente de la forma en que este dada la dirección de la recta. También influye el espacio geométrico en el que se trabaje; o sea, hay que distinguir el trabajo en el plano del trabajo en el espacio propiamente dicho.
Estudiamos entonces por separado: ***recta en el plano*** y ***recta en el espacio.***

6.3.1 La recta en el plano

Vimos que los datos necesarios para hallar la ecuación de una recta ***r*** en el plano son:
  * *punto de paso: Po* $(x_o ; y_o)$
  * *dirección.*

La dirección la podemos dar a través de:
① la *inclinación* de la recta (pendiente ó ángulo de inclinación) → cartesiana / explícita.
② un vector paralelo a la dirección de la recta → vectorial, paramétricas.
③ un vector perpendicular a la dirección de la recta → cartesiana/ implícita ó general.

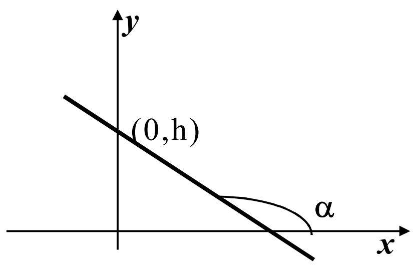
Estudiamos cada uno de los casos propuestos.

① ECUACIÓN EXPLÍCITA de *r*

DATOS: ***punto de paso***, *Po* (x_o , y_o) y ***pendiente*** de la recta, *m*.

Este caso ya lo estudiamos al ver función lineal. Efectivamente, en tal oportunidad concluimos que toda *recta no paralela al eje y* es gráfica de una función lineal; o sea, de una función con fórmula $\mathbf{y = m\,x + h}$; $\mathbf{m}$ = pendiente y $\mathbf{h}$ = ordenada al origen.

ECUACIÓN EXPLÍCITA de r : $\quad \mathbf{y = m\,x + h}$



- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_o}{x - x_o}$; pendiente (cualquiera sean las escalas)
- $m = \text{tg}\ \alpha$; pendiente (para escalas iguales en ambos ejes).
- $h = f(0)$; ordenada al origen.

En este caso vimos que una forma rápida de obtener la ecuación explícita es a través del planteo y cálculo de la que llamamos ***ecuación punto-pendiente:***

$$\left.\begin{array}{r} P_o\ (x_o , y_o) \in r \\ m\ (\text{pendiente}) \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad r\ )\quad \mathbf{y - y_o = m\ (x - x_o)}$$

Ejemplo 1: hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por (3 ; 4) con pendiente -2.

$$\left.\begin{array}{r} Po\,(3\,;4) \in r \\ m = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r)\quad y - 4 = -2\,(x - 3) \\ r)\quad \boldsymbol{y = -2\,x + 10} \end{array}$$

Ejemplo 2: hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por (3 ; 4) y (2 ; 8).

$$\left.\begin{array}{r} P1\,(3\,;4) \in r \\ P2\,(2\,;8) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{2-3} = -4$$

$$\left.\begin{array}{r} P1\,(3\,,4) \in r \\ m = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r)\quad y - 4 = -4\,(x - 3)$$

Ejemplo 3: hallar la ecuación explícita de la recta r que pasa por (0; 5) y es paralela a la recta r_1 de ecuación $y = 2\,x + 3$.

* ***incógnitas:*** m y h tal que $r : y = m\,x + h$.

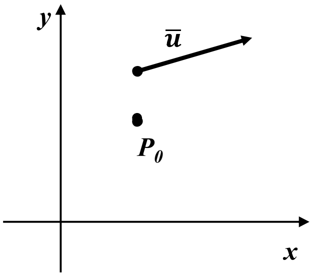
* ***datos:*** $r \,//\, r_1 \Rightarrow r \,//\, r_1$ tienen la misma pendiente $\Rightarrow$ $\boldsymbol{m} = 2.$

(0;5) $\in r \Rightarrow$ **h** $= 5.$

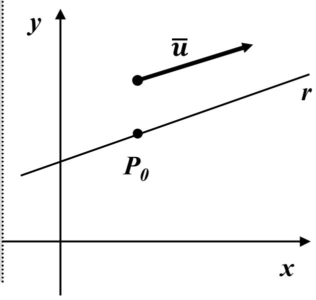
$\Rightarrow \boldsymbol{y = 2\,x + 5}$ es la ecuación explícita de la recta ***r***.

② ECUACIÓN VECTORIAL de *r*

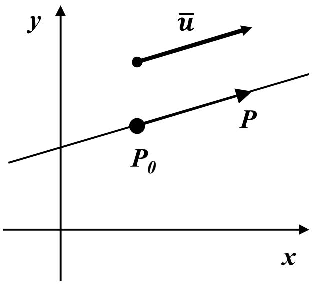
* ***Datos***: ***Po*** $(x_o\,, y_o) \in \boldsymbol{r}\,;\ \overline{\boldsymbol{u}}$ vector dirección tal que $\overline{\boldsymbol{u}} \,//\, \mathbf{r}$.



Existe una única recta que pasa por ***Po*** , y es paralela a $\overline{\boldsymbol{u}}$



Damos un punto genérico de la recta ***P***(x,y). Obtenemos el vector $\overline{P_oP}$



* ***Condición de pertenencia:***

$$\boldsymbol{P \in r \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_0P} \;//\; \overline{u}}\,.$$

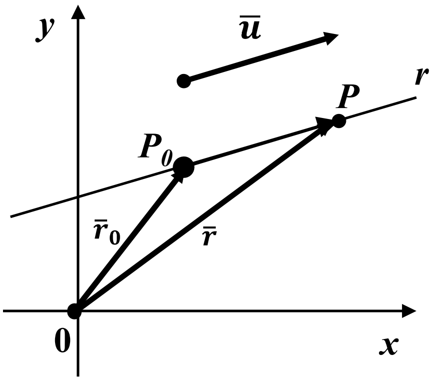
*Dada una recta, para expresar algebraicamente la condición que debe cumplir un punto para pertenecer a la misma; o equivalentemente, para obtener una **ecuación** que la exprese, basta con **traducir** la condición del lenguaje coloquial al lenguaje matemático.*

* **Traducción**:

1ro) Dado $P\,(x,y) \in r$, asignamos símbolos a los elementos que vamos a usar para ´traducir´:

$\overline{r_o} = \overline{OPo}$, *vector posición de* **Po**.

$\overline{r} = \overline{OP}$, *vector posición de* **P**.



y observamos que por la ley del triángulo para la suma de vectores, la relación entre estos vectores es:

$$\overline{r} = \overline{r_o} + \overline{P_oP} \quad (*)$$

2do) Traducimos ahora la *´condición de pertenencia´ :*

$$\overline{P_0P} // \overline{u} \quad \Leftrightarrow \exists\lambda \in \overline{P_0P} \,/\, \overline{P_0P} = \lambda\overline{u}$$

3ro) reemplazamos en (*): $\overline{r} = \overline{r_o} + \lambda \cdot \overline{u}$;

y obtenemos que para cada $\lambda \in R$; $\overline{r}$ *da el vector posición de un punto* **P** $\in$ **r**.

Luego: **P** $\in$ **r** $\Leftrightarrow$ *existe* λ *real tal que* $\overline{r} = \overline{r_o} + \lambda\overline{u}$.

4to) *Conclusión*: hemos obtenido una ecuación que establece la condición que debe *cumplir* un punto para pertenecer a la recta que pasa por P_o y es paralela $\overline{u}$; o sea, una ecuación que *representa la recta.*

Como está dada a través de vectores, esta es la ecuación vectorial de la recta; *para* $\overline{u} // r$

ECUACIÓN VECTORIAL de la recta: $\overline{r} = \overline{r_o} + \lambda\overline{u}$; $\lambda \in R$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS de r

* ***Datos***: punto de paso $Po\,(x_o , y_o)$ y $\overline{u} = (u_x ; u_y)$ vector paralelo a la dirección de la recta.

En el párrafo anterior obtuvimos la ecuación vectorial de la recta:

$$\overline{r} = \overline{r_o} + \lambda \cdot \overline{u}$$

» $\overline{r_o} = \overline{OPo}$, vector posición de $P_o\,(x_o; y_o)$.

» $\overline{r} = \overline{OP}$, vector posición de $P\,(x; y)$.

» $\overline{u} // \mathbf{r}$; $\overline{u} = (u_x ; u_y)$

» $\lambda \in R$

También vimos que conocida la ecuación vectorial de una curva era posible obtener, fácilmente y a partir de ella, las ecuaciones paramétricas de la misma; las determinadas por las *funciones componentes* de la función vectorial que la define.

* **Pasaje a paramétricas:**

Trabajamos la función vectorial $\overline{r}$ hasta hallar sus funciones componentes.

Para ello tenemos en cuenta que:

- las componentes de $\overline{r_o}$ coinciden con las coordenadas de $P_o \rightarrow \overline{r_o} = (x_o;y_o)$;

- las componentes de $\bar{r}$ coinciden con las coordenadas de **P** → $\bar{r}=(x;y)$; luego, reemplazando en la ecuación vectorial y operando, obtenemos:

$$\bar{r} = \overline{r_o} + \lambda \cdot \bar{u}$$

$$\bar{r} = (x_o , y_o) + \lambda \ (u_x , u_y)$$

$$\bar{r} = (x_o , y_o) + (\lambda\ u_x ,\ \lambda\ u_y) \qquad \text{(producto de nro. por vector);}$$

$$\bar{r} = (x_o + \lambda\ u_x\ ;\ y_o + \lambda\ u_y) \qquad \text{(por suma de vectores);}$$

finalmente, como dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes también lo son, tenemos el siguiente par de ecuaciones escalares:

$$x = x_o + \lambda\ u_x\ ;\quad y = y_o + \lambda\ u_y$$

y obtenemos un par de funciones continuas de λ ; o sea, las ecuaciones paramétricas de la recta.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS de *r* : $\begin{cases} x = x_o + \lambda\ u_x \\ y = y_o + \lambda\ u_y \end{cases}$

» $P_o\ (x_o,y_o) \in$ **r**
» $\bar{u} = (u_x;u_y)$ // **r**
» $\lambda \in$ ***R***, *parámetro*

Cada valor del parámetro λ da un punto (x; y) de la recta que pasa por (x_o;y_o) y es paralela a $\bar{u}$.

Ejemplo 4: hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por *P(3;4)* y *Q(2; 8).*

$$\begin{cases} P(3;4) \in r \\ Q(2;8) \in r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(3;4) \in r \\ \bar{u} = \overline{PQ} = (-1;4)\ //\ r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \lambda\ .(-1) \\ y = 4 + \lambda\ .4 \end{cases} \Rightarrow r_1\!: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 + 4\lambda \ ;\ \lambda \in R \end{cases}$$

Ejemplo 5:

a) hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por *P*(3;4) y *R*(4; 0).
b) dar otros dos puntos de la recta.
c) analizar si el punto *S* (1; 12) pertenece a la recta determinada por *P* y *R*.
d) analizar si el punto *T* (4; -8) pertenece a la recta determinada por *P* y *R*.

a) ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} P(3,4) \in r \\ R(4,0) \in r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(3,4) \in r \\ \bar{u} = \overline{PR} = (1;-4)\ //\ r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \lambda\ .(1) \\ y = 4 + \lambda\ .(-4) \end{cases} \Rightarrow r_2\!: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$$

b) para obtener un punto de la recta basta con dar un valor al parámetro λ .

$$\lambda = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5 = 8 \\ y = 4 - 4.5 = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow A(8;-16) \in r_2$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + (-1) = 2 \\ y = 4 - 4.(-1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -16 \end{cases} \Rightarrow Q(2;8) \in r_2$$

c) $S\,(1\,;\,12) \in \boldsymbol{r}_2$ si y sólo si existe **único** $\lambda \in \mathbf{R}$, tal que:

$$\begin{cases} \mathit{1} = 3 + \lambda \\ \mathit{12} = 4 - 4\,\lambda \end{cases} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{cases} \lambda = \mathit{1} - 3 = \mathbf{-2} \\ \lambda = (\mathit{12}-4)/(-4) = \mathbf{-2} \end{cases}$$

Tomando $\lambda = \mathbf{-2}$ obtenemos *S*. Luego, $S\,(5;\,-4) \in \boldsymbol{r}_2$.

d) $T(4;\,-8) \in \boldsymbol{r}_2$ si y sólo si existe ***único*** λ tal que:

$$\begin{cases} \mathit{4} = 3 + \lambda \\ \mathit{-8} = 4 - 4\,\lambda \end{cases} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{cases} \lambda = \mathit{4} - 3 = \mathbf{1} \\ \lambda = (-\mathit{8}-4)/(-4) = \mathbf{3} \end{cases}$$

No existe un único λ que verifique ***simultáneamente*** las dos ecuaciones paramétricas.
Luego, $T\,(4;\,-8) \notin r_2$.

Observaciones:

a) Las rectas obtenidas en los ejemplos, r_1 y r_2, ***pasan ambas por el punto*** $P(3;\,4)$; luego, hay dos opciones: **P** es el punto de intersección de r_1 y r_2 ó r_1 y r_2 ´coinciden´.
Como **Q** (2; 8) pertenece tanto a $\mathbf{r}_2$ como $\mathbf{r}_1$ y una recta queda determinada por ***dos puntos,*** tenemos entonces que $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_1$ son, **la misma recta** (aún cuando sean distintas las ecuaciones paramétricas que las representan).
O sea; *las ecuaciones paramétricas de una recta no son únicas.*
Si cambiamos el punto o el vector con el que las escribimos obtenemos pares de ecuaciones todos distintos entre sí, pero *equivalentes*.

b) Si la representación paramétrica no es única, dadas dos rectas r_2 y r_1 por sus ecuaciones paramétricas, ¿cómo sabemos si se trata de la misma recta o de dos rectas distintas?. Existen distintas manera de resolver este problema.

Sean r_1 y r_2 dos rectas dadas por sus ecuaciones paramétricas.

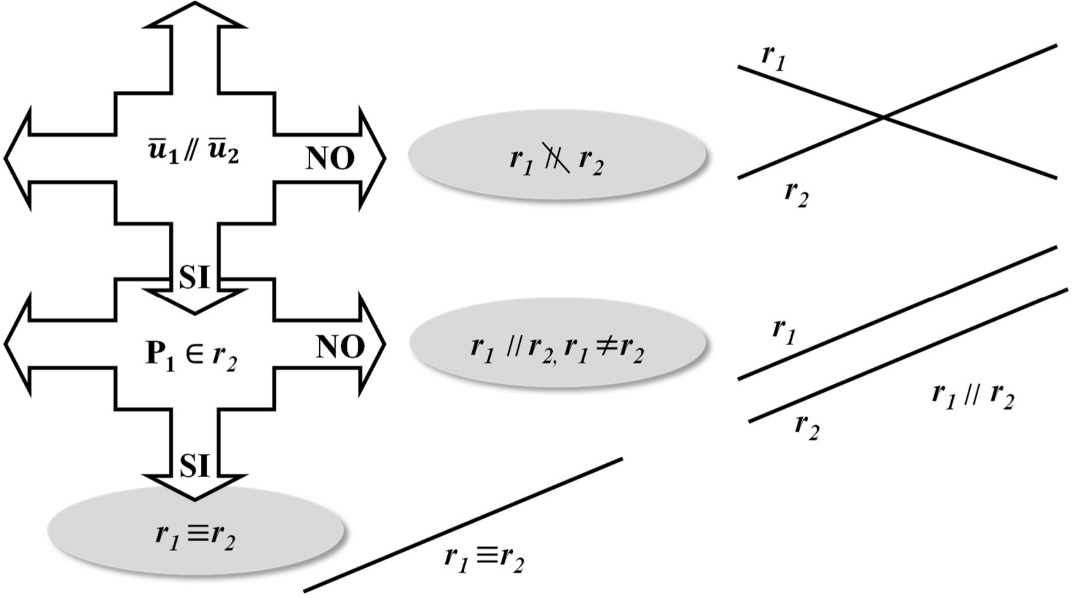
$$r_1 : \begin{cases} \mathbf{x} = x_1 + \lambda\, a_1 \\ \mathbf{y} = y_1 + \lambda\, b_1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} \mathbf{x} = x_2 + \lambda\, a_2 \\ \mathbf{y} = y_2 + \lambda\, b_2 \end{cases}$$

» $P_1\,(x_1;y_1) \in \mathbf{r}_1$
» $\overline{\mathbf{u}}_1 = (a_1;b_1) \,//\, \mathbf{r}_1$

» $P_2\,(x_2;y_2) \in \mathbf{r}_2$
» $\overline{\mathbf{u}}_2 = (a_2;b_2) \,//\, \mathbf{r}_2$

Para decidir si r_1 y r_2 son la misma recta podemos hacerlo geométrica ó analíticamente:

****geométricamente***: condición necesaria (pero no suficiente) para que dos rectas coincidan es que los vectores de dirección sean paralelos. Luego, partimos de allí:



* ***analíticamente:*** si bien distintos vectores pueden dar la dirección de una misma recta, no sucede lo mismo con la pendiente de la recta ya que la inclinación es _única_.
Consecuentemente, _la ecuación explícita de la recta es única_ y tenemos así un instrumento para decidir si dos rectas dadas en paramétricas son iguales: pasar ambas a la forma explícita, comparar las ecuaciones obtenidas.
Las rectas serán iguales o distintas según sus ecuaciones explícitas sean iguales o distintas.

Ejemplo 6: dadas r_1 y r_2 por sus ecuaciones paramétricas analizar si las mismas son paralelas, coincidentes o secantes *(distintas)*.

$$r_1:\begin{cases}x = 1 + 2\lambda\\ y = -2 + 4\lambda\end{cases} \qquad r_2:\begin{cases}x = 2 + \lambda\\ y = 2\lambda\end{cases}$$

$\bar{u}_1 = 2\bar{u}_2$
$\mathbf{P}_1(1;-2) \in r_2 \ (\lambda = -1)$

$\Updownarrow$

* ***geométricamente***:

- » $P_1(1;-2) \in \mathbf{r}_1$
- » $\bar{u}_1 = (2;4) \,//\, \mathbf{r}_1$
- » $P_2\ (2;0) \in \mathbf{r}_2$
- » $\bar{u}_2 = (1;2) \,//\, \mathbf{r}_2$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\bar{u}_1 \,//\, \bar{u}_2\\ \mathbf{P}_1(1;-2) \in r_2\end{matrix}} \Longrightarrow r_1 \equiv r_2$$

* ***analíticamente***: pasamos de paramétricas a explícita.

$$r_1:\begin{cases}x = 1 + 2\lambda\\ y = -2 + 4\lambda\end{cases} \longrightarrow r_1:\begin{cases}x - 1 = 2\lambda\\ y = -2 + 4\lambda\end{cases} \longrightarrow r_1:\begin{cases}(x-1)/2 = \lambda\\ y = -2 + 4\lambda\end{cases}$$

Luego; reemplazando el λ de la segunda ecuación por el valor despejado en la primera:

$$r_1:\begin{cases}(x-1)/2 = \lambda\\ y = -2 + 4\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\end{cases} \longrightarrow r_1:\begin{cases}(x-1)/2 = \lambda\\ \mathbf{y = 2x - 4}\end{cases} \longrightarrow \boxed{\mathbf{y = 2x - 4}}$$

Ecuac. explícita de r_1

Trabajando en forma semejante para r_2 obtenemos la ecuación explícita de r_2: $y = 2x - 4$ la cual, como era de esperarse (ya vimos que son coincidentes) da igual a la de r_1.

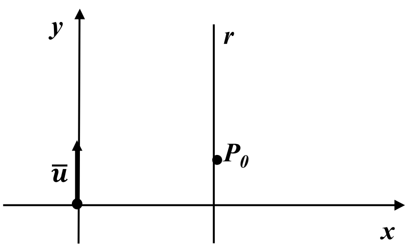
Observaciones:

- Si ninguna de las componentes (u_x ; u_y) de $\overline{u}//r$ es cero, tenemos otra forma de describir ***r***. En este caso podemos eliminar el parámetro λ en ambas ecuaciones a través de ´despejar´ λ, en cada ecuación e igualar los resultados. Así obtenemos la siguiente ecuación:

$$\boxed{u_x \neq 0 \ y \ u_y \neq 0} \longrightarrow \frac{x - x_o}{u_x} = \frac{y - y_o}{u_y}$$

Ecuaciones Simétricas de *r*

- Si alguna de las componentes de $\overline{u}$ es cero (por ejemplo, $u_x = 0$), esto indica que el vector dirección es paralelo a uno de los ejes coordenados (en el ejemplo, el eje y).



$$r: \begin{cases} x = x_o \\ y = y_o + \lambda \ u_y \end{cases}$$

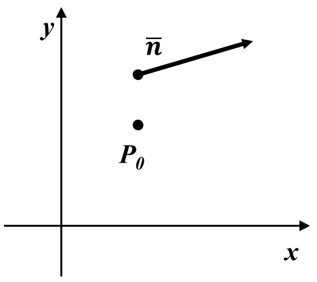
Luego, la recta es paralela a uno de los ejes, en el ejemplo ***r*** // eje y.

- Vemos entonces que existen formas de representar una recta con las que podemos escribir todas las rectas del plano, mientras que existen otras que presentan excepciones:

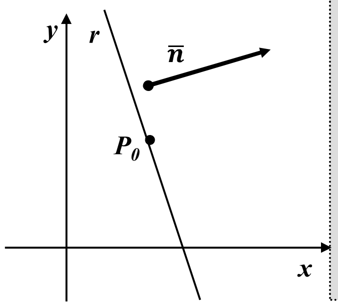
» con las ***ecuaciones paramétricas*** podemos escribir ***todas las rectas del plano***.
» con la ***ecuación explícita,*** escribimos todas las rectas del plano, ***excepto las paralelas al eje y***.
» con las ***ecuaciones simétricas,*** escribimos todas las rectas del plano, ***excepto las paralelas al eje x*** y ***las paralelas al eje y***.

③ **Ecuación General de *r*** (ó forma implícita de la ecuación de ***r***)

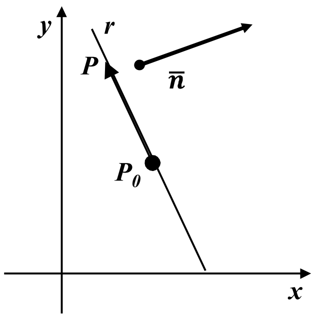
Datos: punto de paso ***Po***(x_o , y_o) *y* $\overline{n}$ vector normal *(⊥)* a la dirección de la recta.



*Existe una única recta que pasa por **Po** , y es* $\perp \overline{n}$



*Damos un punto genérico de la recta **P(x,y)**. Obtenemos el vector* $\overline{P_0P}$



Condición de pertenencia:

Del gráfico concluimos que: $P \in r \Leftrightarrow \overline{P_0P}$ resulta perpendicular a $\overline{n}$.

Traduciendo: $P \in r \Leftrightarrow \overline{P_0P} \perp \overline{n} \quad \Leftrightarrow \overline{P_0P} \, . \, \overline{n} = 0$

Luego, si conocemos las componentes del vector normal, $\overline{n} = (a;b)$, tenemos que:

$$P \in r \Leftrightarrow \overline{P_0P} \, . \, \overline{n} = 0$$

$P \in r \Leftrightarrow (x-x_o;y-y_o).(a;b)=0$ (resolvemos el producto escalar)
$P \in r \Leftrightarrow a.(x - x_o) + b.(y - y_o)=0$ (agrupamos los términos con sólo datos)
$P \in r \Leftrightarrow a.x + b.y + (-ax_o - by_o)=0$ (hacemos, $-a.x_o-by_o = c$)
$P \in r \Leftrightarrow \mathbf{a.x + b.y + c = 0}$

y tenemos la ecuación general (ó implícita) de la recta.

ECUACIÓN GENERAL de *r* : $a.x + b.y + c = 0$
(implícita)

» $\bar{n} = (a ; b) \perp r$

Ejemplo 6: hallar la ecuación de la recta normal a $\bar{n} = (8;2)$ y que pasa por P (3,4).

- Acorde a los datos del problema la ecuación que buscamos es la ecuación general de la recta; o sea, la ecuación de la forma, $a\,x + b\,y + c = 0$. Las incógnitas son: ***a* , *b*** y ***c***.

  $\bar{n} = (8;2) \perp r \quad \Rightarrow \quad a = 8;\ b = 2 \quad \Rightarrow \quad r)\ \ 8x + 2y + c = 0 \quad ¿c? \longrightarrow$

- para obtener el término independiente ´c´ , tenemos en cuenta que un punto pertenece a una recta si y sólo sí sus coordenadas (x, y) verifican la ecuación de la recta. Luego:

  $P(3,4) \in r \quad \Rightarrow \quad 8 . 3 + 2 .4 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -32$

- Finalmente entonces, hallado todos los coeficientes, podemos dar la respuesta:

$$r)\ \ 8x + 2y - 32 = 0$$

Ejemplo 7: hallar la ecuación general de la recta paralela a $\bar{u} = (1;-4)$ que pasa por P(3,4)

- En este caso el vector dirección que se tiene como dato no es el conveniente para escribir la ecuación que pide el problema. Se tienen entonces dos opciones:
  - hallar las ecuaciones que usan el vector dirección paralelo a la recta, o sea las paramétricas, y luego pasar de paramétricas a general.
  - hallar un vector $\bar{n} \perp r$ y escribir directamente la ecuación general.

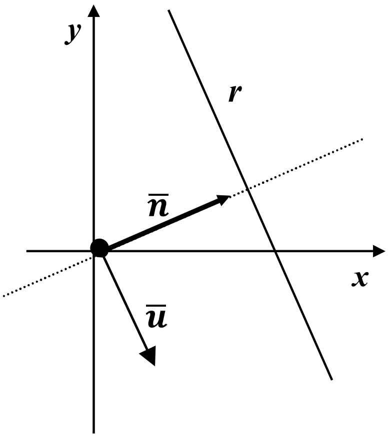
- *De paramétricas a general*:

$P(3,4) \in r$
$\bar{u} = (1;-4) \parallel r$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 3 = \lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$$

Reemplazamos λ de la segunda ecuación por el valor despejado en la primera y obtenemos la *ecuación explícita* de la recta: $y = -4x + 16$.
Luego, pasamos de la explícita a la general: $-4x - y + 16 = 0$

- *Directamente damos la general, buscando* $\overline{n} \perp r$:



» Evidentemente para hallar $\overline{n} \perp r$ basta hallar $\overline{n} \perp \overline{u}$

$$\overline{n} \perp \overline{u} \Leftrightarrow \overline{n} \,.\, \overline{u} = 0$$

$$\overline{n} = (a\,;\,b) \perp \overline{u} = (1;\,-4) \Leftrightarrow (a\,;\,b)\,.\,(1;\,-4) = 0$$

$$\overline{n} = (a\,;\,b) \perp \overline{u} = (1;\,-4) \Leftrightarrow \mathbf{a - 4\,b = 0}$$

» Para obtener $\overline{n}$ debemos resolver una ecuación con dos incógnitas: $a - 4\,b = 0$; la cual, como era de esperar, tiene infinitas soluciones, ya que existen infinitos vectores perpendiculares a uno dado.

» Para hallar una solución, damos un valor a una de las incógnitas y calculamos la otra.

Así para $a = 1$ tenemos $1 - 4b = 0$; $b = 1/4$; y $\overline{n} = (\,1\,;\,1/4\,)$

Finalmente (como en el ej.6)
obtenemos la ecuación general de la recta: $x + 1/4 .\, y - 4 = 0$

Observaciones:

a) Respecto a la búsqueda de un vector perpendicular a otro en el plano, tenemos que si el dato es $\overline{u} = (u_x\,;\,u_y)$ y la incógnita $\overline{n} = (a;b)$, entonces :

$$\overline{n} \perp \overline{u} \Leftrightarrow (a;b)\,.\,(u_x\,;\,u_y) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a.\,u_x + b.\,u_y = 0} \quad (\rightarrow\ ¿a?;\ ¿b?)$$

y que, una forma rápida de hallar $\overline{n}$ (entre los infinitos que cumplen la condición) resulta de hacer: $a = u_y$ y $b = -u_x$ (ó, $a = -u_y$ y $b = u_x$); o sea, invertir el orden de las componentes de $\overline{u}$ y cambiar el signo a una de ellas. Esta es una regla mnemotécnica que conviene recordar para agilizar el hallazgo de vectores perpendiculares a uno dado.
Así $\overline{u} = (1;\,-4) \rightarrow \overline{n} = (4\,;\,1)$ y la ecuación general es: $\mathbf{4\,x + y - 16 = 0.}$

b) Dijimos que existen infinitos vectores perpendiculares a uno dado. En consecuencia existen infinitas formas de dar la ecuación de la recta pedida :

$\overline{n} = (-4;\,-1) \rightarrow r:\ \mathbf{-4x - y + 16 = 0}$
$\overline{n} = (1;\,1/4) \rightarrow r:\ \mathbf{x + 1/4\,y - 4 = 0}$
$\overline{n} = (4;\,1) \rightarrow r:\ \mathbf{4x + y - 16 = 0}$

P(3 ; 4) y Q (4; 0)
verifican todas estas ecuaciones; luego, todas ellas definen la misma recta ya que, dos puntos determinan una única recta

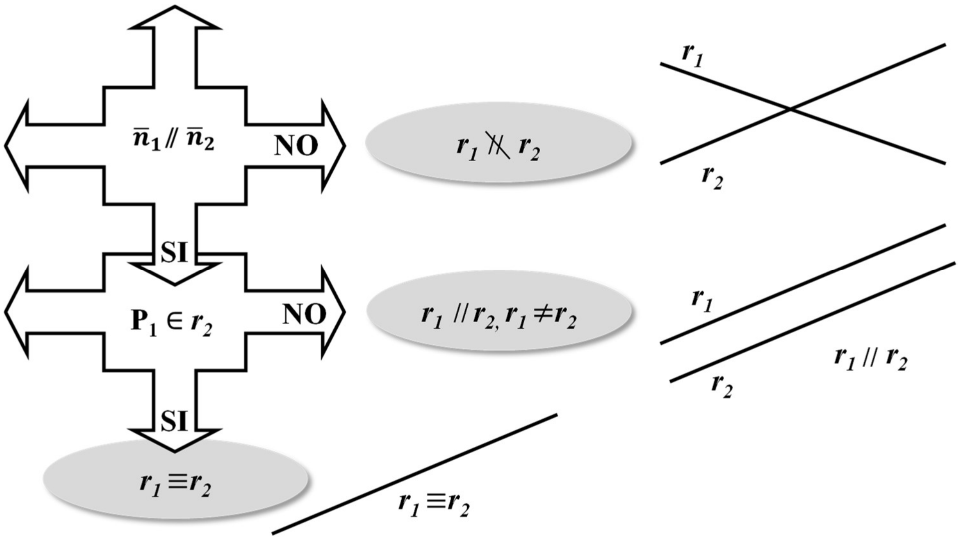
Conclusión: *la ecuación general de una recta **no es única**.*

- **Relación entre dos rectas dadas en forma implícita**

Sean r_1 y r_2 dos rectas dadas por sus ecuaciones generales.

$r_1 :\ a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$; $\overline{n}_1 = (a_1\,;\,b_1) \perp r_1$
$r_2 :\ a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$; $\overline{n}_2 = (a_2\,;\,b_2) \perp r_2$

- condición necesaria pero no suficiente para que dos rectas coincidan es que los vectores de dirección sean paralelos. Luego, partimos de allí:



<u>Conclusiones</u>: $r_1 // r_2$ ó $\boldsymbol{r_1 \equiv r_2} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{n}}_1=(a_1;b_1)\ //\ \bar{\mathbf{n}}_2=(a_2;\ b_2) \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in R\ /\ \bar{\mathbf{n}}_2 = \alpha.\bar{\mathbf{n}}_1$

$\Leftrightarrow (a_2;\ b_2) = \alpha.(a_1;b_1) \Leftrightarrow a_2 = \alpha.a_1\ ;\ b_2 = \alpha.b_1$

Dado $P_1 \in \boldsymbol{r_1}$, analizamos si $P_1 \in \boldsymbol{r_2}$.

- $\boldsymbol{P_1 (x_1 ; y_1)} \in r_1 \Leftrightarrow a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c_1} = -(a_1 x_1 + b_1 y_1)$
- $\boldsymbol{P_1 (x_1 ; y_1)} \in r_2 \Leftrightarrow a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha.a_1)\, x_1 + (\alpha.b_1)\, y_1 + c_2 = 0.$

$\Leftrightarrow \alpha\ (a_1 x_1 + b_1 y_1) + c_2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c_2} = -\alpha\ (a_1 x_1 + b_1 y_1) \Leftrightarrow \boldsymbol{c_2} = \alpha\, \boldsymbol{c_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{c_2/c_1 = \alpha\ (c_1 \neq 0)}$

<u>RESUMEN</u>: $r_1 \equiv r_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1}$

$r_1 // r_2$ y $r_1 \neq r_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} \neq \dfrac{c_2}{c_1}$

$r_1 \nparallel r_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1}$

- **<u>Relación entre dos rectas dadas en forma explícita</u>**

Sean $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$ dos rectas dadas por sus ecuaciones explícitas:

$\boldsymbol{r_1}:\ y = m_1 x + h_1\ ;\ \bar{\boldsymbol{n}}_1 = (a_1\ ;\ b_1) \perp \mathbf{r_1}$

$\boldsymbol{r_2}:\ y = m_2 x + h_2\ ;\ \bar{\boldsymbol{n}}_2 = (a_2\ ;\ b_2) \perp \mathbf{r_2}$

En este caso las pasamos a general y resolvemos:

$\boldsymbol{r_1}:\ m_1 x - y + h_1 = 0\ ;\ \bar{\boldsymbol{n}}_1 = (m_1\ ;\ -1) \perp \boldsymbol{r_1}$

$\boldsymbol{r_2}:\ m_2 x - y + h_2 = 0\ ;\ \bar{\boldsymbol{n}}_2 = (m_2\ ;\ -1) \perp \boldsymbol{r_2}$

<u>RESUMEN</u>: $r_1 \equiv r_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{h_2}{h_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{m_1 = m_2}$ **y** $\boldsymbol{h_1 = h_2}$

$r_1 // r_2$ y $r_1 \neq r_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{-1}{-1} \neq \dfrac{h_2}{h_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{m_1 = m_2}$ **y** $\boldsymbol{h_1 \neq h_2}$

$r_1 \nparallel r_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_2}{m_1} \neq \dfrac{-1}{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{m_1 \neq m_2}$

Intersección de rectas

Dadas dos rectas r_1 y r_2, las mismas pueden ser paralelas, coincidentes o secantes.
Para decidir esto tenemos que resolver un sistema de ecuaciones.
La forma de resolverlo dependerá de las ecuaciones de las rectas que se tengan.

➢ Sean $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$ dos rectas dadas por sus ecuaciones generales:

$$\boldsymbol{r_1}: \; a_1 x + b_1 y + c_1 = 0;$$
$$\boldsymbol{r_2}: \; a_2 x + b_2 y + c_2 = 0;$$

$$\boldsymbol{P_1 (x\,;y)} \in \boldsymbol{r_1 \cap r_2} \Leftrightarrow \text{ satisface el sistema S:} \begin{cases} \boldsymbol{a_1 x + b_1 y = - c_1} \\ \boldsymbol{a_2 x + b_2 y = - c_2} \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

- $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{c_2}{c_1} \Rightarrow r_1 \equiv r_2 \Rightarrow$ S tiene infinitas soluciones: $S = r_1$
- $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} \neq \dfrac{c_2}{c_1} \Rightarrow r_1 // r_2$ y $r_1 \neq r_2 \Rightarrow$ S no tiene solución: $S = \varnothing$
- $\dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1} \Rightarrow r_1 \nparallel r_2 \Rightarrow$ S tiene solución única: $S = \{ P(x^* ,y^*)\}$

y en este caso el punto P(x* ,y*) resulta de resolver el sistema por alguno de los métodos conocidos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

- sustitución
- sumas y restas (ó método de Gauss)
- regla de Cramer

➢ Sean $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$ dadas $\boldsymbol{r_1}$ por sus ecuaciones paramétricas y $\boldsymbol{r_2}$ por su ecuación general

$$\boldsymbol{r_1}: \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \end{cases} ; \quad \mathbf{r_2}: \; a\,x + b\,y + c = 0 \;; \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{P_0}(x_0\,,\, y_0) \in \mathbf{r_1} \\ \bar{u} = (u_1;u_2) \,//\, \mathbf{r_1} \\ \bar{n} = (a;\, b) \perp \mathbf{r_2} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P_1 (x\,;y)} \in \boldsymbol{r_1 \cap r_2} \Leftrightarrow \text{ satisface el sistema S:} \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \\ a\,x + b\,y + c = 0 \end{cases}$$

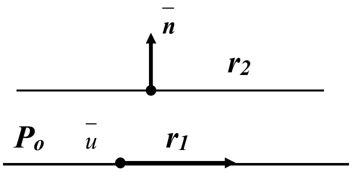
$$\text{S:} \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \\ a\,x + b\,y + c = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \\ a\,(x_0 + \lambda\, u_1) + b\,(y_0 + \lambda\, u_2\,) + c = 0 \end{cases}$$

$$\approx \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \\ ax_0 + by_0 + c + \lambda\,(a\,u_1 + b\,u_2) = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} x = x_0 + \lambda\, u_1 \\ y = y_0 + \lambda\, u_2 \\ ax_0 + by_0 + c = - \lambda\,(a\,u_1 + b\,u_2) \end{cases}$$

Luego; si llamamos $\mathbf{A} = a\,x_0 + b\,y_0 + c$ y $\mathbf{B} = - (a\,u_1 + b\,u_2) = - (\bar{\boldsymbol{n}} \,.\, \bar{u})$; la solución del sistema depende de la solución de la ecuación en λ: $\mathbf{A} = \lambda.\mathbf{B}$

(I) $\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \bar{n}\cdot\bar{u} \neq 0 \Rightarrow \bar{n}$ **y** $\bar{u}$ no son $\perp$ $\Rightarrow r_1$ y r_2 no son paralelas $\Rightarrow r_1$ y r_2 se cortan en un único punto $\Rightarrow$ **S**= { P(x* ,y*)} (λ^***= A/B)**

(II) $\mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \bar{n}\cdot\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{u}$.



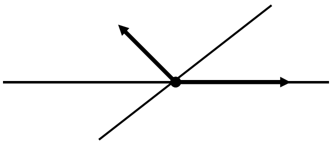
El resultado, en este caso depende de **A,** pues en este caso, queda: **A = λ.0**

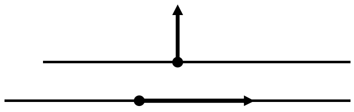
(II-a) **A** $\neq$ **0** $\Rightarrow ax_0 + by_0 + c \neq 0 \Rightarrow$ **P0**$(x_o, y_o) \notin r_2 \Rightarrow r_1 \parallel r_2 \Rightarrow$ **S** = ∅ (∄λ)

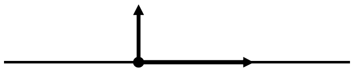
(II-b) **A = 0** $\Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow$ **P0**$(x_o, y_o) \in r_2 \Rightarrow r_1 \equiv r_2 \Rightarrow$ **S =** r_1 (∀λ)

Resumiendo: al resolver **A = λ. B** se pueden dar tres situaciones:

(I) **B** $\neq$ **0** $\Rightarrow \lambda^* =$ **A / B** $\Rightarrow$ **S** = { P(x* ,y*) / $x^* = x_0 + \lambda^* u_1$; $y^* = y_0 + \lambda^* u_2$ }
(II-a) **B = 0** ; **A** $\neq$ **0** $\Rightarrow$ **A = λ.0** (∄λ → incompatible) $\Rightarrow$ **S** = ∅
(II-b) **B = 0** ; **A = 0** $\Rightarrow$ **A = λ.0** (válida ∀ λ→ infinitas soluciones) $\Rightarrow$ **S =** r_1

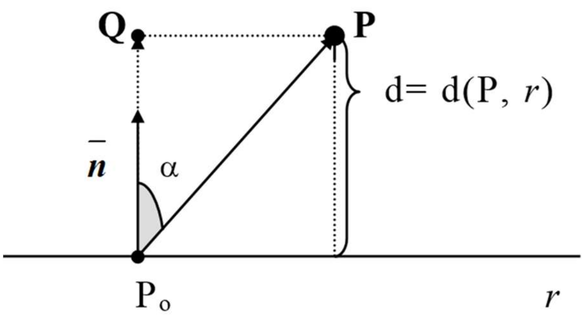






B $\neq$ **0** SISTEMA COMPATIBLE (a SOLUCIÓN ÚNICA)	**B =0 , A** $\neq$ **0** SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución)	**B =0 , A=0** SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (∞ soluciones)

- **Distancia de un punto a una recta**



Dados P (x_1, y_1), punto del plano y, r) ax + by + c= 0 , recta del mismo plano, determinamos una fórmula para hallar la distancia de P a r ; d = d (P, r). Sea $P_o (x_o, y_o)$ un punto cualquiera de la recta y $\overline{P_oP}$ el vector que determina con P.

En la figura vemos que d es igual a la medida del segmento $\overline{P_oQ}$; o sea, al valor absoluto de la proyección de $\overline{P_oP}$ sobre el vector normal a la recta, $\bar{n}$= (a,b). O sea:

$$d(P, r) = \left|\operatorname{proy}_{\bar{n}} \overline{P_oP}\right| = \left|\,\left|\overline{P_oP}\right| \cdot \cos\alpha\,\right| = \left|\,\left|\overline{n_o}\right| \cdot \left|\overline{P_oP}\right| \cos\alpha\,\right| = \left|\,\overline{n_o} \cdot \overline{P_oP}\,\right|$$

Teniendo en cuenta que $\overline{n_o} = \dfrac{\bar{n}}{\left|\bar{n}\right|}$; tenemos que: $d(P, r) = \dfrac{\left|\bar{n} \cdot \overline{P_oP}\right|}{\left|\bar{n}\right|}$

Realizando el producto escalar , $d(P, r) = \dfrac{\left| \bar{n} \cdot \overline{P_0 P} \right|}{\left|\bar{n}\right|} = \dfrac{\left|(a,b)\cdot(x_1 - x_o , y_1 - y_o)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

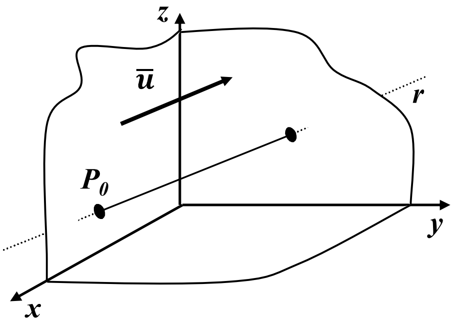
$$= \frac{\left|a\cdot(x_1 - x_o) + b\cdot(y_1 - y_o)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left|a\cdot x_1 + b\cdot y_1 - (a\cdot x_o + b\cdot y_o)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Puesto que P_o (x_o , y_o) pertenece a la recta, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta, así $a.\ x_o + b.\ y_o + c = 0$; o sea, $c = -(a.\ x_o + b.\ y_o)$. Luego:

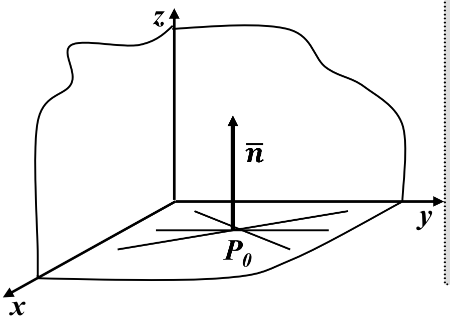
$$\mathbf{d(P,}\ \boldsymbol{r}\mathbf{)} = \frac{\left|a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6.3.2 La Recta en el espacio

Como en el plano, los datos necesarios para hallar la ecuación de una recta r en el espacio son: _punto de paso_ Po (x_o , y_o, z_o) y _dirección_; pero, a diferencia de la recta en el plano, en este caso existe sólo una manera de dar la dirección a través de un vector, _a través de un vector paralelo a la recta_.



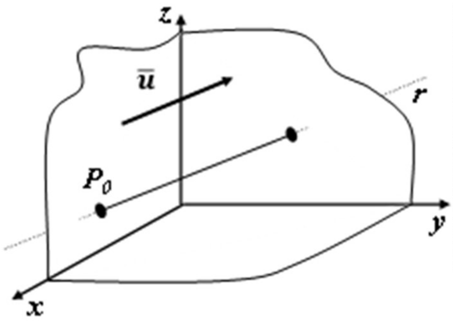
Dado $\bar{u}$ existe única recta *r,* tal que $P_o \in r$ y $\bar{u}$ // *r*



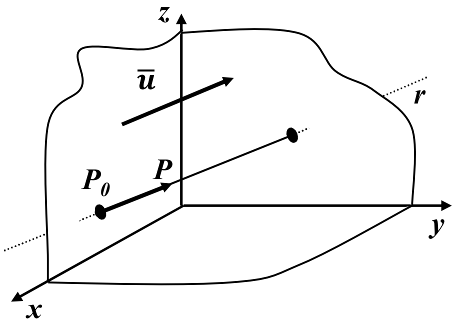
Dado $\bar{n}$ existen infinitas rectas *r,* tal que $P_o \in r$ y $\bar{n} \perp r$

ECUACIÓN VECTORIAL de *r*, en el espacio.

Datos: ***Po*** *(x_o , y_o, z_o)* $\in$ ***r***; $\bar{u}$ vector dirección tal que $\bar{u}$// **r** .



Existe una única recta que pasa por **Po** , y es paralela a $\bar{u}$



Damos un punto genérico de la recta **P**(x,y). Obtenemos el vector $\overline{P_0 P}$

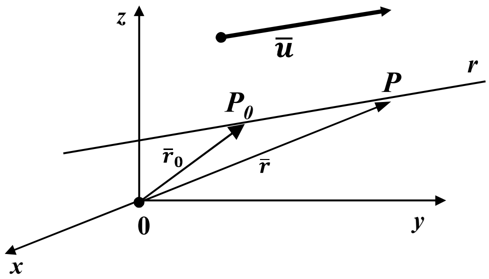
- Condición de pertenencia:

  Del gráfico: **P *(x,y,z)*** $\in$ **r** $\Leftrightarrow$ $\overline{P_0 P}$ *y* $\bar{u}$ tienen la misma dirección.
- Trabajando igual que en el plano, obtenemos la:

ECUACIÓN VECTORIAL de la recta: $\bar{r} = \overline{r_o} + \lambda \cdot \bar{u}$; $\lambda \in R$

- con:

$\overline{r_0} = \overline{OP_0}$, vector posición de P_o.
$\bar{r} = \overline{OP}$, vector posición de $P(x, y, z)$.
$\bar{u}$ // $\overline{P_0P}$.



ECUACIONES PARAMÉTRICAS de *r* , en el espacio.

Datos: punto de paso ***Po*** (x_o, y_o, z_o) y $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ vector paralelo a la recta.

De la ecuación vectorial de la recta: $\bar{r} = \overline{r_o} + \lambda \cdot \bar{u}$; pasamos a las ecuaciones paramétricas a través de buscar las funciones componentes de $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \overline{r_o} + \lambda \cdot \bar{u}$$

$$(x,y,z) = (x_o + \lambda\ u_x)\ \bar{i} + (y_o + \lambda\ u_y)\ \bar{j} + (z_o + \lambda\ u_z)\ \bar{k}$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS de ***r*** **:**
$$\begin{cases} x = x_o + \lambda\ u_x \\ y = y_o + \lambda\ u_y \ ; \\ z = z_o + \lambda\ u_z \ ; \quad \lambda \in R \end{cases}$$

» $P_o\ (x_o, y_o, z_o) \in$ **r**
» $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ // **r**
» $\lambda \in R$, *parámetro*

Cada valor del parámetro λ da un punto (x,y,z) de la recta que pasa por (x_o, y_o, z_o) y es paralela a $\bar{u}$ de componentes (u_x, u_y, u_z) .

Ejemplo: hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por *P(2,4,1)* y *Q(3,8,3)*.

$$\begin{cases} P\ (2,4,1) \in r \\ Q\ (3,8,3) \in r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\ (2,4,1) \in r \\ \bar{u} = \overline{PQ} = (1;4;2)\ //\ r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 + 4.\ \lambda \\ z = 1 + 2.\ \lambda \end{cases}$$

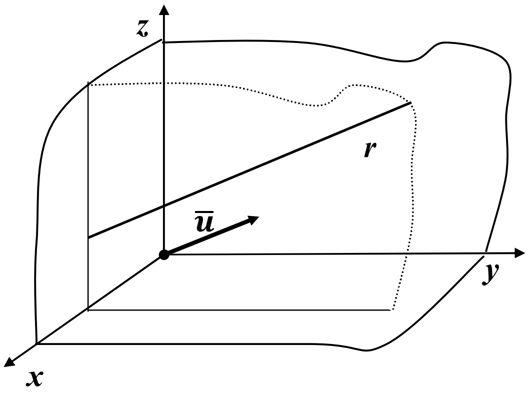
ECUACIONES SIMÉTRICAS DE *r*

- Otra forma de describir una recta ***r*** es eliminando el parámetro λ en todas las ecuaciones paramétricas. Si ninguna de las componentes (u_x, u_y, u_z) del vector $\bar{u}$ // **r** es cero podemos resolver cada una de las ecuaciones para λ , igualar los resultados y obtener:

$$\frac{x - x_o}{u_x} = \frac{y - y_o}{u_y} = \frac{z - z_o}{u_z} \ ;$$

Ecuaciones que llamamos: ***ecuaciones simétricas de*** **r**

- Si alguna de las componentes de $\overline{u}$ es cero (por ejemplo, $u_x = 0$), esto indica que el vector dirección es paralelo a uno de los planos coordenados (en el ejemplo, al plano yz).



$$\boldsymbol{r}:\begin{cases} x = \ x_o \\ y = y_o + \ \lambda \ \ u_y \\ z \ = z_o + \lambda \ \ u_z \end{cases}$$

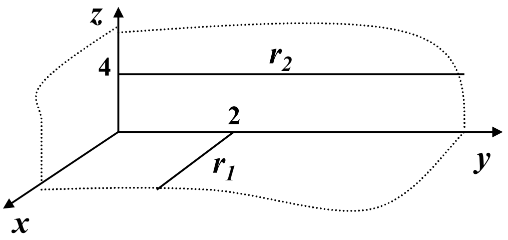
Luego, la recta es paralela a uno de los planos coordenados, en el ejemplo $\boldsymbol{r}$ // plano $\boldsymbol{yz}$.

- **Rectas ´oblicuas´ o ´alabeadas´**

Al igual que en el plano, a través de la comparación de los vectores dirección de cada recta, podremos decidir si dos rectas dadas en forma paramétrica son paralelas, coincidentes, perpendiculares o, en el caso de rectas en el espacio, oblicuas o alabeadas.
Decimos que dos rectas son oblicuas o alabeadas, cuando no siendo paralelas (ni coincidentes) tampoco se intersecan; o sea, no están en un mismo plano.

Por ejemplo; si:

$r_{1)}$ $x = t$; $y = 2$; $z = 0$
$r_{2)}$ $x = 0$; $y = 3s$; $z = 4$



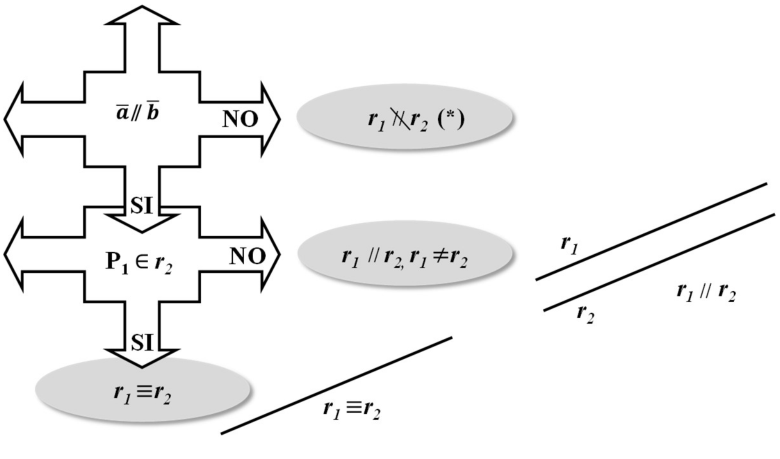
entonces $\boldsymbol{r_1}$ está en el plano $\boldsymbol{xy}$ mientras que $\boldsymbol{r_2}$ está en el plano $\boldsymbol{yz}$, y no se intersecan.

Sean $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$ dos rectas dadas por sus ecuaciones paramétricas.

$$\boldsymbol{r_1}:\begin{cases} x = \ x_1 \ + \ a_1 t \\ y = y_1 \ + \ a_2 t \\ z = z_1 \ + \ a_3 t \end{cases} \qquad \boldsymbol{r_2}:\begin{cases} x = x_2 \ + b_1 s \\ y = y_2 + \ b_2 s \\ z = z_2 \ + \ b_3 s \end{cases}$$

$P_1(x_1 \, , y_1, z_1) \in \boldsymbol{r_1}$
$P_2(x_2 \, , y_2, z_2) \in \boldsymbol{r_2}$
$\overline{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a}_1 ; \boldsymbol{a}_2 ; \boldsymbol{a}_3) \, // \, \boldsymbol{r}_1$
$\overline{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b}_1 ; \boldsymbol{b}_2 ; \boldsymbol{b}_3) \, // \, \boldsymbol{r}_2$

Una condición necesaria pero no suficiente para que dos rectas coincidan es que los vectores de dirección sean paralelos. Luego, para comparar las rectas partimos de allí:



(*) en este caso, las rectas pueden o no, cortarse; ¿cómo resolvemos esta cuestión? Resolviendo el sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (los parámetros, t y s) que resulta al plantearse la intersección de las dos rectas.

$$\boldsymbol{P\ (x; y; z)} \in r_1 \cap r_2 \Leftrightarrow \text{satisface el sistema } S\text{:} \begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + b_1 s \\ y_1 + a_2 t = y_2 + b_2 s \\ z_1 + a_3 t = z_2 + b_3 s \end{cases} \approx \begin{cases} a_1 \boldsymbol{t} - b_1 \boldsymbol{s} = x_2 - x_1 \\ a_2 \boldsymbol{t} - b_2 \boldsymbol{s} = y_2 - y_1 \\ a_3 \boldsymbol{t} - b_3 \boldsymbol{s} = z_2 - z_1 \end{cases}$$

<u>Ejemplo</u>:

$r_1)\quad x = 1 + t \ ;\ y = -2 + t \ ;\ z = t$

$r_2)\quad x = 1 + 2s \ ;\ y = s \ ;\ z = \alpha + 2s$

$$S\text{:} \begin{cases} 1 + t = 1 + 2s \\ -2 + t = s \\ t = \alpha + 2s \end{cases} \approx \begin{cases} t - 2s = 0 & (I) \\ t - s = 2 & (II) \\ t - 2s = \alpha & (III) \end{cases}$$

De (I) y (II) ; $t^* = 4$ y $s^* = 2$.

(*) ¿cómo resolvemos este sistema?

1ro) analizamos si $\bar{a} // \bar{b}$. Si lo son, concluimos según el cuadro anterior.

2do) si $\bar{a} \# \bar{b}$; entonces resolvemos el sistema formado por <u>*las dos primeras ecuaciones*</u> y obtenemos $t = t^*$ y $s = s^*$.

3ro) reemplazamos t^* y s^* en la tercera ecuación y vemos si la satisfacen.

4to) <u>concluimos</u>:
- si no la satisfacen → $S = r_1 \cap r_2 = \varnothing$
- si la satisfacen → $S = r_1 \cap r_2 = \{\boldsymbol{P}\}$
  $\boldsymbol{P} = (x_1 + a_1 t^* \ ;\ y_1 + a_2 t^* \ ;\ z_1 + a_3 t^*)$

En (III) :

- si $\underline{\alpha = 0}$; $t^* = 4$ y $s^* = 2$, satisfacen (III)

$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{P}(1 + t^*; -2 + t^*; t^*)\} \rightarrow \boldsymbol{r_1 \cap r_2} = \mathbf{P\ (5; 2; 4)}$

- si $\underline{\alpha \neq 0}$; $t^* = 4$ y $s^* = 2$, no satisfacen (III) $\rightarrow \boldsymbol{r_1 \cap r_2} = \varnothing$

6.4 Actividades

6.4.1 Rectas

1) Muchos de los problemas que se presentan en Geometría Analítica requieren el planteo de ***"una ecuación"***, la búsqueda de su "conjunto solución" **(S)**. En lo que sigue en la 1er columna se indican algunos ***"tipos de ecuaciones"*** y en la 2da columna algunos ***"conjuntos solución"***, **S**, junto al espacio al cual pertenecen. Se pide unir con una flecha cada tipo de ecuación con su conjunto solución:

(I)$ax + b = 0 (a \neq 0)$→ lineal; incógnita: **x** (A) $S(infinito) \subseteq \mathbb{R}$

(II) $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$→ 2do grado; incógnita: **x** (B) $S(finito) \subseteq \mathbb{R}^2$

(III) $ax + by + c = 0$→ lineal; incógnitas: **x**; **y** (C) $S(finito) \subseteq \mathbb{R}$

(IV) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$→ 2do grado; incógnitas: **x**; **y** (D) $S(infinito) \subseteq \mathbb{R}^2$

(V) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 (r \neq 0)$→ 2do grado; incógnitas: **x**; **y** (E) $S = \emptyset$

(VI) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = -4$→ 2do grado; incógnitas: **x**; **y**

2) <u>Determinación de puntos de una recta dada por su ecuación general.</u>

Dadas las rectas: r$_1$) $ax + by + c = 0 \quad (b \neq 0);$ $P \in r_1?$
r$_2$) $by + c = 0 (a = 0; b \neq 0);$ $Q \in r_2?$
r$_3$) $ax + c = 0 \quad (a \neq 0; b = 0);$ $R \in r_3?$

Dar **"un punto"** de cada recta. (P ; Q ; R)

→ **Clasificación de las "ecuaciones":** lineales; <u>dos</u> incógnitas: x; y
→ **Solución:** $S(infinito) \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{r_1} \rightarrow S_1 = \{(x; y)/ax + by + c = 0\} = \{\left(x; \frac{-ax-c}{b}\right)/x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbf{r_2} \rightarrow S_2 = \{(x; y)/by + c = 0\} = \{\left(x; \frac{-c}{b}\right)/x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbf{r_3} \rightarrow S_3 = \{(x; y)/ax + c = 0\} = \{\left(\frac{-c}{a}; y\right)/y \in \mathbb{R}\}$$

> **<u>OBSERVACIÓN:</u>** si en <u>una ecuación</u> el <u>número de incógnitas</u> es mayor a **"1"** se dice que la ecuación tiene **"variables libres"**. La existencia de variables libres es lo que determina que la ecuación tenga **"infinitas soluciones"**.

> **<u>DEFINICIÓN:</u>** **"variable libre"** incógnita de la ecuación cuyo valor <u>no incide</u> en la solución; o sea, a la que se puede dar un <u>valor particular cualquiera</u> al efecto de obtener <u>una solución particular cualquiera</u> (de la ecuación).

> **<u>RTA</u>:** "x" **variable libre** en **r$_1$** $P\left(2; \frac{-2a-c}{b}\right) \in r_1$
"x" **variable libre** en **r$_2$** $P\left(2; \frac{-2a-c}{b}\right) \in r_1$
"y" **variable libre** en **r$_3$** $P\left(2; \frac{-2a-c}{b}\right) \in r_1$

3) Para las ecuaciones de la recta en el plano que se dan a continuación se pide completar los espacios en blanco con lo que corresponda en cada caso:

a) **r**)$ax + by + c = 0$→ ecuación ……………………………………………………..
→$\overline{n} = (a; b)$entonces $\overline{n}$ es ……………………………..........
→ **c=0** entonces r ……………………………………………

b) **r**)$y = mx + b$ → ecuación ………………………………………………
$P(x_0; y_0) \in r$ →$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$= ………………………………………………
$Q(x_1; y_1) \in r$ → **h=0** entonces r ………………………………………

c) Ecuación pto-pendiente de r → **r)** …………………………………………….....

Deducir la "ecuación pto-pendiente de r" completando el siguiente esquema:

<u>Datos</u>: m y $P(x_0; y_0) \in r$; Incógnita: h

<u>Proceso</u>:
Paso 1) h = ... (usando los datos, despejar h de$y = mx + b$).
Paso 2) <u>Reemplazar</u> el **"h"** obtenido en el **"Paso l"** en la ecuación explícita de **r**
Paso 3) <u>Concluir</u> la ecuación buscada trabajando algebraicamente la ecuación que resulta del **"Paso 2"** (en particular, sacar factor común en el 2do miembro).

d) Dadas r1)$y = m_1x + h_1$ y r2) $y = m_2x + h_2$
→$r_1 \parallel r_2$ ⇔ ………………………………………………
→$r_1 \equiv r_2$ ⇔ ………………………………………………
→$r_1 \perp r_2$ ⇔ ………………………………………………

4) Dada las rectas del plano, **e**1)$x = 0$; **e**2)$y = 0$; **r)** $x + y - 3 = 0$, se pide:
a) Dar tres puntos de **e**1. Indicar quien es **e**1.
b) Dar tres puntos de **e**2. Indicar quien es **e**2.
c) Analizar si los siguientes puntos pertenecen a **r**:
$P(1; 2)$; $Q(1/5 ; 12/5)$; $R(\sqrt{2}; 3 - \sqrt{2})$; $S(1/2 ; 5/2)$; $T(-4; 0)$
d)
d1) Dar las coordenadas de **$P_1(2;y_1)$; $P_2(x_2; -1)$; $P_3(0;y_3)$; $P_4(x_4;0)$**; si se sabe que dichos puntos pertenecen a **r**. Graficar **r**.
d2) Dar tres puntos de **r** distintos a los hallados hasta ahora. Graficarlos en **r**.
d3) Para responder tanto **(d1)** como **(d2)** es necesario plantear y/o resolver **"una ecuación"**. En cada caso, se pide analizar de que ***"tipo"*** (entre los del **ej. 1**) es la ecuación que queda; indicar si la solución es única, si hay más de una (pero en cantidad finita) o si hay infinitas soluciones.
e) Dado $C(2; 1) \in r$ hallar todos los $P \in r$ tal que $d(C; P) = \sqrt{8}$. ¿A que otra curva conocida, **Γ** pertenecen los **P** hallados? Graficar **P**, **r** y **Γ**.

5) Dado $\overline{n} = (2; -1)$
a) Hallar la ecuación de **r**1, si se sabe que $P_1(4; 2) \in r_1$y $\overline{n} \perp r_1$
b) Hallar la ecuación de **r**2, si se sabe que $P_2(2; 3) \in r_2$y$\overline{n} \perp r_2$
c) Hallar la ecuación de **r**3, si se sabe que $P_3(0; 4) \in r_3$y $\overline{n} \perp r_3$
d) Hallar la ecuación de **r**4, si se sabe que $P \in r_4$ y$\overline{w} = (1; 2) \perp r_4$
e) ¿Cómo son **r**1, **r**2 y **r**3? ¿Por qué? Graficar **r**1, **r**2 y **r**3 en un mismo sistema de referencias.
f) Graficar **r**4 en el mismo sistema que **r**1, **r**2 y **r**3. ¿Qué observa? ¿Por qué?

6)

a) Hallar la ecuación explícita de **r**, recta que pasa por P(-2;0) y Q(0; 2).

b) Dar $\mathbf{r_1}$, recta paralela a **r** y que pase por R(2; 5).

c) Dar $\mathbf{r_2}$, recta perpendicular a **r** y que pase por R(2; 5).

d) Graficar todas las rectas halladas, verificar que cumplen con lo pedido.

e)* V o F (justificar):** si ***α = ángulo que forma r con el semieje x positivo, entonces α = 45º

f)* V o F (justificar):** si ***β = ángulo que forma $\boldsymbol{r_2}$ ***con el semieje x positivo***, entonces β = 45º

7) Dados $\mathbf{\bar{u}=(3;4)}$ y **P(2;-1)** y sabiendo que **P ∈ r** y $\mathbf{\bar{u} \parallel r}$.

a) Dar la ecuación general de **r**.

b) Dar la ecuación explícita de **r**.

8) Hallar la ecuación de la recta **r** en cada uno de los siguientes casos:

a) Es paralela al **eje y** y corta al **eje x** 5 unidades a la izquierda del origen.

b) Es paralela al **eje x** y corta al **eje y** 7 unidades por encima del origen.

c) Es paralela a la recta $\mathbf{r_1)}$ ***x+4=0*** y está 10 unidades a la derecha.

d) Es paralela a la recta $\mathbf{r_2)}$ ***y+8=0*** y dista 6 unidades de P(2;1).

e) Es perpendicular a la recta $\mathbf{r_3)}$ ***y-2=0*** y dista dos unidades de O(0;0).

f) Equidista de las rectas ***y+5=0*** y ***y-2=0***.

9) Dada **r)** ***y* = *(k+2) x* + *5***, hallar el valor de **"k"** para que **r)** sea:

a) Paralela a $\mathbf{r_1)}$ ***y=7-5x***.

b) Perpendicular a $\mathbf{r_2)}$ ***y=x-3***.

c) Paralela a $\mathbf{r_3)}$ ***2x-y+4=0***.

10) Hallar el valor de **"k"** de modo que:

a) La recta ***4x-ky-7=0*** tenga pendiente igual a 3.

b) La recta ***kx-y=3k-6*** tenga ordenada al origen igual a 6.

c) La recta ***3kx+5y+k-2=0*** pase por el punto P(-1;4).

11) Hallar la pendiente **"m"** y el ángulo de inclinación de las rectas que unen los pares de puntos siguientes. Dar además la ecuación de cada una de dichas rectas y graficarlas.

a) (-8;-4) y (5; 9)   ***b)*** (10;-3) y (14;-7)

c) (-11; 4) y (-11;10)   ***d)*** (8; 6) y (14; 6)

12) Dada la recta $r\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$

a) Analizar si los siguientes puntos pertenecen a **r**:

P(-2;-1); Q(7;-4); R(1;2); S(0;⅓); T(2;0);

b) Dar las coordenadas de $\mathbf{P_1(-8;y_1)}$, $\mathbf{P_2(x_2;-1)}$, $\mathbf{P_3(0;\ y_3)}$ y $\mathbf{P_4(x_4;0)}$ si se sabe que dichos puntos pertenecen a **r**. Graficar **r**.

c) Dar dos puntos de **r** distintos a los hallados hasta ahora. Graficarlos en **r**.

d) Decir, por simple inspección, si las siguientes rectas coinciden (o no) con **r**. Justificar la respuesta.

$$r_1\begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases} \quad r_2\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 - \lambda \end{cases} \quad r_3\begin{cases} x = -5 - 6\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

13) Dada la recta $r\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$

a) Dado el punto **C(0;5)** hallar (si existen) los **P∈r** tal que **d(C; P) = k** para:

(***i***) k= √50   (***ii***) k= √40   (***iii***) k= √10 .

b) Completar la siguiente oración:
→ **<u>Geométricamente</u>**, lo que se pide es hallar **r∩Γ$_k$** para **Γ$_k$**: ……………………

c) En un mismo sistema de referencias graficar **r** y **Γ$_k$** para los distintos **k** y, <u>a partir de lo graficado</u>, completar las siguientes proposiciones. Hecho esto, comparar lo obtenido *"gráficamente"* con lo obtenido *"algebraicamente"* en **(a)**.

→ si **k=√50** entonces **r∩Γ$_k$**= ……………………
→ si **k=√40** entonces **r∩Γ$_k$**= ……………………
→ si **k=√10** entonces **r∩Γ$_k$**= ……………………
→ si **k=√40**, **r** es …………………… a **Γ$_k$** en ……………………

14) Dada la recta$r\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=1+3\lambda\end{cases}$obtener la ecuación paramétrica de las siguientes rectas:
a) t∥r que pase por A(-1;4)
b) s⊥t que pase por B(0;-2)
c) q que pase por A y B

15) Escribir las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas;
a) Contiene al origen de coordenadas y es paralela al eje x.
b) Contiene al punto (3;-5) es paralela al eje y.
c) Contiene a los puntos A(1;2) y B(-2;3).
d) Contiene al punto (7;-5) y es paralela a la recta$r_1\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=3-\lambda\end{cases}$.

16) Obtener la ecuación general de las siguientes rectas:
a) Contiene al punto (-1; 6) y es perpendicular al vector (4, 3)
b) Contiene a los puntos (2; -3) y (5; 4).
c) Contiene al punto (1;-2) y es paralela la recta$\begin{cases}x=-3+2\lambda\\ y=4+\lambda\end{cases}$
d) Contiene al punto (3; -5) y es paralela al eje x.
e) Contiene al punto (-1; 2) y es paralela al eje de las ordenadas.

17) Dada la recta$r\begin{cases}x=3+u_xt\\ y=1+u_yt\end{cases}$con $\bar{u}=(u_x;u_y)$ ∥ r
a) Dar **ū** si se sabe que **r ∥ eje x**. Escribir las ecs. paramétricas de **r** para este caso.
b) Dar **ū** si se sabe que **r ∥ eje y**. Escribir las ecs. paramétricas de **r** para este caso.
c) Hallar la **ecuación general** de **r** con los métodos indicados. Luego, dar la **ec. explícita.**

→**<u>Método 1</u>**: **Paso l**: Buscar $\bar{n}\perp\bar{u}$
Paso 2: Reemplazar en la ec. gral. de **r :** $ax + by + c = 0$
Paso 3: Obtener **"c"** usando un punto de paso de **r** .
Paso 4: Dar la Rta: ………………… **[**$\rightarrow u_yx - u_xy - (3u_y - u_x) = 0$**]**

→**<u>Método 2</u>**: **Paso l**: Despejar **"t"** de la ecuación que más convenga.
Paso 2: Reemplazar el **"t"** hallado en la <u>otra ecuación</u>.
Paso 3: Trabajar algebraicamente la expresión que queda.
Paso 4: Dar la Rta: ………………… (si existe).

d) Analice ambos <u>métodos</u> y concluya acerca de la "aplicabilidad" de los mismos para obtener cada tipo de ecuación (*general ó explícita*). O sea si, cualquiera sea **ū**, se pueden usar ambos, sólo uno ó ninguno.

18) Para las rectas que se indican a continuación, se pide:
a) Dar la ecuación general de la recta.
b) Dar (si existe) la ecuación explícita de la recta.
c) Graficar las rectas, verificar que se cortan en un punto, que una de ellas es paralela al eje x y otra al eje y.

$$r_1\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \end{cases} \qquad r_2\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \end{cases} \qquad r_3\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 \end{cases}$$

19) Determinar la pendiente, la ordenada al origen y pasar a la forma paramétrica las siguientes rectas:
a) *2x-3y-6=0*
b) *3x+2y=0*
c) *5x+3y+2=0*
d) *5x-y+15=0*
e) *y-3=0*
f) *-x+y+4=0*
g) *-x-5=0*

20) Hallar las ecuaciones de las rectas que satisfacen las siguientes condiciones:
a) Pasa por los puntos (6,0) y (8;2).
b) Pasa por los puntos (-1;1) y (1;-1).
c) Pasa por el punto (1,-3) y su pendiente es **m=2**.
d) Corta a los ejes en (3;0) y (0;-2).
e) Pasa por el origen y es paralela a la recta ***2x-3y=4***.
f) Pasa por el origen y es perpendicular a la recta ***5x+y-2=0***.
g) Pasa por el punto (3;2) y es paralela a la recta ***4x-y-3=0***.
h) pasa por el punto (6;-2) y es perpendicular a la recta ***y=-2x+5***.
i) Su ordenada al origen es igual a 5 y pasa por el punto (6;3)
j) Su pendiente es 2 y pasa por el origen.
k) Es perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio:

i) A(2; 1) y B(-3; 3)

ii) A(3; 1) y B(2; 4)

iii) A(-1; 1) y B(3; 7)

21) Dada **r)** ***x+3y-3=0*** determinar la pendiente de las rectas:
a) $\mathbf{r_1 \| r}$. Dar tres rectas perpendiculares a **"r"** en forma general, paramétrica y explícita.
b) $\mathbf{r_2 \| r}$. Dar tres rectas paralelas a **"r"** en forma general, paramétrica y explícita.

22) Determinar **k** de manera que:
a) 2x-3y+k=0 pase por (-2,1).
b) 2kx-5y+3=0 tenga pendiente 3.
c) x+y-k=0 pase por (3;4).
d) x-3ky+4=0 tenga ordenada al origen igual a -2.

23) Determinar el valor de **t** para que la rectas:

$$r_1)y=\frac{t}{1+t}x+2\frac{t-2}{t-1} \qquad r_2)y=\frac{3t}{1-3t}x+1$$

a) Resulten paralelas

b) Resulten perpendiculares.

Además, en cada caso, con el **"t"** hallado escribir la ecuación de cada recta, graficarlas y verificar que cumplen lo pedido.

24) Calcular la distancia del punto a la recta en los siguientes casos:

a) *x-3y+5=0* P(-1;3)

b) *y=(-4/5)x+6* P(2;-1)

c) $\begin{cases} x=1+u \\ y=-2-3u \end{cases}$ P(2;5)

25) Hallar la ecuación de las rectas que pasan por (2;-1) y cuya distancia al origen es 2.

26) Hallar la ecuación de las rectas que pasan por (5;10) y cuya distancia al origen es 10.

27) Verificar que las siguientes rectas son paralelas. Hallar la distancia entre ambas.

$\mathbf{r_1)}$ ***4x-3y+10=0*** $\quad r_2\begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \end{cases}$

28) Muchos de los problemas que se presentan en Geometría Analítica requieren el planteo de un ***Sistema de Ecuaciones***, la búsqueda de su "conjunto solución" **(S)**.

> **Intersección de dos rectas dadas por su ecuación general.**

$\mathbf{r_1}$: $a_1x+b_1y+c_1=0$; $\quad \overline{n}_1=(a_1;b_1)\perp r_1$

$\mathbf{r_2}$: $a_2x+b_2y+c_2=0$; $\quad \overline{n}_2=(a_2;b_2)\perp r_2$

$\therefore \mathbf{r_1 \cap r_2 = ???}$

P*(x*;y*) ∊ $r_1 \cap r_2$ ⇔ (x*;y*) satisface el sistema $\xi:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$

> **Conjunto Solución:** **S**, es el conjunto de todos los puntos del plano, P(x; y), que verifican ambas ecuaciones "a la vez".

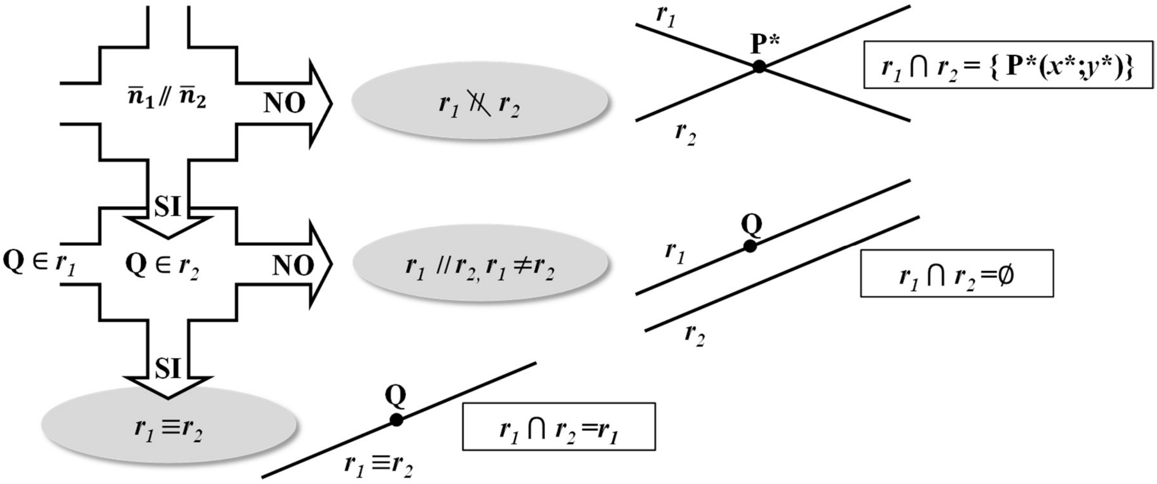
> **Algebraicamente,** y respecto a ξ, tenemos 3 situaciones posibles:

(I-A) **COMPATIBLE DETERMINADO** ⇒ solución "única" ⇒ **S={P*(x*;y*)}**

(I-B) **COMPATIBLE INDETERMINADO** ⇒ infinitas soluciones

(II) **INCOMPATIBLE** ⇒ no tiene solución ⇒ **S=∅**

> **Geométricamente**, tenemos 3 situaciones que se corresponden con las anteriores



Luego, y al efecto de hallar **S**, procedemos según el siguiente **proceso**:

Paso 1: Analizamos si las rectas son paralelas (proceso válido para **$a_1 \neq 0$** y **$b_1 \neq 0$**)

¿$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$? ➞ **SI** → **$\bar{n}_1 \| \bar{n}_2$ → $r_1 \| r_2$** → **ir al Paso 2**

➞ **NO** →**$r_1 \cap r_2 = \{P^*(x^*;y^*)\}$** → **ir al Paso 3**

Paso 2:

¿$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$? → **SI** → **$r_1 \equiv r_2 \Rightarrow \xi$ tiene infinitas soluciones: S=r_1**

¿$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$? → **SI** → **$r_1 \| r_2$** y **$r_1 \not\equiv r_2 \Rightarrow \xi$ no tiene soluciones: S=∅**

Paso 3:

$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$→ **$r_1 \not\equiv r_2$** → **$r_1 \cap r_2$ = P* ⇒ ξ solución única:** S={**P*(x*;y*)**}

El punto **P*(x*;y*)** se obtiene **"resolviendo el sistema ξ"** .

Para resolver el sistema ξ podemos acudir a alguno de los siguientes "métodos".

- **Sustitución**
- **Sumas y restas** (ó **Método de Gauss**)
- **Regla de Cramer**

El método más conveniente o posible de usar depende de las ecuaciones que forman el sistema. Por ejemplo, si las rectas son paralelas (coincidentes o no) la **Regla de Cramer no se puede usar**. Si en una de las ecuaciones una de las incógnitas "no aparece" , conviene entonces resolver **"por sustitución"**. En general el método que sirve para cualquier caso (incluso para sistemas con distinto número de ecuaciones que de incógnitas) es el **Método de Gauss**.

Ejemplos:

1. **r_1:** 2x+y-5=0; $\bar{n}_1$=(2;1)⊥r_1

r_2: 10x+5y-25=0; $\bar{n}_2$=(10;5)⊥r_2

$$\therefore \xi: \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 10x + 5y - 25 = 0 \end{cases}$$

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = 5$→ **$r_1 \equiv r_2$** → **infinitas soluciones: $r_1 \cap r_2 = r_1$**

2. **r_1:** 2x+y-5=0; $\bar{n}_1$=(2;1)⊥r_1

r_2: 4x+2y+10=0; $\bar{n}_2$=(4;2)⊥r_2

$$\therefore \xi: \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = -10 \end{cases}$$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=2\rightarrow$ **$r_1\|r_2$**

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}\neq\frac{c_2}{c_1}=-2\rightarrow$ **$r_1\|r_2$** y **$r_1\not\equiv r_2$** → **ninguna solución: $r_1\cap r_2=\emptyset$**

3. **r_1:** 2x+y-5=0; $\overline{n}_1=(2;1)\perp r_1$

r_2: x+5y-7=0; $\overline{n}_2=(1;5)\perp r_2$

$$\therefore\xi:\begin{cases}2x+y=5\\x+5y=7\end{cases}$$

$\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}\rightarrow$ **<u>ξ tiene solución única</u>: $r_1\cap r_2=\{P^*(x^*;y^*)\}$**

Resolvemos el sistema por cualquier método, en este caso por **GAUSS**.
Para ello procedemos a:

1) "Identificar" las ecuaciones con **E1** y **E2**

2) Realizar **"operaciones elementales"** entre las ecuaciones al efecto de pasar a un **"sistema equivalente"** pero donde la incógnita **"x"** no aparezca en **E2**.

3) "Despejar" la incógnita **"y"** en **E2**.

4) "Reemplazar" "y" en **E1** por el valor obtenido en **(3)**. **Despejar "x"**.

$$\begin{cases}2x+y=5\rightarrow E1\\x+5y=7\rightarrow E2\end{cases}\quad\begin{cases}2x+y=5\\-9y=-9\end{cases}\quad\begin{cases}2x+y=5\\\quad y=1\end{cases}\quad\begin{cases}2x=4\\y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\rightarrow \mathbf{r_1\cap r_2=\{P^*(2;1)\}}$$

29) Hallar, si existe, la intersección entre los siguientes pares de rectas. Graficar las rectas y verificar si la respuesta dada es correcta.

1. **r_1:** 2x+2y=4
r_2: x-y=-4

2. **r_1:** 2x+2y=4
r_2: y=-4

3. **r_1:** 2x+2y=4
r_2: x=-4

4. **r_1:** 2x+2y=4
r_2: x+y=-4

5. **r_1:** 2x+2y=4
r_2: x+y=2

6. **r_1:** 2x+2y=4
r_2: x-y=0

> <u>Intersección de dos rectas con distintas formas de ecuación.</u>

> Sean **r_1** y **r_2**,

$$r_1)\begin{cases}x=x_o+\lambda u_1\\y=y_o+\lambda u_2\end{cases}\qquad r_2)\ ax+by+c=0\begin{cases}P_o(x_o;y_o)\in r_1\\\overline{u}=(u_1;u_2)\parallel r_1\\\overline{n}=(a;b)\perp r_1\end{cases}$$

> **$P^*(x^*;y^*)\in r_1\cap r_2$** ⇔ satisface el sistema S: $\begin{cases}x=x_o+\lambda u_1\rightarrow E1\\y=y_o+\lambda u_2\rightarrow E2\\ax+by+c=0\rightarrow E3\end{cases}$

***) S** es un sistema de <u>3 ecuaciones</u> (E_1; E_2; E_3) con <u>3 incógnitas</u>: x, y, λ

****)** El método a usar en este caso consta de tres pasos:

<u>Paso 1</u>: en la ecuación E; , reemplazar **"x"** e **"y"** por los valores indicados para estas variables en las ecuaciones **El** y **E2**.

Paso 2: Trabajar algebraicamente hasta que en **E3** quede una ecuación **en sólo λ** de la forma: **Aλ+B=0**

$$\xi:\begin{cases} x = x_o + \lambda u_1 \\ y = y_o + \lambda u_2 \\ a(x_o + \lambda u_1) + b(y_o + \lambda u_2) + c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \xi:\begin{cases} x = x_o + \lambda u_1 \rightarrow E1 \\ y = y_o + \lambda u_2 \rightarrow E2 \\ A\lambda + B = 0 \rightarrow E3 \end{cases}$$

Paso 3: Hallar λ y dar la respuesta, la cual caerá en alguno de los siguientes casos:

(I) Solución única – A≠0 ⇒ λ=B/A → $r_1 \cap r_2$=P*(x*;y*)

(II) infinitas soluciones – A=0 y B=0 ⇒ 0 λ=0 → vale ∀ λ → $r_1 \cap r_2 = r_1$

(III) Vacío r_1– A=0 y B≠0 ⇒ 0 λ=B → ∄ λ → $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

30) Hallar si existe si punto de intersección entre les siguientes pares de rectas:

a) **r_1:** x-3y+2=0

r_2: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \end{cases}$

b) **r_1:** $\begin{cases} x = 12 + 3u \\ y = 2 + 2u \end{cases}$

r_2: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 7t \end{cases}$

31)

a) Determinar en cada caso si los pares de rectas dados son:

i) Paralelas ¿Son coincidentes?

ii) Secantes ¿Son perpendiculares?

b) Calcular la distancia entre las rectas o la intersección según corresponda.

I) **r_1:** -3x-y+17=0
r_2: x-3y-2=0

II) **r_1:** 9x+12y-13=0
r_2: 3x+4y-2=0

III) **r_1:** x=-2y
r_2: 2x-4y+3=0

IV) **r_1:** y+5=0
r_2: 3y-1=0

V) **r_1:** $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$
r_2: y=(4/3)x-5/3

VI) **r_1:** 2x-4y+3=0
r_2: $\begin{cases} x = 6 + 2u \\ y = 3 + u \end{cases}$

32) Dadas **r_1:** ***2x-3y+6=9*** y **r_2:** ***x-y=0*** se pide:

a) Graficar ambas rectas en un mismo sistema.

b) Hallar $r_1 \cap r_2$.

c) Dar la ecuación de **r_k)** $r_1+kr_2=0$ (para **k**=0; ±1; ±2) o sea de **r_k) (2x-3y+6)+*k(x-y)=0*.** Graficar todas las rectas en el mismo sistema que **r_1** y **r_2**.

d) **r_k)** $r_1+kr_2=0$; $k \in \mathbb{R}$, recibe el nombre de **"haz de rectas"**. Teniendo en cuenta lo hecho en los ítems anteriores, indique cual es la propiedad geométrica que caracteriza a un **"haz de rectas"**.

e) Sabiendo que la recta **r** pasa por la intersección de **r_1** y **r_2** se pide dar su ecuación para los siguientes casos; hacer esto usando el **"haz de rectas".**

i) Pasa por (-1; 3).

ii) Su ordenada al origen es el doble de su pendiente.

iii) Es paralela a la recta que une los puntos **r**∩***eje x*** y **r**∩***eje y***.

iv) Su distancia al origen es 6/√23.

6.4.2 Cónicas

1)

(A) Para cada una de las ecuaciones dadas a continuación:

- Identifique la curva
- Indique la propiedad que cumplen los puntos de ella
- Grafique la curva
- Del gráfico haga una "hipótesis" sobre la cantidad de puntos de intersección entre la curva y los ejes coordenado. Luego verifique o refute su hipótesis

(a) $x^2+y^2=25$ (b) $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

(c) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ (d) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$

(B) Escriba las ecuaciones paramétricas de las curvas

2)

(A) Para cada una de las ecuaciones a continuación:

- Identifique la curva
- Grafique la curva
- Dar un punto que pertenezca a la curva y otro que no

(a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (b) $x^2+4y^2=9$ (c) $\frac{x^2}{2}+2y^2=8$

(d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ (e) $4x^2+y^2=16$ (f) $4x^2+25y^2=1$

(B) Escriba las ecuaciones paramétricas de las curvas

3) Encuentre la ecuación para la “familia” de elipses con vértices en $V_1(-10;0)$ y $V_1(10;0)$. Luego halle el miembro particular de esta familia que pase por $A(6;4)$.

4) En cada uno de los sistemas que siguen grafique las curvas que lo forman en un mismo sistema, marque los puntos de intersección (si los hay) y dé sus coordenadas.

(a) $\begin{cases} x^2+4y^2=36 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1 \\ y=x \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}=1 \\ x+y=6 \end{cases}$

7— Superficies

En este Capítulo nos ocupamos de la noción de superficie, de manera análoga a lo hecho con las curvas. Por superficie entendemos un conjunto de puntos del espacio que satisface ciertas condiciones o propiedades que caracterizan a las superficies y sólo a ellas.

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathrm{R}^3 \ / \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..}_{condición} \}$$

Así, dar una superficie, es dar la o las condiciones que debe verificar un punto para pertenecer a ella. Esta condición puede indicarse de distintas maneras:

(I) dando una propiedad común a todos sus puntos.

Ejemplo: $S = \{ \underbrace{ptos \cdot del \cdot espacio}_{elementos} \ / \ \underbrace{equidistan \cdot de \cdot un \cdot pto \cdot fijo}_{condición} \}$

(II) indicando la relación que liga a las coordenadas de un punto que pertenece a la superficie; o sea, a través de una **ecuación** a la que llamamos **ecuación de la superficie** ya que es satisfecha por todos los puntos de la superficie y sólo por ellos.

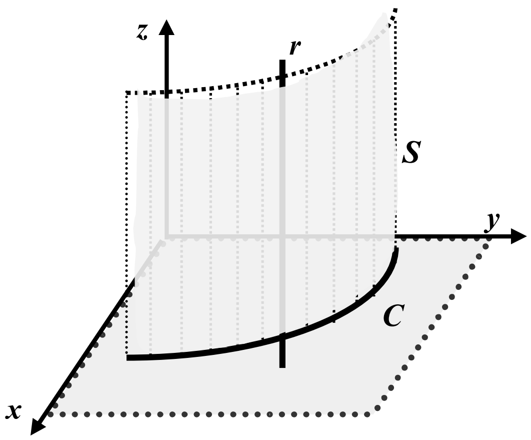
Ejemplo: $S = \{ P(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ z - x^2 - y^2 = 0 \}$.

(III) indicando cómo se genera la superficie:

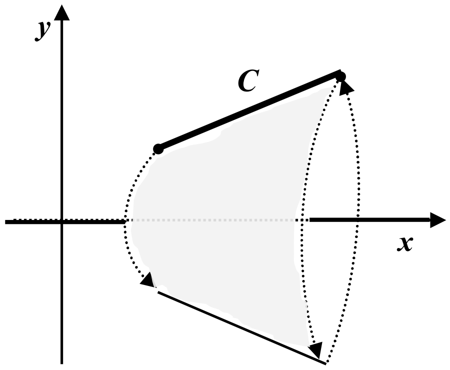
(III **a**) SUPERFICIE CILÍNDRICA

Superficie *generada* por una recta ***r*** que se mueve tocando una curva plana ***C*** y en forma paralela al eje coordenado perpendicular al plano que contiene a ***C***. ***r*** se llama **generatriz** de la superficie cilíndrica, ***C*** se llama **directriz** de la superficie cilíndrica.

En el ejemplo: ***C*** esta contenida en el plano ***xy***, ***r*** es paralela al eje *z*.



(III **b**) SUPERFICIE de REVOLUCIÓN



Superficie generada por una curva plana ***C*** que gira alrededor de un eje coordenado contenido en el mismo plano que la curva.
En este caso, el eje se llama "*eje de revolución*".

En el ejemplo: ***C*** esta contenida en el plano ***xy***, ***C*** gira alrededor del eje ***x***.

⌦ En cualquier caso y como ya vimos, un objetivo de la **Geometría Analítica** es expresar la condición que caracteriza a los puntos de la superficie por *una o más ecuaciones* (previa introducción de un sistema cartesiano ortogonal).

Por ejemplo; si definimos superficie esférica según la propiedad que presentan sus puntos:

$$\mathbf{SE} = \{ \underbrace{ptos \cdot del \cdot espacio}_{elementos} / \underbrace{equidistan \cdot de \cdot un \cdot pto \cdot fijo}_{condición} \} ;$$

si luego llamamos **C** al punto fijo (centro) y **r** a la distancia al centro,

$$\mathbf{SE} = \{ P \in R^3 / \ d(P,C) = r \} ;$$

y finalmente introducimos un sistema de referencia y expresamos los puntos por sus coordenadas:

P(x; y; z) , C(a; b; c); podemos dar la condición que define **SE** a través de una ecuación*:*

$$\mathbf{SE} = \{ (x,y,z) \in R^3 \ / \ \underbrace{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}_{condición \ \rightarrow \ ecuación} \}$$

Cada vez que tengamos una superficie dada geométricamente nuestro objetivo será entonces, traducir la condición geométrica a una expresión algebraica; o sea, hallar la <u>*ecuación de la superficie*</u>.

<u>Algunas de las ecuaciones que definen superficies son</u>:

① ecuaciones de ***1er grado*** con tres incógnitas: $\boldsymbol{a\,x + b\,y + cz + d = 0}$ *;*

$$3x + 2y + 4z - 2 = 0 ; \quad x - 3z = 5 ; \quad x + y = 0 ; \quad y = 0 \qquad (\rightarrow planos)$$

② ecuaciones de ***2do grado*** con tres incógnitas:

$$\boldsymbol{A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,x\,y + E\,y\,z + F\,x\,z + G\,x + H\,y + I\,z + J = 0}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0; \quad x^2 + y^2 - z = 0; \quad 4\,x^2 + y^2 + 16z^2 = 1 \qquad (\rightarrow cuádricas)$$

③ toda ecuación en la que una de las incógnitas está o puede expresarse en <u>*función*</u> de las otras dos; por ejemplo, z en función de x e y ; o sea, con fórmula *z =F(x; y).*

$$z = x^2 + y^2 + 4 \ ; \quad z = 3x + 2y \ ; \quad z = y \ ; \quad z = x^2$$

⌧ si observamos los tres casos vemos que, en última instancia, todas las expresiones propuestas son ecuaciones con tres incógnitas. Luego, y en general, una forma de dar una *superficie* es a través de una *ecuación con tres incógnitas*.

En general, una ecuación con tres incógnitas la podemos representar en forma genérica como:

$$F\ (x;y;z) = k$$

(con **F** función de tres variables que indica como se relacionan las incógnitas entre si).

Tenemos así una forma genérica de dar la condición que define a los puntos de una superficie ***S***:

$$\boxed{P(x;y;z) \in S \Leftrightarrow P \text{ satisface la ecuación de } S \Leftrightarrow F\ (x,y,z) = k}$$

Por ejemplo, si $F\ (x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y k = 25 ; queda definida la superficie:

$S = \{ (x,y,z) \in R^3 /\ F\ (x, y, z) = 25 \}$; la que en definitiva queda:

$S = \{ (x,y,z) \in R^3 /\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \} = \textbf{SE}$

(superficie esférica, centro en el origen, r = 5)

- ¿ Cómo obtenemos puntos de SE ?: resolviendo la ecuación, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
- ¿ Cómo resolvemos una ecuación con tres incógnitas ?:
  dando valor a dos de las incógnitas y calculando la tercera; así tenemos que:
  (0, 5, 0) ; (3, 4, 0) ; (-3 , 4, 0) ; (4, 0 , 3) ; (0 , -4 , 3) ; .... , son puntos de ***SE***.
- ¿ Cómo decidimos si un punto dado pertenece o no a la curva ?:

F *(x , y , z)* *= 25* ⟷ *ecuación de la superficie* ⟷ *ejemplo* $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

indica las operaciones a realizar sobre x , y , z a los efectos de decidir si P(x,y,z) pertenece o no a la superficie .

$$P(x,y,z) \in SE \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

$\textbf{P}\ (3, \textbf{4}, \textbf{0}) \rightarrow \textbf{3}^2 + 4^2 + 0 = 25 \Rightarrow \textbf{P} \in \text{SE}$

$\text{S}\ (3, 2, -1) \rightarrow \textbf{3}^2 + 2^2 + (-1)^2 = 14 \Rightarrow \textbf{S} \notin \textbf{SE}$

⌧ Si $F(x,y,z) = A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,x\,y + E\,y\,z + F\,x\,z + G\,x + Hy + Iz + J,\ y\ k = 0$;

obtenemos un tipo particular de superficies, las llamadas superficies *"cuadricas"* :

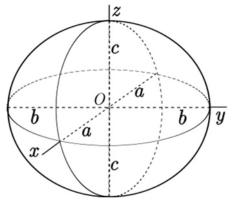
$$S = \{ (x,y,z) \in R^3 /\ \text{F}\ (x, y, z) = 0 \};$$

en definitiva

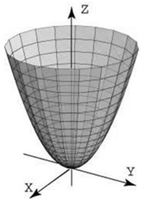
$S = \{ (x,y,z) \in R^3 /\ \text{A}\,x^2 + \text{B}\,y^2 + \text{C}\,z^2 + \text{D}\,x\,y + \text{E}\,y\,z + \text{F}\,x\,z + \text{G}\,x + \text{H}\,y + \text{I}\,z + \text{J} = 0 \}$

Las superficies cuádricas típicas son:

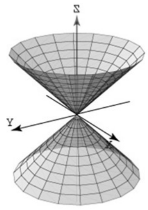
ELIPSOIDE : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (Sup. Esférica si $a = b = c$)

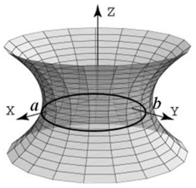


PARABOLOIDE : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$

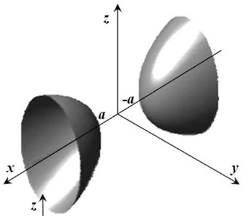


CONO: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$





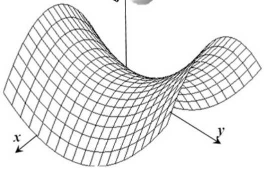
HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$

(“silla de montar”)

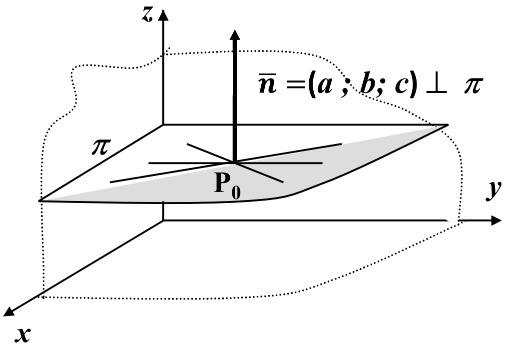


A continuación estudiamos un tipo particular de superficie: EL PLANO.

7.1 EL PLANO

Al igual que la recta, un plano, *π*, está determinado por un <u>*punto*</u> y una <u>*dirección*</u>.
Para el plano existe una única forma de dar la dirección y es por medio de un <u>*vector “perpendicular” al plano*</u> (un vector “paralelo” al plano no basta para definir “un plano”; existen infinitos planos paralelos a un vector dado).

Así , un plano está dado por un punto de paso, P_0, y un vector $\bar{n}$ perpendicular al plano (el vector “normal” al plano).



- <u>Condición de pertenencia</u>: del gráfico; $P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overline{P_oP} \perp \bar{n}$

- <u>Traduciendo</u>: $P \in \pi \Leftrightarrow \overline{P_oP} \perp \bar{n} \Leftrightarrow \overline{P_oP} \cdot \bar{n} = 0$

Luego, si conocemos el vector normal, = $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ y $P_o\ (x_o,y_o,z_o) \in \pi$ tenemos:

$$\mathrm{P}(x,y,z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_0P} \cdot \overline{\boldsymbol{n}} = 0$$

$$\mathrm{P}\ (x,y,z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad (x\text{-}x_o\ ;\ y\text{-}y_o,\ z\text{-}z_o).\ (a;\ b;\ c)=0$$

(resolvemos el producto escalar)

$$\mathrm{P}\ (x,y,z)\ \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad a.(x - x_o) + b.\ (y - y_o) + c.\ (z - z_o)=0$$

(agrupamos los términos con sólo datos)

$$\mathrm{P}\ (x,y,z)\ \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad a.x + b.y + c.z + (-ax_o - by_o - cz_o)=0$$

(hacemos, $-a.x_o\text{-}by_o\text{-}cz_o= d$)

$$\mathrm{P}(x,y,z)\ \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a.x + b.y + c.z + d = 0}$$

y obtenemos la ecuación general (ó implícita) del plano:

ECUACIÓN GENERAL de π: $\quad \boldsymbol{a.\ x + b.y + c.z + d = 0}$
(implícita)

Ejemplo 1: hallar la ecuación del plano normal a $\overline{\boldsymbol{n}}$=(3; 2; 1) y que pasa por P(2,3,-6). Hallar su intersección con los ejes coordenados y dibujar el plano.

- La ecuación que debemos buscar es la ecuación de la forma, $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$. Luego las incógnitas son: *a, b, c, d.*
  $\overline{\boldsymbol{n}} = (3;\ 2\ ;\ 1) \perp \pi \Rightarrow \mathrm{a} = 3\ ;\mathrm{b} = 2\ ;\ \mathrm{c}= 1 \Rightarrow \pi)\ 3\,x + 2\,y + 1z + d = 0 \longrightarrow ¿d?$
- para obtener el término independiente *'d'*, tenemos en cuenta que un punto pertenece al plano si y sólo sí sus coordenadas (*x,y,z*) *verifican la ecuación del plano*. Luego:

$$P(2,\ 3,\text{-}6) \in \pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3}\ .\ 2 + \mathbf{2}\ .3 + \mathbf{1}\ (\text{-}6) + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow d = \mathbf{-\ 6}$$

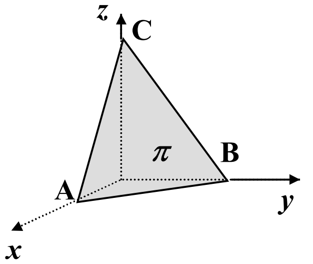
- Finalmente damos la respuesta: $\boldsymbol{\pi)\quad 3\,x + 2\,y + z - 6 = 0.}$
- Buscamos la intersección de π, con cada uno de los ejes coordenados:

$$\boldsymbol{A\ (x,y,z)} \in \pi \cap eje\ x \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A(x,y,z) \text{ pertenece al eje } x \Rightarrow y=z=0 \quad \Rightarrow A(x,0,0) \\ y,\ A\ (x,0,0) \in \pi \Rightarrow 3\ \mathbf{x} + 2\ .0 + 0 - 6 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A(2,0,0)} \end{array}\right.$$

Idem, hallamos: $\boldsymbol{B\ (x,y,z)} \in \pi \cap eje\ y \rightarrow \boldsymbol{B\ (0,\ 3,\ 0)}$

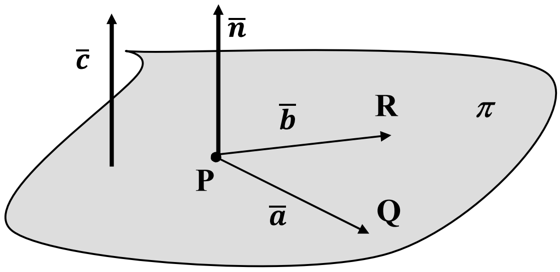
$\boldsymbol{C\ (x,y,z)} \in \pi \cap eje\ z \rightarrow \boldsymbol{C\ (0,\ 0,\ 6)}$

- Conocidos los puntos de intersección con los ejes, podemos dibujar la parte del plano que está en el primer octante.



Ejemplo 2: tres puntos definen un plano. Hallar la ecuación del plano π que pasa por *P (1, 3,2); Q(3,-1,6)* y *R(5,2,0).*

- para escribir la ecuación del plano π necesitamos un punto de paso (tenemos 3) y un vector normal a π (no tenemos ninguno).



Pero P, Q y R determinan los vectores

$$\bar{a} = \overline{PQ} \quad \text{y} \quad \bar{b} = \overline{PR};$$

vectores que están en el plano buscado; luego, su producto vectorial es perpendicular al plano y podemos tomarlo como vector normal.

O sea:

Si $\bar{n} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ entonces $\bar{n} \perp \pi$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a} = \overline{PQ} = (2, -4, 4) \\ \bar{b} = \overline{PR} = (4, -1, -2) \end{array}\right| \longrightarrow \quad \bar{n} = \bar{a} \wedge \bar{b} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (12, 20, 14)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{n} = (12, 20, 14) \perp \pi \\ P\ (1, 3, 2) \in \pi \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} \pi)\ 12x + 20y + 14z = d \\ \pi)\ 12 .1 + 20 .3 + 14 .2 = d \rightarrow d = 100 \end{array}$$

Rta: $\pi)\ 12x + 20y + 14z = 100 \quad (**)$

NOTA:

Respecto a la búsqueda de un vector perpendicular al plano, resulta claro que si $\bar{n} \perp \pi$, entonces cualquier otro vector $\bar{c} \,//\, \bar{n}$, es también normal a π.
Sea $\bar{c} = \frac{1}{2}\bar{n} \Rightarrow \bar{c} \,//\, \bar{n} \Rightarrow \quad \Rightarrow \bar{c} \perp \pi$ y tenemos otro vector para dar la ecuación de π.

$\bar{c} = \frac{1}{2}\bar{n} = \frac{1}{2} . (12, 20, 14) = (6, 10, 7) \quad \Rightarrow \pi)\ 6x + 10y + 7z = d$

P $(1, 3,2) \in \pi \quad \Rightarrow \pi)\ 6 .1 + 10 .3 + 7 .2 = d \rightarrow d = 50$

$\Rightarrow \pi)\ \boldsymbol{6x + 10y + 7z = 50}$ (distinta a (**)).

Conclusión: vemos que existen infinitas formas de dar la ecuación de un plano; o sea, *la ecuación general de un plano no es única.*

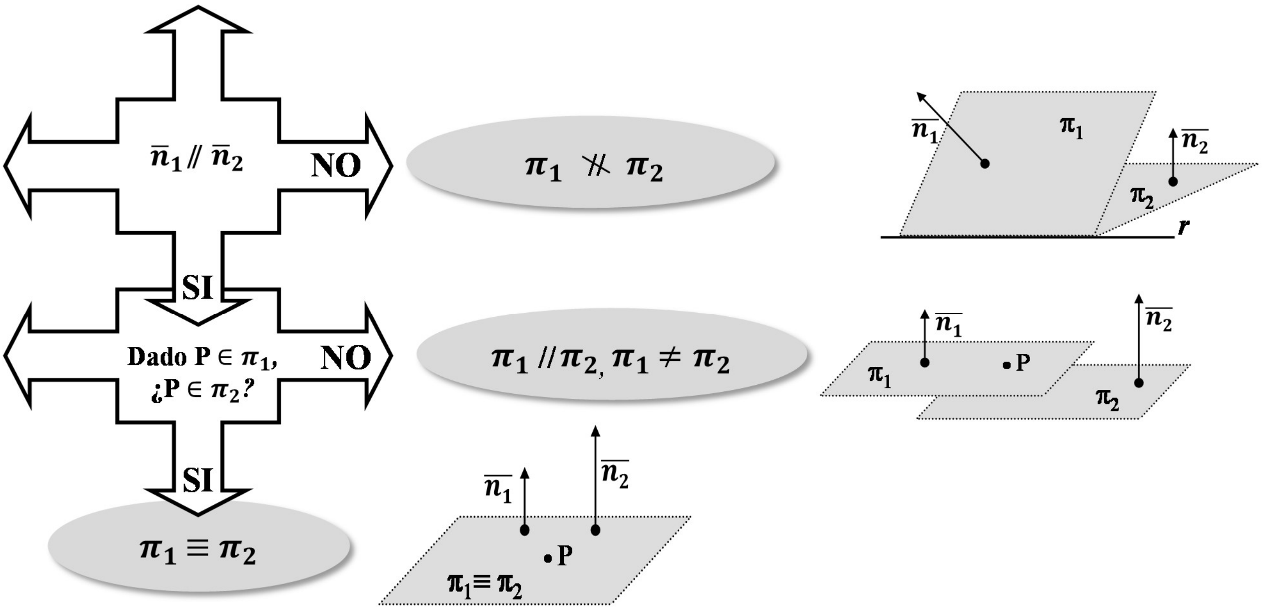
- Relación entre dos planos

Sean π_1 y π_2 dos planos dados por sus ecuaciones generales.

$\pi_1 :\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0; \quad \bar{n}_1 = (a_1 ; b_1; c_1) \perp \pi_1$

$\pi_2 :\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0; \quad \bar{n}_2 = (a_2 ; b_2 ; c_2) \perp \pi_2$

- una condición necesaria pero no suficiente para que dos planos coincidan es que los vectores de dirección sean paralelos. Luego, partimos de allí para analizar la relación :



<u>Conclusiones</u>: $\pi_1 // \pi_2$ ó $\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{n}}_1=(a_1;b_1;c_1) // \bar{\mathbf{n}}_2=(a_2;b_2;c_2) \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1} = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_1} = \frac{\boldsymbol{c}_2}{\boldsymbol{c}_1} = \alpha$

Al igual que vimos para la ecuación general de la recta en el plano; dado $P \in \pi_1$, $P \in \pi_2 \Leftrightarrow d_2 / d_1 = \alpha$. Luego , resumiendo:

$$\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\boldsymbol{d}_2}{\boldsymbol{d}_1} \quad (a_1 \neq 0; b_1 \neq 0; c_1 \neq 0; d_1 \neq 0)$$

$$\pi_1 // \pi_2 \text{ y } \pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \neq \frac{\boldsymbol{d}_2}{\boldsymbol{d}_1}$$

$$\pi_1 \nparallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1} \text{ ó } \frac{\boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_1} \neq \frac{\boldsymbol{c}_2}{\boldsymbol{c}_1} \text{ ó } \frac{\boldsymbol{c}_2}{\boldsymbol{c}_1} \neq \frac{\boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_1}$$

7.1.1 Intersección de planos

Dados dos planos π_1 y π_2, los mismos pueden ser paralelos, coincidentes o cortarse según una recta. Para decidir esto tenemos que resolver un sistema de ecuaciones.

Sean π_1 y π_2 dos planos dados por sus ecuaciones generales.

π_1 : $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$; $\overline{\mathbf{n_1}}=(a_1 ; b_1; c_1) \perp \pi_1$

π_2 : $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$; $\overline{\mathbf{n_2}}=(a_2 ; b_2 ; c_2) \perp \pi_2$

$P(x;y;z) \in \pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow$ satisfice el Sistema **S**: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}$

Tenemos entonces que:

- $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\boldsymbol{d}_2}{\boldsymbol{d}_1} \Rightarrow \pi_1 \equiv \pi_2 \Rightarrow$ **S tiene infinitas soluciones: S** = π_1

- $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \neq \frac{\boldsymbol{d}_2}{\boldsymbol{d}_1}$ $\Rightarrow \pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$ y $\pi_1 \neq \pi_2$ $\Rightarrow$ **S** no tiene solución: **S** = ∅

- En cualquier otro caso, $\pi_1 \nparallel \pi_2$ $\Rightarrow$ **S** tiene infinitas soluciones pues es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas y las infinitas soluciones son los puntos de la recta que determinan π_1 y π_2 al cortarse. O sea: **S** = $\pi_1 \cap \pi_2 = \boldsymbol{r}$.

P(*x;y;z*) ∈ $\pi_1 \cap \pi_2 = \boldsymbol{r} \Leftrightarrow$ satisface el Sistema **S**: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}$

¿Cómo obtenemos un punto **P**∈***r***? Damos valor a una de las variables (por ejemplo hacemos $z=z^*$) y luego resolvemos el sistema 2×2 que queda determinado. Obtenemos así $x=x^*$; $y=y^*$. Finalmente, **P**($x^*;y^*;z^*$).

⌦ ***La recta en el espacio como intersección de planos***

Al plantearnos la intersecciñon de planos hemos descubierto otra forma de dar una recta en el espacio: *"como intersección de dos planos no paralelos"*

$$\boldsymbol{r}\text{:} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases}$$

Al respecto observamos que si tenemos la recta en la *forma simétrica,*

$$\boldsymbol{r}\text{:} \quad \frac{x-x_0}{u_x} = \frac{y-y_0}{u_y} = \frac{z-z_0}{u_z};$$

si expresamos estas igualdades como:

$$\frac{x-x_0}{u_x} = \frac{y-y_0}{u_y} \quad \text{y} \quad \frac{y-y_0}{u_y} = \frac{z-z_0}{u_z}$$

tenemos entonces la recta dada como interesección de dos planos proyectantes:

$$\boldsymbol{r}\text{:} \begin{cases} \frac{x-x_0}{u_x} = \frac{y-y_0}{u_y} & (\pi_{xy}) \\ \frac{y-y_0}{u_y} = \frac{z-z_0}{u_z} & (\pi_{yz}) \end{cases}$$

7.1.2. Intersección de recta y plano

Dados una recta ***r*** en el espacio y un plano π; ***r*** puede ser o no ser paralela a π. Si no es paralela entonces corta a π en un único punto, y si es paralela, puede ser que esté contenida en el plano o que no lo esté. Para decidir esto tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación en el plano.

- Sean $\boldsymbol{r}$ y π, dada $\boldsymbol{r}$ por sus ecuaciones paramétricas y π por su ecuación general:

$$\boldsymbol{r}\text{:} \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} ;\ \lambda \in R; \qquad \pi\text{: } a\,x + b\,y + c\,z + d = 0; \qquad \left| \begin{array}{l} P_0(x_0; y_0; z_0) \in r \\ \bar{u} = (u_1; u_2; u_3) \parallel r \\ \bar{n} = (a; b; c) \perp \pi \end{array} \right.$$

$$P(x;y;z) \in r \cap \pi \Leftrightarrow \text{satisface el Sistema } \mathbf{S}\text{: } \begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \\ a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \end{cases}$$

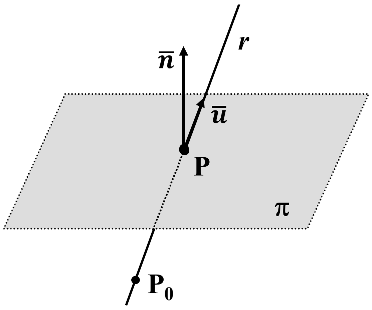
- Reeplazando *x, y, z* en la última ecuación de **S** por los valores dados en las tres primeras, llegamos a la siguiente ecuación en λ:

$a\,(x_0 + \lambda u_1) + b\,(y_0 + \lambda u_2) + c\,(z_0 + \lambda u_3) + d = \lambda(a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3) + a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d = 0$

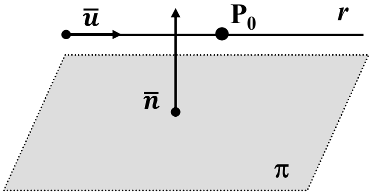
Luego, si llamamos $\mathbf{A} = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d$ y $\mathbf{B} = a\,u_1 + b\,u_2 + c\,u_3 = \bar{n}.\bar{u}$; la solución del sistema depende de la solución de la ecuación resultante en λ:

$$\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{B}$$

Entonces, tenemos las siguientes posibilidades:



(I) $\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \bar{n}.\bar{u} \neq 0$
$\Rightarrow \bar{n}$ y $\bar{u}$ no son $\perp$
$\Rightarrow \boldsymbol{r}$ y π se cortan en un único punto
$\Rightarrow \mathbf{S} = \{\mathbf{P}(x^*;y^*;z^*)\}$



(II) $\mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \bar{n}.\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{n} \perp \bar{u}$

El resultado en este caso depende de A:

(II-a) $\mathbf{A} \neq \mathbf{0} \Rightarrow a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d \neq 0 \Rightarrow P_0(x_0;y_0;z_0) \notin \pi \Rightarrow \boldsymbol{r} \,//\, \pi \Rightarrow \mathbf{S} = \varnothing$.

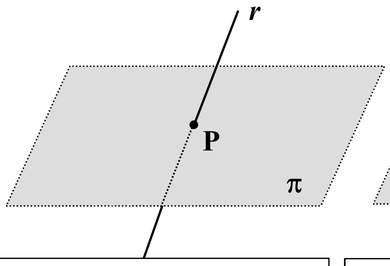
(II-b) $\mathbf{A} = \mathbf{0} \Rightarrow a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d = 0 \Rightarrow P_0(x_0;y_0;z_0) \in \pi \Rightarrow \boldsymbol{r} \subset \pi \Rightarrow \mathbf{S} = \boldsymbol{r}$.

<u>Resumiendo</u>: al resolver **A** = λ **B** se pueden dar tres situaciones:

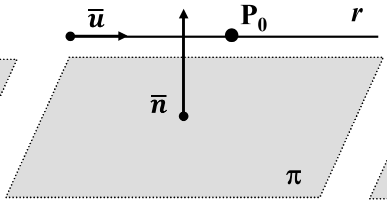
(I) $\mathbf{B} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \lambda^* = \mathbf{A/B} \Rightarrow \mathbf{S} = \{\mathbf{P}(x^*;y^*;z^*) / x^* = x_0 + \lambda^* u_1;\ y^* = y_0 + \lambda^* u_2;\ z^* = z_0 + \lambda^* u_3\}$.

(II-a) $\mathbf{B} = \mathbf{0};\ \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{0}$ ($\nexists\lambda \rightarrow$ incompatible) $\Rightarrow \mathbf{S} = \varnothing$.

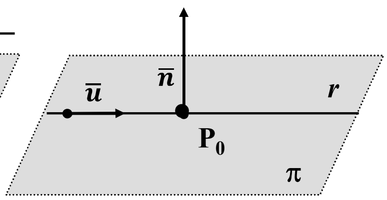
(II-b) $\mathbf{B} = \mathbf{0};\ \mathbf{A} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{0}$ (válida $\forall\lambda \rightarrow$ infinitas soluciones) $\Rightarrow \mathbf{S} = \boldsymbol{r}$.



B ≠ 0
SISTEMA COMPATIBLE
(a solución única)



B = 0; A ≠ 0
SISTEMA INCOMPATIBLE
(no tiene solución)



B = 0; A = 0
SISTEMA COMPATIBLE
INDETERMINADO (∞ soluciones)

7.1.3 Intersección de tres planos

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi_1)\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2)\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ \pi_3)\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{array}} \rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \rightarrow \left[\begin{array}{l} 1\bullet \rightarrow \Phi\ (vacío) \\ 2\bullet \rightarrow un\ \ punto:\ P \\ 3\bullet \rightarrow una\ \ recta:\ r \\ 4\bullet \rightarrow un\ \ plano:\ \pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3 \end{array} \right.$$

Para decidir esto tenemos que resolver el siguiente ***sistema de ecuaciones***; o sea:

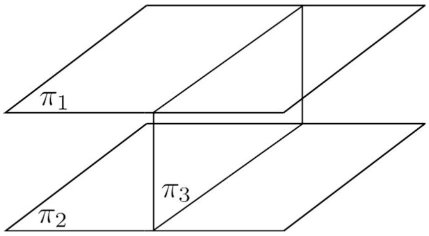
$$\mathbf{P}(x;\, y;\, z) \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \Leftrightarrow \mathbf{P} \text{ satisface } \mathbf{S}: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

1 ● $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2} \Rightarrow [\,\pi_1 /\!/ \pi_2 \text{ y } \pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing\,] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$

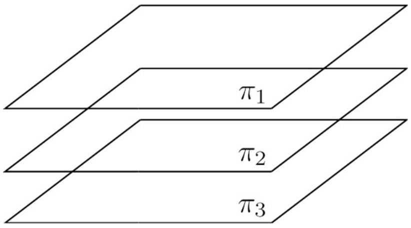
ó; $\dfrac{a_2}{a_3} = \dfrac{b_2}{b_3} = \dfrac{c_2}{c_3} \neq \dfrac{d_2}{d_3} \Rightarrow [\,\pi_2 /\!/ \pi_3 \text{ y } \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing\,] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$

ó; $\dfrac{a_1}{a_3} = \dfrac{b_1}{b_3} = \dfrac{c_2}{c_3} \neq \dfrac{d_1}{d_3} \Rightarrow [\,\pi_1 /\!/ \pi_3 \text{ y } \pi_1 \cap \pi_3 = \varnothing\,] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$

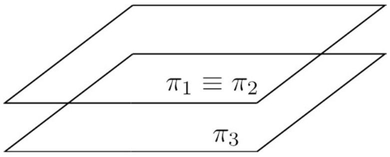
ó; <u>No paralelos</u>, pero $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$



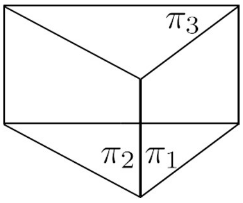
$[\,\pi_1 /\!/ \pi_2\,] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$



$[\,\pi_1 /\!/ \pi_2 /\!/ \pi_3\,] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$

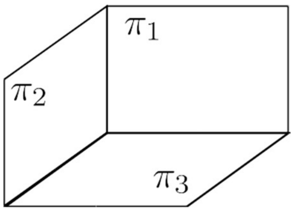


$[\,\pi_1 /\!/ \pi_3 \text{ y } \pi_1 \equiv \pi_2\,] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$

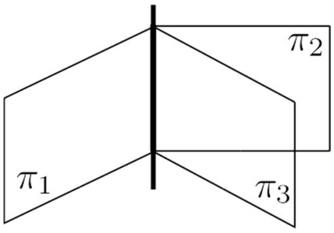


***<u>No paralelos</u>**, pero* $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$

2 ● **S** tiene solución única: **S** = { **P**(x^* , y^* , z^*)}



3 ● **S** tiene infinitas soluciones: **S** = recta ***r***



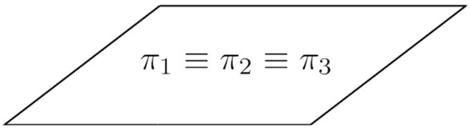
4 ●

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2} \Rightarrow \pi_1 \equiv \pi_2 \\[2ex] \dfrac{a_2}{a_3}=\dfrac{b_2}{b_3}=\dfrac{c_2}{c_3}=\dfrac{d_2}{d_3} \Rightarrow \pi_2 \equiv \pi_3 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$ (*se trata de* ***un plano***)

$\Rightarrow$ **S:** ∞′s **soluciones** (*el plano*)

$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1$



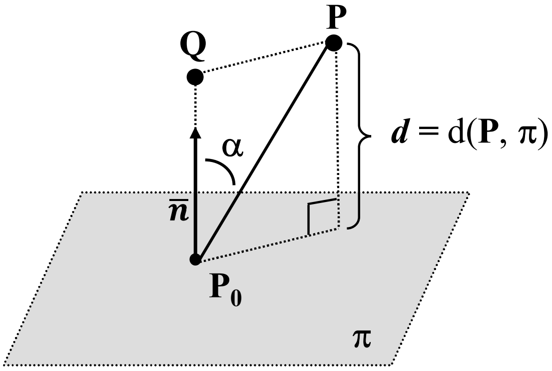
7.1.4 Distancias

- **Distancia de un punto a un plano**

Dados **P(*x_1,y_1,z_1*)** punto del espacio y el plano π) $a\ x + b\ y + c\ z = 0$, determinamos una fórmula para hallar la distancia de **P** a π; ***d*** = d (**P**, π).

Sea **P₀(*x_0,y_0,z_0*)** un punto cualquiera del plano y $\overline{\boldsymbol{P_0P}}$ el vector que determina con **P**.

En la figura vemos que ***d*** es igual a la medida del segmento $\overline{\boldsymbol{P_0Q}}$; o sea, el valor absoluto de la proyección de $\overline{\boldsymbol{P_0P}}$ sobre el vector normal al plano, $\bar{\boldsymbol{n}} = (a,\ b,\ c)$. O sea:



$$d(\mathbf{P},\pi) = \left|\, \text{proy}_{\bar{n}}\, \overline{P_0P} \,\right| = \left|\, \left|\overline{P_0P}\right| \cdot \cos\alpha \,\right| = \left|\, \left|\overline{n_0}\right| \cdot \left|\overline{P_0P}\right| \cos\alpha \,\right| = \left|\, \overline{n_0} \cdot \overline{P_0P} \,\right|$$

Teniendo en cuenta que $\overline{n_0} = \dfrac{\bar{n}}{\left|\bar{n}\right|}$; tenemos que: $d(\mathbf{P},\pi) = \dfrac{\left|\, \bar{n} \cdot \overline{P_0P} \,\right|}{\left|\bar{n}\right|}$

Realizando el producto escalar , $d(\mathbf{P}, \pi) = \dfrac{\left| \bar{n} \cdot \overline{P_o P} \right|}{\left| \bar{n} \right|} = \left| \dfrac{(a,b,c).(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| =$

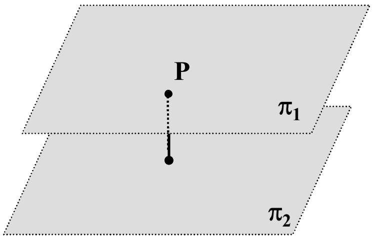
$$= \left| \frac{a(x_1 - x_0) + b\ (y_1 - y_0) + c\ (z_1 - z_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right| = \left| \frac{a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 - (a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$

Puesto que $P_o\ (x_o\ ,\ y_o)$ pertenece al plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta, así $a.\ x_o + b.\ y_o + c.z_0 + d = 0$; o sea, $d = -\ (a.\ x_o + b.\ y_o + c.\ z_o)$. Luego:

$$\mathbf{P}\ (x_1, y_1, z_1) \rightarrow d\ (\mathbf{P}, \pi) = \left| \frac{a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right|$$

- **Distancia entre dos planos paralelos**

Para hallar la distancia entre dos planos paralelos, basta buscar un punto de uno de los planos y calcular la su distancia al otro plano.



Así: $d\ (\pi_1; \pi_2) = d(\mathbf{P}; \pi_2)$, tal que $\mathbf{P} \in \pi_1$

Ejemplo: hallar la distancia entre $\pi_1)\ 2x + y + 2z - 4 = 0$ y $\pi_2)\ 2x + y + 2z - 10 = 0$

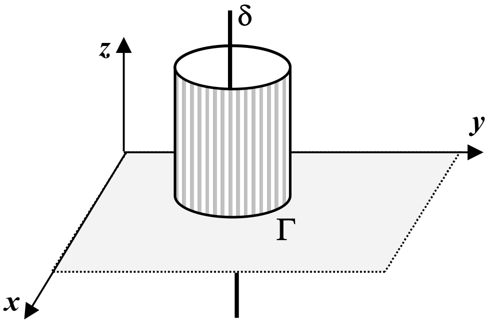
$P(x;y;z) \in \pi_1 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 4 = 0 \therefore$ Si $y = z = 0$, entonces $x = 2$ y P(2, 0, 0)

$$d\ (\pi_1; \pi_2) = d(\mathbf{P}; \pi_2) = \left| \frac{2.2 + 1.0 + 2.0 - 10)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \right| = \left| \frac{-6}{\sqrt{9}} \right| = 2$$

7.2 Superficie Cilíndrica

Una SUPERFICIE CILÍNDRICA es una superficie conformada por rectas paralelas, denominadas generatrices (δ), que contienen los puntos de una curva plana Γ, denominada directriz del cilindro. En particular estudiaremos las superficies cilíndricas generadas por una recta δ paralela a alguno de los ejes coordenados, que se desplaza apoyándose en una curva Γ contenida en un plano coordenado.

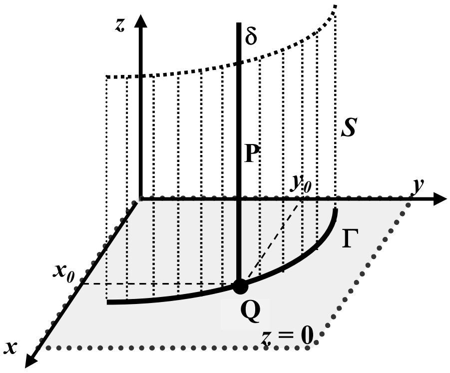
δ se llama **generatriz** de la superficie cilíndrica
Γ se llama **directriz** de la superficie cilíndrica



Ejemplo:

Un ejemplo clásico es el **cilindro circular recto**, superficie cuya **directriz** (Γ) es una circunferencia en un plano coordenado y cuya **generatriz** (δ) es una recta perpendicular a dicho plano.

☒ Consideraremos el problema de obtener la **ecuación de una superficie cilíndrica**. Para ello tomaremos δ perpendicular plano *xy* (o paralela al eje *z*) y Γ sobre el plano *xy.*



δ // eje z ;

Γ: $y = f(x)$; $z = 0$ (#)

S: *¿¿ecuación de la superficie cilíndrica??*

P $(x_0; y_0; z_0) \in$ S $\Rightarrow$ **P** $(x_0; y_0; z_0) \in \delta$.

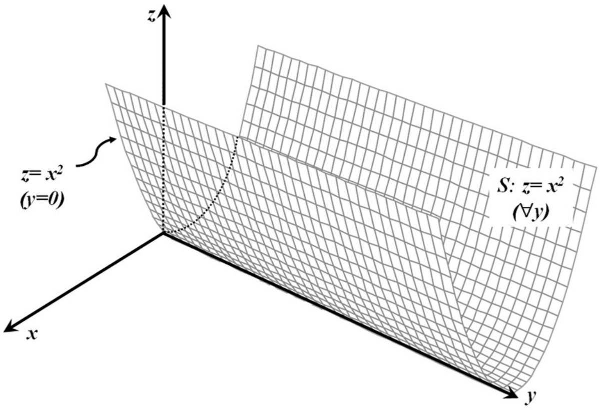
Sea **Q** la proyección de **P** sobre el plano π_{xy} (z=0). Luego, **Q(x₀; y₀;0)** pues $\delta \perp \pi_{xy}$ y $\mathbf{Q} \in \pi_{xy}$. Además, del gráfico vemos que $\delta \cap \Gamma$ = **Q(x₀; y₀;0)** $\Rightarrow$ **Q(x₀; y₀;0)** $\in \Gamma$.

Finalmente, **Q(x₀; y₀;0)** $\in \Gamma \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ por ((#))

Luego: si P$(x_0; y_0; z_0) \in$ **S** entonces $y_0 = f(x_0)$; o sea, x_0 e y_0 verifican la ecuación de Γ independientemente del valor de z.

O sea; P$(x; y; z) \in$ **S** $\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ $(\forall z)$ → **ECUACIÓN de la SUPERFICIE CILÍNDRICA**

Luego; $y = f(x)$ $(\forall z)$ en el espacio tridimensional es la ecuación de una superficie, y su gráfica es una superficie cilíndrica con generatriz // ***eje z*** y directriz $y = f(x)$.



Conclusión: si se trabaja en $\mathbf{R}^3$, la gráfica de una ecuación que tenga a lo sumo dos de las tres variables, es una superficie cilíndrica con generatriz paralela al eje asociado de la variable que falte.

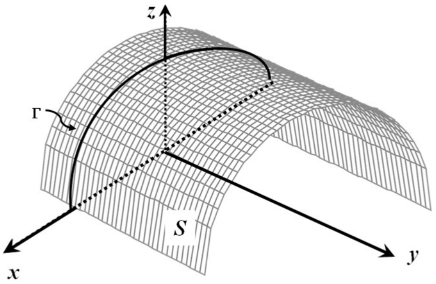
Ejemplo: $z = x^2$ [$z = f(x)$, $\forall y$ → superficie cilíndrica con generatriz // eje y].

NOTA: cuando se trabaja con superficies cilíndricas es importante distinguir la superficie de la curva directriz de la misma.

$y = f(x)$; $\forall z$ ➔ ecuación de la superficie **S**

$y = f(x)$; $z = 0$ ➔ ecuación de la directriz Γ

☒ Cilindro proyectante sobre el plano *xz*



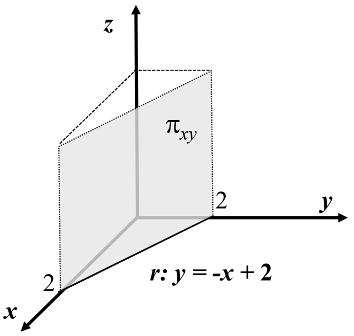
Γ: $z = \sqrt{4 - x^2}$; $y = 0$ (directriz)

S: $z = \sqrt{4 - x^2}$; $\forall y$

⌦ Planos proyectantes

Entre las superficies cilíndricas de mayor interés encontramos los ***planos proyectantes***. Estos planos se obtienen cuando la directriz es *una recta*. Así tenemos:

- Plano proyectante en ***xy*** (π_{xy})

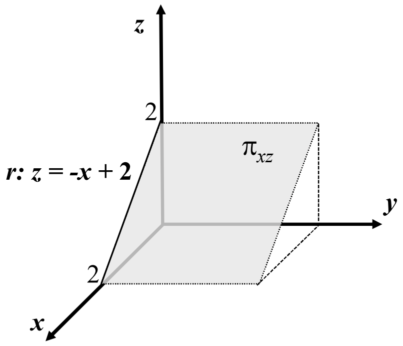


Ejemplo:

r: $\boldsymbol{y = -x + 2}$; $z = 0$ (directriz)

π_{xy}: $\boldsymbol{y = -x + 2}$; $\forall z$ (plano proyectante)

- Plano proyectante en ***xz*** (π_{xz})

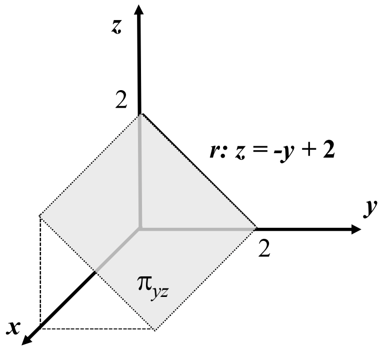


Ejemplo:

r: $\boldsymbol{z = -x + 2}$; $y = 0$ (directriz)

π_{xz}: $\boldsymbol{z = -x + 2}$; $\forall y$ (plano proyectante)

- Plano proyectante en ***yz*** (π_{yz})



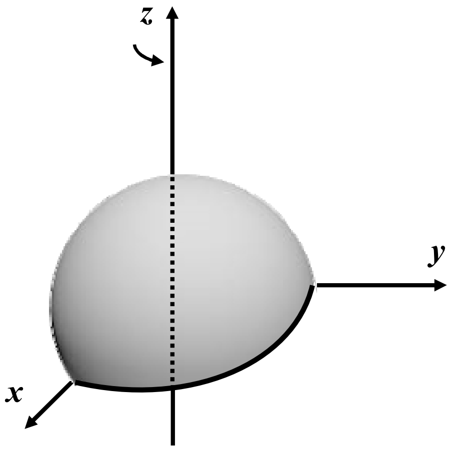
Ejemplo:

r: $\boldsymbol{z = -y + 2}$; $x = 0$ (directriz)

π_{yz}: $\boldsymbol{z = -y+ 2}$; $\forall x$ (plano proyectante)

7.3 Superficie de Revolución

Una SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN, es la obtenida al hacer girar una curva plana alrededor de una recta fija que esté en el plano de la curva . La recta fija se llama "eje de revolución" (no estudiamos estas superficies).



Observación: una misma superficie puede obtenerse de distintas formas. Por ejemplo la superficie esférica ya vista puede también obtenerse como una SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN haciendo girar una semicircunferencia alrededor del eje *z*.

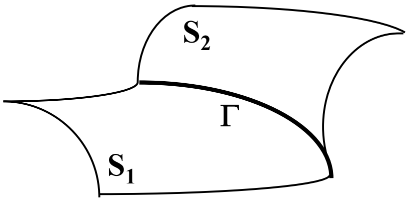
7.4 Curvas en el espacio (como intersección de superficies)

En el capítulo anterior se presentó el concepto de **CURVA EN $\mathbf{R^3}$** (pág. 391). Ahora mostramos como en el espacio existe otra forma de dar la misma recta: como intersección de dos planos, o sea de dos superficies, por ejemplo,

$$r) \begin{cases} x - 3 = (y - 2)/4 & (\pi_1) \\ x - 3 = (z - 1)/(-5) & (\pi_2) \end{cases}$$

⌦ Esta idea se puede generalizar y decir que otra forma de dar curvas en el espacio es como <u>intersección de dos superficies</u>; es decir:

$$\Gamma) \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 & ; (S_1) \\ F_2(x,y,z) = 0 & ; (S_2) \end{cases}$$



Si se realiza una combinación lineal entre las ecuaciones que definen a **S_1** y **S_2**, se obtiene entonces una nueva ecuación en tres variables:

$$\boxed{k_1 F_1(x,y,z) + k_2 F_2(x,y,z) = 0}, \quad k_1 ; k_2 \in R$$

$$\Downarrow$$

$$G(x,y,z) = 0 \quad (S)$$

$G(x,y,z) = 0$ es la ecuación de una superficie **S**, en general distinta de **S_1** y **S_2**.

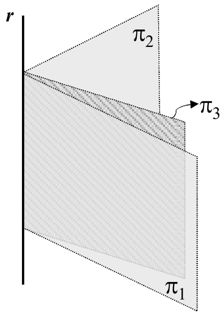
$G(x,y,z) = k_1 F_1(x,y,z) + k_2 F_2(x,y,z) = 0$ ➔ ecuación de otra superficie **S**.

Resulta simple de comprobar que la curva Γ está también <u>contenida</u> en **S**:

$$P_0 \in \Gamma \Rightarrow F_1(P_0) = 0 \text{ y } F_2(P_0) = 0 \Rightarrow G(P_0) = 0 \Rightarrow P_0 \in S$$

$$\boxed{\Rightarrow \Gamma \subset S}$$

Luego, la curva Γ se puede obtener también como <u>intersección</u> de cualquiera de las superficies **S_1** o **S_2** con **S**.
O sea que Γ se puede representar a través de sistemas "equivalentes" al original.



Ejemplo:

$$r)\ \begin{cases} 3x + y + z = 8 & (\pi_1) \\ x + y - z = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

$$\pi)\ k_1\ (3x + y + z - 8) + k_2\ (x + y - z) = 0$$

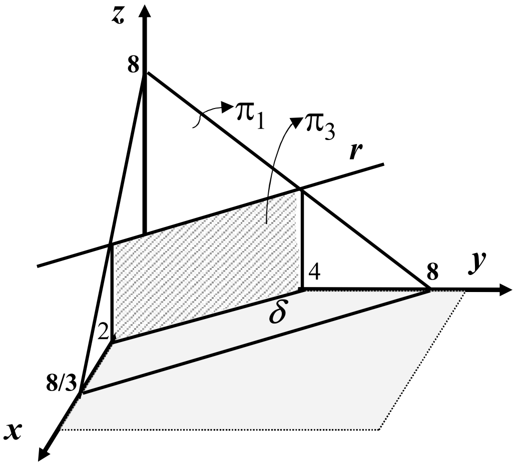
(familia de planos)

Si se elige $k_1 = k_2 = 1$ se obtiene un plano de la familia de planos. Lo llamamos π_3:

$\pi_3)$ $4x + 2y - 8 = 0$ **(plano proyectante sobre el π_{xy})**

Luego: $r)\ \begin{cases} 3x + y + z = 8 & (\pi_1) \\ 4x + 2y = 8 & (\pi_3) \end{cases}$

Pero ahora el hecho que π_3 sea un **plano proyectante** permite encontrar la **proyección de *r* sobre el plano *xy***, ya que esta proyección no es otra cosa que la "**traza del plano π_3 sobre el *xy***".



δ: proyección de ***r*** sobre el ***xy***

$$\boxed{\delta:\ 4x + 2y = 8\ ;\ z = 0}$$

⌧ Esta posibilidad de escribir una misma curva Γ como intersección de distintas superficies resulta importante a la hora de buscar la *curva proyección* de Γ sobre un plano coordenado.

Esta tarea resulta relativamente simple si una de las superficies que determina la curva Γ es una *superficie cilíndrica* (un plano proyectante es una superficie cilíndrica).

Si no fuera así, un método conveniente para hallar la *curva proyección* de Γ sobre un plano coordenado es:

→ buscar un sistema equivalente al que define Γ, en el cual al menos una de las superficies sea una superficie cilíndrica proyectante sobre el plano en cuestión.

→ para obtener un sistema equivalente al dado reemplazar una de las superficies por una conveniente combinación lineal de las dadas.

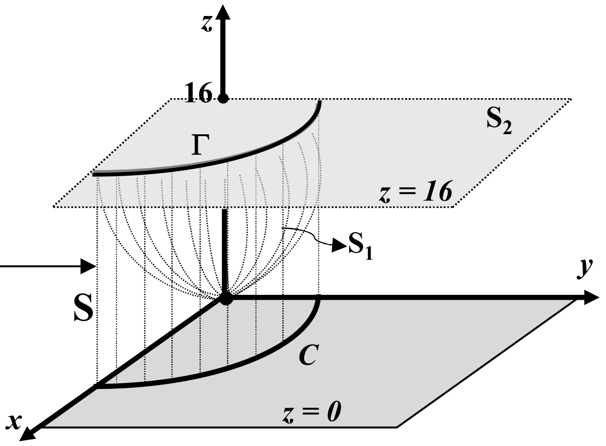
→ Una combinación lineal conveniente será aquella que permita eliminar al menos una de las variables.

Ejemplo:

$$\Gamma \begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 & (\mathbf{S_1}) \\ z - 16 = 0 & (\mathbf{S_2}) \end{cases} \qquad \mathbf{S} \approx \boxed{\mathbf{S_2}} - \mathbf{S_1} \qquad \Gamma \begin{cases} z - x^2 - y^2 = 0 & (\mathbf{S_1}) \\ x^2 + y^2 = 16 & (\mathbf{S}) \end{cases}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 16 \ ; \forall z}$$

superficie cilíndrica



$$\boxed{\mathbf{C} = \text{proy } \Gamma /_{xy} : \ x^2 + y^2 = 16; \quad z = 0}$$

7.5 Actividades

7.5.1 El plano

El **PLANO** es otro objeto de la Geometría Analítica para cuya representación se acude a ***"una ecuación"*** y cuyos puntos constituyen el ***"conjunto solución "*** **(S)** de la misma.
Asimismo para resolver el problema de la intersección de dos o más planos se acude a un ***"sistema de ecuaciones"*** **(2x3 ; 3x3 ; 3x4; …)**.
En función de ello, al final de esta práctica se adjunta el **Apéndice D** donde se desarrollan algunas ideas básicas acerca de los **"Sistemas de Ecuaciones"**.

PLANO: **π = { P(x;y;z) / ax+by+cz+d=0 }**

⊳ **a x + by + cz + d = 0** es una **"ecuación lineal con tres incógnitas: x; y; z "**.

⊳ **n** = (cantidad incógnitas) = 3; **m** = (cantidad ecuaciones) = **1**. o sea, **m<n** lo cual implica que la ecuación tiene "variables libres"; o sea, "infinitas soluciones" (→S infinito)

⊳ Si **m<n** y **vl** = **<u>cantidad de variables libres</u>** entonces **vl ≥ n- m**, en particular, si **m=1**, **vl=n-1**.

⊳ **¿Cuántas "variables libres" presenta la ecuación del PLANO?**
n=3 ⇒ vl=3-1=2 ⇒ la ecuación del plano presenta **2 variables libres**.

1) Determinación de puntos de un PLANO.

Para los **PLANOS** dados a continuación se pide escribir el vector normal al mismo. La presencia de **a**, **b** y/ó **c** en la ecuación significa que **a≠0**, **b≠0** y **c≠0**. La existencia de ceros en el vector normal determina que el plano tenga una posición particular respecto a los *planos o ejes coordenados*. En cada caso que esto pase se pide graficar el plano, señalando cual es la particularidad que presenta. Luego, escribir el conjunto solución **(S)** y dar **<u>un punto particular</u>** de cada plano.

π_1) *ax+by+cz+d=0 ;*	$\bar{n}$=(…. ; …. ; ….);	$P_1 \in \pi_1$??
π_2) *by+cz+d=0 ;*	$\bar{n}$=(…. ; …. ; ….);	$P_2 \in \pi_2$??
π_3) *ax+cz+d=0 ;*	$\bar{n}$=(…. ; …. ; ….);	$P_3 \in \pi_3$??
π_4) *ax+by+d=0 ;*	$\bar{n}$=(…. ; …. ; ….);	$P_4 \in \pi_4$??
π_5) *ax+ d=0 ;*	$\bar{n}$=(…. ; …. ; ….);	$P_5 \in \pi_5$??
π_6) *by+ d=0 ;*	$\bar{n}$=(…. ; …. ; ….);	$P_6 \in \pi_6$??
π_7) *cz+ d=0 ;*	$\bar{n}$=(…. ; …. ; ….);	$P_7 \in \pi_7$??

⋙ **<u>Solución</u>: S "infinito" ⊆ ℝ³**

$\pi_1 \rightarrow S_1$ = { P(x;y;z) / $P_1 \in \pi_1$ } = $\{\left(x; y; \frac{-ax-by-d}{c}\right)$/ x∈ℝ ∧ y∈ℝ }

$\pi_2 \rightarrow S_2$ = { P(x;y;z) / $P_2 \in \pi_2$ } = $\{\left(x; y; \frac{-by-d}{c}\right)$/ x∈ℝ ∧ y∈ℝ }

$\pi_5 \rightarrow S_5$ = { P(x;y;z) / $P_5 \in \pi_5$ } = $\{\left(\frac{-d}{a}; y; z\right)$/ y∈ℝ ∧ z∈ℝ }

* COMPLETAR PARA LOS OTROS PLANOS.
* Dar un punto de cada plano.

2) Dados los planos, π_1) x=0, π_2) y=0 y π_3) x+y =3 , se pide:
a) Dar tres puntos de π_1 e indicar **VoF**: **$\pi_1 = \pi_{yz}$ (plano yz)**.
b) Dar tres puntos de π_2 e indicar quien es π_2.
c) Analizar si los siguientes puntos pertenecen a π_3:
P(1;2;0); Q(1;2; 3); R(0;0;3); S(0;3;0); T(3;0;0).
d) π_3 es un plano *"proyectante"* sobre un plano coordenado: ¿sobre cual?

d_1) ¿Cuándo un plano es proyectante sobre otro? ¿Cómo lo detecta? Graficar $\boldsymbol{\pi_3}$.

d_2) Hallar las coordenadas de los siguientes puntos si se sabe que pertenecen a $\boldsymbol{\pi_3}$. Graficar todos los puntos en un mismo sistema que graficó $\boldsymbol{\pi_3}$.

$\mathbf{P_1(3; y_1; 0)}$; $\mathbf{P_2(3; y_3; 2)}$; $\mathbf{P_3(3; y_3; 4)}$; $\mathbf{P_4(3; y_4; -1)}$;
$\mathbf{Q_1(x_1; 3; 0)}$; $\mathbf{Q_2(x_2; 3; 2)}$; $\mathbf{Q_3(x_3; 3; 4)}$; $\mathbf{Q_4(x_4; 3; -1)}$;
$\mathbf{R_x(x; 3-x; 0)}$ para **x= 0; 1; 2; 3**

d_3) Dar tres puntos de $\boldsymbol{\pi_3}$ distintos a los hallados hasta acá. Graficarlos en $\boldsymbol{\pi_3}$.

3)

a) Dado el plano $\boldsymbol{\pi_1}$**)** 5x+y+3z-15=0 se pide:

i) Verificar si los puntos **P(-1; 2; 6)**, **Q(3; -4; 3)** y **O(0; 0; 0)** pertenecen al mismo.

ii) Dar, si existen, los puntos de intersección con los ejes coordenados.

iii) Dar, si existen, tres puntos pertenecientes a $\boldsymbol{\pi_1 \cap}$**plano xy** (ídem para **yz** y **xz**).

iv) Dar tres puntos pertenecientes a $\boldsymbol{\pi_1}$, que no pertenezcan a los planos coordenados.

v) Hallar **k**, si existe **k** tal que $\mathbf{A(k; 0; 2)\in\pi_1}$.

vi) Dar tres vectores perpendiculares a $\boldsymbol{\pi_1}$.

vii) Dar dos vectores paralelos a $\boldsymbol{\pi_1}$.

b) Ídem **(a)** con el plano $\boldsymbol{\pi_2}$**)** 2x+5y+z=0.

c) Ídem **(a)** con el plano $\boldsymbol{\pi_3}$**)** y+4z-8=0.

4) Hallar la ecuación de un plano conociendo un vector normal y un punto de paso en los siguientes casos:

a) $\bar{n}=(3; 5; 8)$; $P(2; 4; -3)$
b) $\bar{n}=(7; 2; -5)$; $P(0; 4; 3)$
c) $\bar{n}=(0; 5; 8)$; $P(2; 3; 5)$
d) $\bar{n}=(3; 0; 0)$; $P(5; 4; 1)$
e) $\bar{n}=(0; 5; 0)$; $P(2; 0; 1)$
f) $\bar{n}=(0; 0; -2)$; $P(1; 5; 0)$
g) $\bar{n}=(-3; 0; 8)$; $P(0; 4; 0)$
h) $\bar{n}=(1; -2; 3)$; $P(0; 0; 0)$
i) $\bar{n}=(0; 0; 1)$; $P(0; 0; 0)$
j) $\bar{n}=(4; 0; 0)$; $P(0; 2; 0)$

5) Para cada uno de los planos que se dan a continuación, se pide:

a) La intersección del mismo con los ejes coordenados.

b) Las ecuaciones de las trazas del plano sobre cada una de los planos coordenados. Graficar las rectas obtenidas.

c) Graficar el plan (su porción ubicada en el primer octante):

i) $\boldsymbol{\pi_1}$**)** 2x+3y+4z-24=0; ***ii)*** $\boldsymbol{\pi_2}$**)** 5x+20=0
iii) $\boldsymbol{\pi_3}$**)** z=0; ***iv)*** $\boldsymbol{\pi_4}$**)** 5x-2y=10
v) $\boldsymbol{\pi_5}$**)** y=4; ***vi)*** $\boldsymbol{\pi_6}$**)** 3y-4z=12

6) Dar la ecuación de cada uno de los siguientes planos:
a) Pasa por el punto **P(5; -1; 3)** y es normal al vector $\overline{n}$=(1; -4; 2).
b) Es paralelo al plano coordenado **xy** y pasa por el punto **Q(-2; 4; 3)**.
c) Es paralelos al plano coordenada **xz** y pasa por el punto **R(1; 1; -1)**.
d) Es perpendicular al eje **x** y pasa por si punto **A(0; -4; 5)**.
e) Contiene al eje **y** y es normal el vector **$\overline{w}$=(3; 0; -4)**.
f) Pasa por los puntos **A(-3; 2; 4)**, **B(1; 5; 7)** y **C(2; 2; 1)**.
g) Es paralelo al segundo eje coordenado y contiene a los puntos **P(2; 3; -5)** y **Q(1; 0; 4)**.
h) Es paralelo a los vectores **$\overline{u}$=(3; 1; 1)** y **$\overline{v}$=(-l; 2; 0)** y pasa por el punto **B(1; -1; 0)**
i) Es paralelo al plano **π_1)** 3x-y+z-6=0 y pasa por el punto **R(3; -3; 2)**.
j) Pasa por los puntos **A(2; -1; 6)** y **B(1; -2; 4)** y es perpendicular a **π_2)** x-2y-2z+9=0.
k) Es perpendicular al segmento de recta que une los puntos **P(3; 4; -1)** y **Q(5; 2; 7)** y pasa por su punto medio.
l) Pasa por el punto **P(1; 2; 0)** y es perpendicular a los planos **π_3)** -2x+y-z=2 y **π_4)** x+y-3z=4.

7) Hallar la distancia de P a π en cada uno de los siguientes casos:
a) π) *2x-5y+3z-2=0*; **P(-1; -4; 2)**
b) π) *5x-3y+15z=15*; **P(2; 3; -2)**
c) π determinado por los puntos **(1; -1; 1)**, **(4; -5; -2)** y **(-2; 1; 3)**; **P(0; 0; 0)**.

8) Determinar si los siguientes pares de planos son paralelos, coincidentes o no. Si son paralelos, hallar la distancia entre ellos.
a) **π_1)** 2x+5y-6z+8=0 y **π_2)** 6x+15y-18z-5=0
b) **π_1)** 6x-3y+2z-7=0 y **π_2)** 3x+2y-6z+28=0
c) **π_1)** 3x-5y-4z+7=0 y **π_2)** -6x+10y+8z-14=0
d) **π_1)** 2x-y+2z+9=0 y **π_2)** 4x-2y-4z-21=0
e) **π_1)** -2x-y+z=0 y **π_2)** x+2y-z=0
f) **π_1)** -x+3y-15=0 y **π_2)** 3x-9y+45=0

9) Dado el plano **π)** ***x-2y+2z+12=0*** , se pide hallar la ecuación del (o los) planos paralelos a **π** cuya distancia al origen es igual a **2**.

10) Dado el plano **π)** ***x+2y-2z+3=0*** , se pide hallar la ecuación del (o los) planos paralelos a **π** cuya distancia al punto **Q(2,1,1)** sea igual a **2**.

11) Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los planos **π_1)** 3x+4y-36=0 y **π_2)** 34+4y-12=0. Graficar los planos **π_1**, **π_2** y en el mismo sistema graficar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambos.

12) Dado el plano **π)** 2x+2y+z=4
a) Dar la ecuación de un plano paralelo a **π** que equidiste **8** unidades de **π**. Graficar ambos planos en el mismo sistema.
b) Dar la ecuación de un plano perpendicular a **π** que pase por el origen ¿Hay única solución a este problema? Graficar **π** y el plano hallado.

13) Dado el punto **P(4; 2; 4)** perteneciente al plano ***π*** y sabiendo que **P** es el pie de la perpendicular desde el origen de coordenadas a dicho plano, se pide hallar la ecuación de ***π***. Luego calcular su distancia al origen. Con los datos del problema, ¿Necesita hallar la ecuación del plano para dar su distancia al origen?

14) Sea $\overline{OP}$=**$\bar{a}$+t $\bar{b}$** con **$\bar{a}$=(0; 1; 3)**, **$\bar{b}$=(-1; 1; 3)**, **t∈ℝ** y **O(0;0;0)**, entonces:

a) Los puntos **P(x; y; z)** determinan un **"lugar geométrico"** conocido: ¿Cuál es?.

b) Mostrar que ∀**t**, **P(x; y; z)**, el extremo de $\overline{OP}$, pertenece al plano ***6x+3y+z-6=0***. **¿Qué interpretación geométrica se puede dar a este hecho?**

c) Graficar el plano y el lugar geométrico determinado por los puntos **P**.

7.5.2 El plano y la recta en el espacio

<u>RECTA en ℝ³</u> :

r={P(x;y;z) / x=x$_0$+t u$_1$; y=y$_0$+t u$_2$; z=z$_0$+t u$_3$; t∈R)

$$r)\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases}$$

⊳ **r** es la solución de un sistema **3x4**; o sea, con **4** incógnitas: **x, y, z, t**.

⊳ **n=(cantidad incógnitas)=4**; **m=(cantidad ecuaciones)=3**. O sea, **m<n** lo cual implica que el sistema tiene **"variables libres"**, o sea, **"infinitas soluciones"** (→**S infinito).**

⊳ Si **m<n** y **vl=(cantidad de variables libres)** entonces **vl≥n-m**. En este caso, **vl=n-m=1**.

⊳ Para este sistema, **¿Qué variable se toma como "libre" ?→ t**

⊳ Luego, para obtener una solución cualquiera del sistema (equivalentemente, un punto cualquiera de la recta), basta dar un **<u>valor arbitrario</u>** a **"t"**.

1) Dada **r)** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$

a) Dar tres puntos pertenecientes a **r**.

b) Determinar si los puntos **A(-1; -5; 4)**, **B(0; -3; 3)** y **C(4; 5; 2)** pertenecen a **r**.

c) Dar dos vectores paralelos a **r**.

d) Dar dos vectores perpendiculares a **r**.

2) Hallar la ecuación paramétrica, de las siguientes rectas:

a) Pasa por el punto **P(2; 0; 1)** y es paralela **$\bar{u}$=(1; 1; -2)**.

b) Pasa por el punto **Q(1; 2; 1)** y es paralela al eje **z**.

c) Pasa por el origen de coordenadas y es paralela al eje **y**.

d) Pasa por el punto **S(0; 0; 1)** y es paralela al primer eje coordenado.

e) Pasa por el punto **R(-1; 2; 0)** y es perpendicular al plano coordenado **yz**.

f) Pasa por el punto **T(2; 4; 0)** y es perpendicular al plano coordenado **xz**.

g) Pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano coordenado **xy**.

h) Contiene a los puntos **A(2; 1; -1)** y **B(1; 0; 2)**.

i) Contiene al punto **D(2; 1; -1)** y es paralela a **s)**$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

3) Dada **r)** $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta **r** con los planos coordenados. Graficarla.

4) Dar la ecuación de la recta que contiene al punto **P** y es perpendicular al plano ***π*** siendo:

a) **P(1; 1; -1)**; **π)** 2x-y+3z+1=0

b) **P(2; 0; 2)**; **π)** -x+2y-z=0

c) **P(0; 0; 0)**; **π)** 3y+z+3=0

5) Dar la ecuación dela recta que pasa por el punto **P** y es paralela a los planos $\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi_2}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $\boldsymbol{\pi_1}$**)** x+2y-z-1=0 $\boldsymbol{\pi_2}$**)** x-y+z=0 **P(1; 0; 1)**

b) $\boldsymbol{\pi_1}$**)** 2x-z-2=0 $\boldsymbol{\pi_2}$**)** 3x-y-z+2=0 **P(0; 0; 1)**

6) Hallar la ecuación de la recta que contiene al origen de coordenadas y es perpendicular al plano determinado por los puntos **A(3; 4; 2)**, **B(-1; 5; 3)** y **C(2; 1, 4)**.

▻ INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO:

▻ Dados **r** y ***π***, deseamos hallar **r∩*π***:

$$r)\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \qquad \pi)\ ax+by+cz+d=0 \qquad \left| \begin{array}{l} P_0(x_0; y_0; z_0) \in r \\ \overline{u} = (u_1; u_2; u_3) \parallel r \\ \overline{n} = (n_1; n_2; n_3) \perp \pi \end{array} \right.$$

▻ **P(x;y;z)∈r∩π** ⇔ satisface el sistema S: $\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \to E1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \to E2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \to E3 \\ ax + by + cz + d = 0 \to E4 \end{cases}$

***) S** es un sistema de **4** ecuaciones (**E1**, **E2**, **E3** y **E4**) con 4 incógnitas: **x**, **y**, **z**, **λ**.

****)** El método a usar en este caso consta de tres pasos:

<u>Paso 1</u>: En la ecuación **E4**, reemplazar **x**, **y**, **z** por los valores indicados para estas variables en las ecuaciones **El**, **E2** y **E3**.

<u>Paso 2</u>: Trabajar algebraicamente hasta que en **E4** quede una ecuación en sólo **λ** de la forma: **Aλ+B=0** (ecuación en 1 incógnita: LAMBDA)

<u>Paso 3</u>: Hallar **λ** y dar la respuesta, la cual caerá en alguno de los siguientes casos:

(I) Solución única; **(II)** Infinitas soluciones **(III)** Vacío

(I) A≠0 ⇒ **λ=B/A** (se reemplaza en **E1**, **E2 yE3**) →**r∩π=P*(x*; y*; z*)**

(II) A=0 y B=0 ⇒ **0λ=0** → vale ∀**λ** →**r ∈ π**

(III) A=0 y B≠0 ⇒ **0λ =B** →∄ **λ** →**r∩*π=ø**

7) Hallar, si existe, el punto de intersección entre la recta **r** y el plano **π** en cada caso:

a) **r)** $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ **π)** 2x-y+z+4=0

b) **r)** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ **π)** x+y-3z+2=0

c) **r)** $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$ **π)** -2x-y+z+1=0

8) Hallar, si existe, el punto de intersección entre las rectas **r** y **s**:

r) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ **s)** $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$

⊳ Distancia de un punto **P** a una recta **r** en el espacio: **d(P;r)**

Proceso para hallar **d(P;r):**

I) Hallar el plano **π** que es perpendicular a **r** y contiene al punto **P**.

II) Hallar el punto **Q=r∩C**.

III) Hallar **d(P; r)** teniendo en cuenta que **d(P;r)=d(P;Q)**.

9) Hallar la distancia del punto **P** a la recta en cada caso:

a) **r)** $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 3t \\ z = 6 - t \end{cases}$ **P(-1; 2; 2)**

b) **r)** $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ **P(1; 0; 1)**

10) Hallar la distancia entre los siguientes pares de rectas paralelas:

a) **r)** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ **s)** $\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = 3k \end{cases}$

b) **r)** $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ **s)** $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = -1 + 3k \\ z = k \end{cases}$

RECTA como intersección de DOS PLANOS (ver Apéndice D)

11) Para los planos π_1 y π_2 que se indican a continuación, se pide:
a) Analizar si son paralelos o coincidentes. Graficarlos en un mismo sistema.
b) Si no son paralelos ni coincidentes:

b₁) Hallar las **"ecuaciones paramétricas"** de la recta que determinan.
b₂) Graficar los planos y la recta en un mismo sistema.
b₃) Dar la **"ecuación simétrica"** de la recta.
b₄) Escribir la recta como intersección de otros planos, al menos uno distinto a los dados.Graficar estos planos en el mismo sistema que antes graficó la recta, verificar si su respuesta es correcta.

I) π_1) 2x+4y+z=9
π_2) x+2y+z/2=4
II) π_1) 4x+6z=12
π_2) 2x+3y+z/2=12
III) π_1) x+y+2z=8
π_2) x+y=4
IV) π_1) 2x+3z=12
π_2) 2x+3y=4

12) Para el punto **P(0;2;6)** y los planos π_1**)** 2x+2y+z=10 y π_2) x+2z=8:
a) Hallar las **"ecuaciones paramétricas"** de la recta **r=**$\pi_1 \cap \pi_2$.
b) Graficar los planos y la recta en un mismo sistema.
c) Hallar las **"ecuaciones paramétricas"** de la recta **s** , paralela a π_1 y π_2 y que pasa por **P**. Graficarla en el mismo sistema que π_1 y π_2.
d) **V ó F**, justificar: **s**‖**r**.

13) Dados los planos π_1**)** 4x+3y=12 y π_2**)** y=2:
a) Hallar las **"ecuaciones paramétricas"** de la recta **r=**$\pi_1 \cap \pi_2$.
b) Graficar los planos y la recta en un mismo sistema.
c) Demostrar que si se busca el lugar geométrico de los puntos que equidistan de π_1 y π_2, se encuentran dos planos: π_3 y π_4. Graficar π_3 y π_4 en el mismo sistema que π_1 y π_2.
d) **V ó F**, justificar: **r=**$\pi_3 \cap \pi_4$..

14) Hallar las **"ecuaciones paramétricas"** de la recta que pasa por A y es perpendicular a π. Hallar **r**$\cap\pi$. Luego, y de ser posible, hallar las **"ecuaciones simétricas"** de la recta **r** y, a partir de ellas, escribir la recta **r** como intersección de dos planos proyectantes.
a) A(1; 0; 3) π**)** 3x+2y+z=6
b) A(2; 3; 1) π**)** x=4
c) A(0; 0; 0) π**)** x+y+z=6

15) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta **r)**$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=z$ y es perpendicular al plano π**)** x+3y-z=8.

16) Hallar el punto de intersección de la recta **r)**$\begin{cases} x+2y-z-6=0 \\ 2x-y+3z+13=0 \end{cases}$ con el plano π**)** 3x-2+3z+16=0

17) Demostrar que la recta **r)** $\frac{x-2}{10}=\frac{2y-2}{11}=\frac{z-5}{7}$ está situada en el plano **π)** 3x-8y+2z-8=0.

18) Verificar que la recta **r)** $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{4}$ es paralela al plano **π)** -2x+3y-6z+7=0. Determinar la distancia de la recta al plano.

19) Hallar la intersección de cada una de las siguientes rectas con los planos coordenados;

a) **r)**$\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$ ***b)*** **s)**$\begin{cases} 5x+3z=15 \\ 2x+3z=12 \end{cases}$

20) Determinar si son paralelas u ortogonales los siguientes pares de rectas:

a) **r$_1$)**$\begin{cases} 2y+z=0 \\ 3y-4z=0 \end{cases}$ **r$_2$)**$\begin{cases} 5y-2z=8 \\ 4y+11z=44 \end{cases}$

b) **r$_1$)**$x=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ **r$_2$)**$\begin{cases} 2x+3y-8z+3=0 \\ 3x+y-5z+1=0 \end{cases}$

⊳ <u>INTERSECCIÓN de TRES PLANOS:</u> π_1, π_2 y π_3 (ver Apéndice D)

π_1) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
π_2) $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
π_3) $a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$

$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$: **I) ø (vacío) → INCOMPATIBLE**
II) P (un punto) → COMPATIBLE DETERMINADO
III) r (una recta) → COMPATIBLE INDETERMINADO
IV) $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$ (un plano) → COMPATIBLE INDETERMINADO

Para decidir debemos resolver un **<u>Sistema de Ecuaciones</u> 3x3**

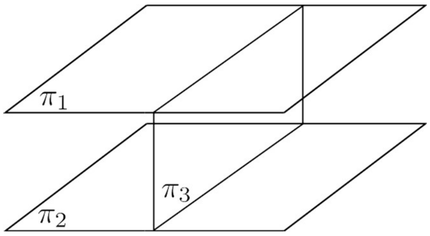
P(x;y;z)∈ $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ ⇔ P satisface S)$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$

I) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$=ø → INCOMPATIBLE

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2} \Rightarrow [\pi_1 \| \pi_2 \text{ y } \pi_1 \cap \pi_2=\emptyset] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3=\emptyset$$
$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}=\frac{c_2}{c_3}\neq\frac{d_2}{d_3} \Rightarrow [\pi_2 \| \pi_3 \text{ y } \pi_2 \cap \pi_3=\emptyset] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3=\emptyset$$
$$\frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}\neq\frac{d_1}{d_3} \Rightarrow [\pi_1 \| \pi_3 \text{ y } \pi_1 \cap \pi_3=\emptyset] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3=\emptyset$$

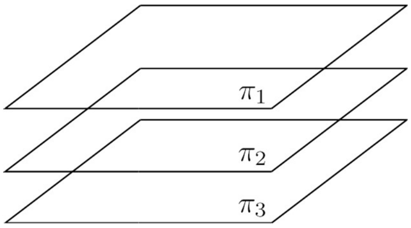
⊳Ejemplo 1: [$\pi_1 \| \pi_2$]⇒ $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$=ø

$$\begin{cases} 4x+2y+6z=24(\pi_1) \\ 2x+y+3z=6(\pi_2) \\ y=3(\pi_3) \end{cases}$$



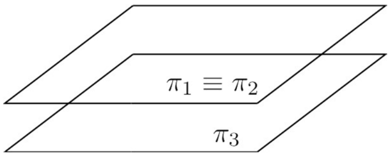
⊳**Ejemplo 2:** $[\pi_1 \| \pi_2 \| \pi_3] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 6z = 24(\pi_1) \\ 2x + y + 3z = 6(\pi_2) \\ 8x + 4y + 12z = 0(\pi_3) \end{cases}$$



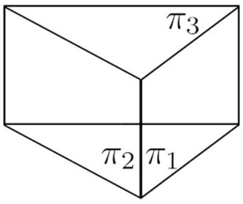
⊳**Ejemplo 3:** $[\pi_2 \| \pi_3] \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 6z = 24(\pi_1) \\ 2x + y + 3z = 12(\pi_2) \\ 2x + y + 3z = 0(\pi_3) \end{cases}$$



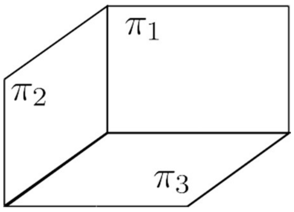
⊳**Ejemplo 4:** <u>**No paralelos**</u>, pero $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$

$$\begin{cases} y = 0(\pi_1) \\ x = 0(\pi_2) \\ x + y = 3(\pi_3) \end{cases}$$



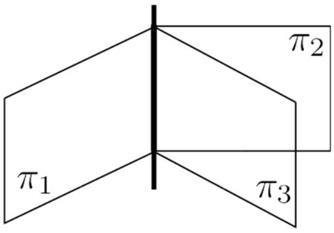
II) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$ → COMPATIBLE DETERMINADO

$$\begin{cases} y = 0(\pi_1) \\ x = 0(\pi_2) \\ z = 0(\pi_3) \end{cases}$$



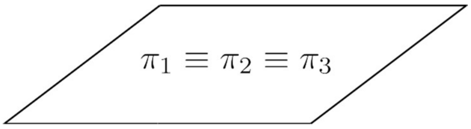
III) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{r(\text{recta})\}$ → COMPATIBLE INDETERMINADO

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8(\pi_1) \\ x + y = 4(\pi_2) \\ z = 2(\pi_3) \end{cases}$$



IV) $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{\pi_1(\text{plano})\}$ → COMPATIBLE INDETERMINADO

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \pi_1 \equiv \pi_2$$
$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow \pi_2 \equiv \pi_3$$



$\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$ **⇒ S: Infinitas soluciones ⇒** $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \equiv \pi_1$

⊳ MÉTODO PARA HALLAR $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$:

Paso 1: Comparar los vectores normales a los planos: $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ y $\overline{n}_3$.

¿PARALELOS 2 a 2? **⊳ SI →Paso 2**
⊳ NO →Paso 3

Paso 2: Analizar si los planos "coinciden" (ecuaciones "proporcionales")

¿$\pi_1=\pi_2=\pi_3$? **⊳ SI →$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1$ → FIN**
⊳ NO →$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$ → FIN

Paso 3: Calcular **Δ=det(A)**; **A**=(matriz de los coeficientes del sistema)

¿Δ≠0? **⊳ SI →Paso 4**
⊳ NO →Paso 5

Paso 4: **Δ≠0** ⇒ Solución única ⇒ $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3=\{P^*(x^*;y^*;z^*)\}$

¿P*? →Resolver algebraicamente el sistema
→ **por Cramer** (aconsejable en este caso)

Paso 5: **Δ=0**, el sistema puede ser:

→**(II) COMPATIBLE INDETERMINADO** (infinitas soluciones)
→**(III) INCOMPATIBLE (S=ø)**

¿(II) ó (III)?

∟Resolver algebraicamente el sistema.

∟**por Gauss** (aconsejable en este caso pues además de decidir el tipo de solución, por este método se puede hallar el conjunto solución) (ver ejemplos en el Apéndice D).

21) Cada uno de los sistemas a continuación se obtiene al hacer la intersección de tres planos. Se pide analizar cada sistema según lo indicado anteriormente y clasificarlo. De ser posible, antes de resolver, predecir el resultado de la intersección: *¿Punto? ¿Recta? ¿Plano?*.
NOTA: hay un sistema que, sin resolverlo, se puede dar el resultado: ¿Cuál es? ¿Por qué pasa esto?

a) $\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ 3x+2y-2z=13 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x+y=15 \\ y+z=25 \\ x+z=20 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ -x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

22) Cada uno de los sistemas a continuación se obtiene al hacer la intersección de tres planos. Se pide:

a) Analizar cada sistema según lo indicado, clasificarlo y "resolverlo".
b) Graficar los tres planos y controlar si el resultado hallado es correcto.

I) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ -x-y-z=-1 \end{cases}$ **II)** $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ **III)** $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+2y+2z=8 \\ x=2 \end{cases}$

23) Dados los planos **π_1)** 3x+y+z=6, **π_2)** x+z=4 y **π_3)** x= 1, se pide:

a) Hallar $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ (con el método más simple para el caso).
b) Graficar los tres planos en un mismo sistema, controlar el resultado hallado en **(a)**.

24) Dados los planos π_1) $3x+y+z=6$, π_2) $x+z=\lambda$ y π_3) $2x+\alpha y = 2$, se pide:
a) Determinar el valor de **α** para que $\Delta=0$.
b) Con el **α** hallado, discutir los resultados posibles para $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.
c) Con el **α** hallado, determinar el valor de **λ** si se sabe que el punto **A(3; 1; -2)**$\in\pi_2$.
d) Con **α** y **λ** hallados, resolver el sistema que permite hallar la solución de $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ (conviene por Gauss).
e) Con **α** y **λ** hallados, graficar los tres planos en un mismo sistema, controlar si el resultado hallado en **(d)** es correcto.

25) Dados los planos π_1) $3x+y+z=6$, π_2) $x+z= \lambda$ y π_3) $2x+y=2$, se pide:
a) Discutir los resultados posibles para $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.
b) Determinar **λ** si se sabe que el punto **A(2; 1; 2)**$\in\pi_2$.
c) Con el **λ** hallado, resolver el sistema que permite hallar la solución de $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ (conviene por Gauss).
d) Con el **λ** hallado, graficar los tres planos en un mismo sistema de referencia, controlar si el resultado hallado en **(c)** es correcto.

Ecuaciones lineales con “*n*” incógnitas - EL (*n*)

Llamamos *ecuación lineal con “n” incógnitas* a toda ecuación del *tipo*:

$$a_1\,\mathbf{x}_1 + a_2\,\mathbf{x}_2 + a_3\,\mathbf{x}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\,\mathbf{x}_{n-1} + a_n\,\mathbf{x}_n = \mathbf{A} \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{a_i} \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{i} = 1; \ldots..n$ → *coeficientes* ; $\mathbf{A} \in \mathbf{R}$ → *término independiente* ;
$\boldsymbol{x_i} \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{i} = 1; \ldots..n$ → ***incógnitas***

En particular:

- ***n*=2** → $\boldsymbol{a}\,x + \boldsymbol{b}\,y = \mathbf{A}$ → *ecuación lineal con “2” incógnitas*
- ***n*=3** → $\boldsymbol{a}\,x + \boldsymbol{b}\,y + \boldsymbol{c}\,z = \mathbf{A}$ → *ecuación lineal con “3” incógnitas*
- ***n*=4** → $\boldsymbol{a}\,x + \boldsymbol{b}\,y + \boldsymbol{c}\,z + \boldsymbol{d}\,u = \mathbf{A}$ → *ecuación lineal con “4” incógnitas*

donde $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \mathbf{A} \in \mathbf{R}$; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}$ son las ***incógnitas***.

Solución de una EL (*n*)

Una solución de una EL(*n*) es ***toda n-upla ordenada*** (α_1 ; α_2 ; ....; α_n) que al ser reemplazada en la ecuación (1), hace cierta la igualdad.
Una EL(*n*) tiene ***infinitas soluciones***. Así, tenemos un ***conjunto soluciones***, al que indicamos con **S**.

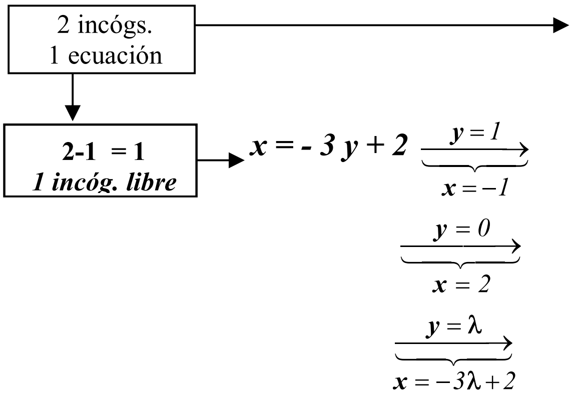
$$\mathbf{S} = \{ (\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots\ldots..; \alpha_n) \ / \ a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n\,\alpha_n = \mathbf{A} \ \}.$$

* *¿**Porque una EL(n) admite infinitas soluciones**?*: porque existen incógnitas o variables “***libres***” (***v.l.***), es decir, incógnitas cuyo valor no depende de las otras incógnitas presentes en la ecuación, a las que se puede entonces asignar ***cualquier valor real*** .

Definición: llamamos “***variable libre***” a toda incógnita de la ecuación cuyo valor se puede fijar en forma ***arbitraria*** al efecto de obtener “***una solución***” entre las infinitas soluciones.

Ejemplos:

1) $3x + 9\,y = 6$



Solución (algebraica)
(α_1;α_2) → *par ordenado*
(-1 ; 1)
(0 ; 2)
(-3 λ +2; λ)
S = { (-3 λ +2; λ) / $\lambda \in \mathbf{R}$ }
Solución (geométrica)
S = { (-3 λ +2; λ) / $\lambda \in \mathbf{R}$} = ***recta plana***

2) $3x + 9y + 12z = 6$

3 incógs. 1 ecuación →

3 -1 = 2 ***2 incógs. libres*** → $x = -3y - 4z + 2 \; \underbrace{\xrightarrow{y=1\,;\,z=0}}_{x=-1}$

$\underbrace{\xrightarrow{y=0\,;\,z=-1}}_{x=6}$

$\underbrace{\xrightarrow{y=\lambda\,;\,z=\mu}}_{x=-3\lambda-4\mu+2}$

Solución (algebraica)
$(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ → *terna ordenada*
(-1 ; 1; 0)
(6; 0 ; -1)
$(-3\lambda - 4\mu + 2\,;\,\lambda\,;\,\mu)$
$S=\{(-3\lambda - 4\mu + 2;\,\lambda;\,\mu)\,/\,\lambda,\mu \in \mathbf{R}\}$
Solución (geométrica)
S = **plano**

3) $3x + 9y + 12z - 3t = 6$

4 incógs. 1 ecuación →

4 -1 = 3 ***3 incógs. libres*** → $x = -3y - 4z + t + 2 \; \underbrace{\xrightarrow{y=1\,;\,z=0;\;t=0}}_{x=-1}$

$\underbrace{\xrightarrow{y=0\,;\,z=1\,;\,t=2}}_{x=0}$

$\underbrace{\xrightarrow{y=\lambda\,;\,z=\mu\,;\,t=\nu}}_{x=-3\lambda-4\mu+\nu+2}$

Solución (algebraica)
$(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)$ → *"4-upla" ordenada*
(-1 ; 1; 0; 0)
(0; 0 ; 1; 2)
$(-3\lambda - 4\mu + \nu + 2\,;\,\lambda\,;\,\mu;\,\nu)$
$S=\{(-3\lambda-4\mu+\nu+2;\lambda;\mu;\nu)/\lambda,\mu,\nu \in \mathbf{R}\}$
Solución (geométrica)
S = ¿admite interpretación geométrica en $\mathbf{R}^3$?

Sistema de Ecuaciones Lineales-$p\times n$ (SEL-$p\times n$). Conjunto solución del SEL

☞ Resolver los problemas de intersección entre curvas (*rectas*) y superficies (*planos*) requiere del planteo y resolución de un ***Sistema de Ecuaciones Lineales*** $p\times n$ (p = nº ecuaciones; n = nº incógnitas).

La cantidad de *ecuaciones* puede ser igual o distinta que la de *incógnitas* (***m=n***; ***m<n***; ***m>n***). Por ejemplo:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4 = \mathbf{A_1} \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4 = \mathbf{A_2} \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4 = \mathbf{A_3} \end{cases} \rightarrow \textbf{SEL } 3\times 4 \quad (3 \text{ ecuacs.} - 4 \text{ incógs.})$$

☞ *Solución de un SEL m×n:*

- Sistema ***p×2*** (→ 2 incógnitas, *x* e *y*): es el conjunto de todos los *pares ordenados* (*x; y*) que verifican *simultánemante* todas las ecuaciones del sistema.
- Sistema ***p×3*** (→ 3 incógnitas, *x ; y ; z*): es el conjunto de todas las *ternas ordenados* (*x; y; z*) que verifican *simultánemante* todas las ecuaciones del sistema.
- Sistema ***p×4*** (→ 4 incógnitas, *x ; y ; z; t*): conjunto de 4-uplas (*x; y; z; t*) que verifican el sistema.

☞ *Tipos de solución de un SEL p×n:*

Un SEL ***p×n*** puede que tenga: solución única; infinitas soluciones ó ninguna.

(CD) *compatible determinado* → *solución única* (existe una única “n –upla” solución).

(CI) *compatible indeterminado* → *infinitas soluciones* (existen ∞´s “n –uplas” solución).

(INC) *incompatible* → *no tiene solución* (no existe ninguna “n –upla” que sea solución).

Para buscar la solución **S** tenemos que tener en cuenta el siguiente resultado teórico:

- si ***vl*** = ***cantidad de variables libres*** entonces:
  - **a)** si no hay ecuaciones que son combinación lineal de otras del sistema, ***vl* = *p* – *n*.**
  - **b)** si hay ecuaciones que son combinación lineal de otras del sistema, ***vl* > *p* – *n*.**

¿Cómo hacemos para saber si hay o no ecuaciones que son combinación lineal de otras? En algunos casos nos lo dirá el método de resolución que usemos (ver más adelante), en otros “acudiendo a resultados” de la **Geometría Analítica**. A continuación vemos esto con ejemplos.

- **Sistema 1×3:** $ax + by + cz = d\ (c\neq 0) \Rightarrow vl = p - n = 3 - 1 = \mathbf{2}$

→ **COMPATIBLE INDETERMINADO**

→ $\mathbf{S} = \{(x; y; z) \,/\, x\in\Re;\ y\in\Re;\ z = \frac{d-ax-by}{c}\}$

→ **una solución:** “*x*”; “*y*” variables libres $\xrightarrow{x=2;y=0}$ $\mathbf{P}\ (2, 0, \frac{d-2a}{c}) \in \mathbf{S}$

- **Sistema 2×3**: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} (a_1 \neq 0)$

  $\Rightarrow$ ***vl*** $\geq$ ***p*** – ***n*** = 3 - 2 = **1** (pues no podemos saber a priori si las ecuaciones son combinacines lineales o no)

  → **COMPATIBLE INDETERMINADO**

  → **¿una variabe libre o más?**…¿cuántas?...¿cuáles?....**¿da lo mismo tomar cualquier *vl*? ¡¡NO!!**

Para explicar está aseveración y dar respuesta a las preguntas pendientes, desarrollaremos los métodos de resolución de *SEL* más conocidos.

☞ ***Métodos para resolver SEL p×n:***

Existen distintos métodos, los más conocidos: ***Cramer*** y ***Gauss***.

- ***Cramer*** se puede aplicar sólo a SE ***n×n*** (los que llamamos sistemas "*cuadrados*" pues ***p = n***).
- ***Gauss*** sirve para cualquier sistema. Luego, en función de ello y a los efectos de habituarse a resolver sistemas en forma *metódica*, conviene usar siempre Gauss.

☞ ***Método de Cramer para resolver SEL n×n:***

*** *Ejemplos SEL 3×3***

$$\text{(I)} \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{(III)} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{(IV)} \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ x + y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Para resolver un Sistema usando la relga de Cramer hay que partir de **A = "matriz asociada al sistema" → A = matriz de los coeficientes de las incógnitas en el sistema del caso.**

$$\text{A(I)=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{A(II)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{A(III)=} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{A(IV)=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ del Sistema (I) **MATRIZ Sist. (II)** **MATRIZ Sist. (III)** **MATRIZ Sist. (IV)**

Indicamos con Δ al **determinante de A**; o sea, Δ = **det A**.
El tipo de solución depende de Δ**:**

Caso I: Δ ≠ **0 → Sist. COMPATIBLE DETERMINADO (sol. única).**

Caso II: Δ = **0 → II a) Sist. INCOMPATIBLE (no tiene solución).**
→ II b) Sist. COMPATIBLE INDETERMINADO (∞'s sols.).

- **<u>Resolución CASO I</u> (Δ ≠ 0):**

Paso 1) calcular Δ = **det A.**

Paso 2) calcular los determinates Δ**x,** Δ**y,** Δ**z**

Δ**x** → se obtiene cambiando en Δ, la <u>primer columna</u> de **A** por la columna de los términos independientes (t. i.).

Δ**y** → se obtiene cambiando en Δ**,** la <u>segunda columna</u> de **A** por la columna de los t. i.

Δ**z** → se obtiene cambiando en Δ**,** la <u>tercer columna</u> de **A** por la columna de los t. i.

Paso 3) hallar la solución única → **P (*x; y; z*)**

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

- **<u>Resolución CASO II a</u> (Δ = 0; incompatible):**

El sistema será "incompatible" si "al menos uno" entre Δ**x,** Δ**y,** Δ**z** es <u>distinto de cero.</u>
Ejemplo: si Δ = **0 y** Δ**x = 5** como ***x* .** Δ = Δ**x queda x.0 = 5**; o sea, **0 = 5** (absurdo; ∄*x*).

- **<u>Resolución CASO II b</u> (Δ = 0; ∞'s sols.):**

El sistema será "indeterminado" si Δ**x** = Δ**y** = Δ**z** = 0.
Ejemplo: si Δ = **0 y** Δ**x = 0** como ***x* .** Δ = Δ**x queda x.0 = 0**; o sea, **0 = 0** (vale ∀*x*).

<u>Resolución por Cramer del Sistema (I)</u>:

$$\textbf{(I)} \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 & \rightarrow \pi_1 \\ 5y - 10z = -5 & \rightarrow \pi_2 \\ -3x + 4y - z = -2 & \rightarrow \pi_3 \end{cases} \rightarrow \text{A(I)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 1) calcular $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{20.}$

Paso 2-3) calcular los <u>deteminates</u> Δ**x,** Δ**y,** Δ**z.** Calcular ***x; y; z.***

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & -10 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 80 \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{80}{20} = 4.$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 60 \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{60}{20} = 3.$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 40 \qquad \rightarrow \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{40}{20} = 2.$$

$$\mathbf{S(I)} = \{(4; 3; 2)\} \xrightarrow{geométricamente} \mathbf{S(I)} = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$$

Resolución por Cramer del Sistema (II):

$$\textbf{(II)} \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \pi_1 \\ z = 0 & \rightarrow \pi_2 \\ z = 3 & \rightarrow \pi_3 \end{cases} \rightarrow \mathbf{A(II)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1) calcular $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0.}$

Paso 2-3) calcular los <u>deteminates</u> **Δx, Δy, Δz.** <u>**Concluir**</u>**.**

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \; ; \; \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{-3 \neq 0 \Rightarrow \text{INCOMPATIBLE.}}$$

$$\mathbf{S(II)} = \varnothing \xrightarrow{\mathbf{geométricamente}} \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing \; (\pi_2 // \pi_3 \text{ y } \pi_2 \neq \pi_3)$$

Resolución por Cramer del Sistema (III):

$$\textbf{(III)} \begin{cases} 2x - y = 0 & \rightarrow \pi_1 \\ x - y = 0 & \rightarrow \pi_2 \\ x + y = 4 & \rightarrow \pi_3 \end{cases} \rightarrow \mathbf{A(III)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 1) $\Delta = \mathbf{0.}$

Paso 2-3) calcular los <u>deteminates</u> **Δx, Δy, Δz.** <u>**Concluir**</u>**.**

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \; ; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \; ; \; \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{-4 \neq 0}$$

$$\mathbf{S(III)} = \varnothing \xrightarrow{\mathbf{geométricamente}} \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing \; \textbf{(pero } \underline{\textbf{no son paralelos}}\textbf{).}$$

Resolución por Cramer del Sistema (IV):

$$\textbf{(IV)} \begin{cases} x + y + 2z = 8 & \rightarrow \pi_1 \\ x + y = 4 & \rightarrow \pi_2 \\ z = 2 & \rightarrow \pi_3 \end{cases} \rightarrow \mathbf{A(IV)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1) $\Delta = \mathbf{0.}$

Paso 2-3) calcular los deteminates Δ**x,** Δ**y,** Δ**z. Concluir.**

Verificar que $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{z} = \mathbf{0} \Rightarrow$ **COMPATIBLE INDETERMINADO**

$$\mathbf{S(IV) = \infty\text{'s soluciones}} \xrightarrow{geométricamente} \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \text{¿ recta?}$$

→ En este caso, por Cramer, podemos concluir que el sistema tiene infinitas soluciones pero no podemos dar ninguna de ellas, ni siquiera decir si los puntos solución son puntos de una recta o no. Si necesitamos puntos solución, debemos recurrir a otro método, el método de **Gauss**.

☞ ***Método de Gauss para resolver SEL $p\times n$:***

Se basa en el siguiente principio: "transformar, el sistema original en otro *equivalente pero más simple*; hacer esto por medio de *operaciones elementales*".

Sistema equivalente: sistema que tiene el ***mismo conjunto solución*** que otro dado, aunque su "*forma*" o "*aspecto*" sea distinto al mismo.

Operaciones elementales*: operaciones que, realizadas sobre las ecuaciones de un sistema, permiten "*modificar su forma*" sin *"cambiar su conjunto solución"*; o sea, *operaciones que permiten pasar de un sistema a otro* ***equivalente* (*y solo ellas!!*).

O1: multiplicar (ó dividir) toda la ecuación por un número distinto de cero.
O2: sumar (ó restar) a una ecuación *otra ecuación del sistema.*

Estas operaciones se pueden resumir en una:

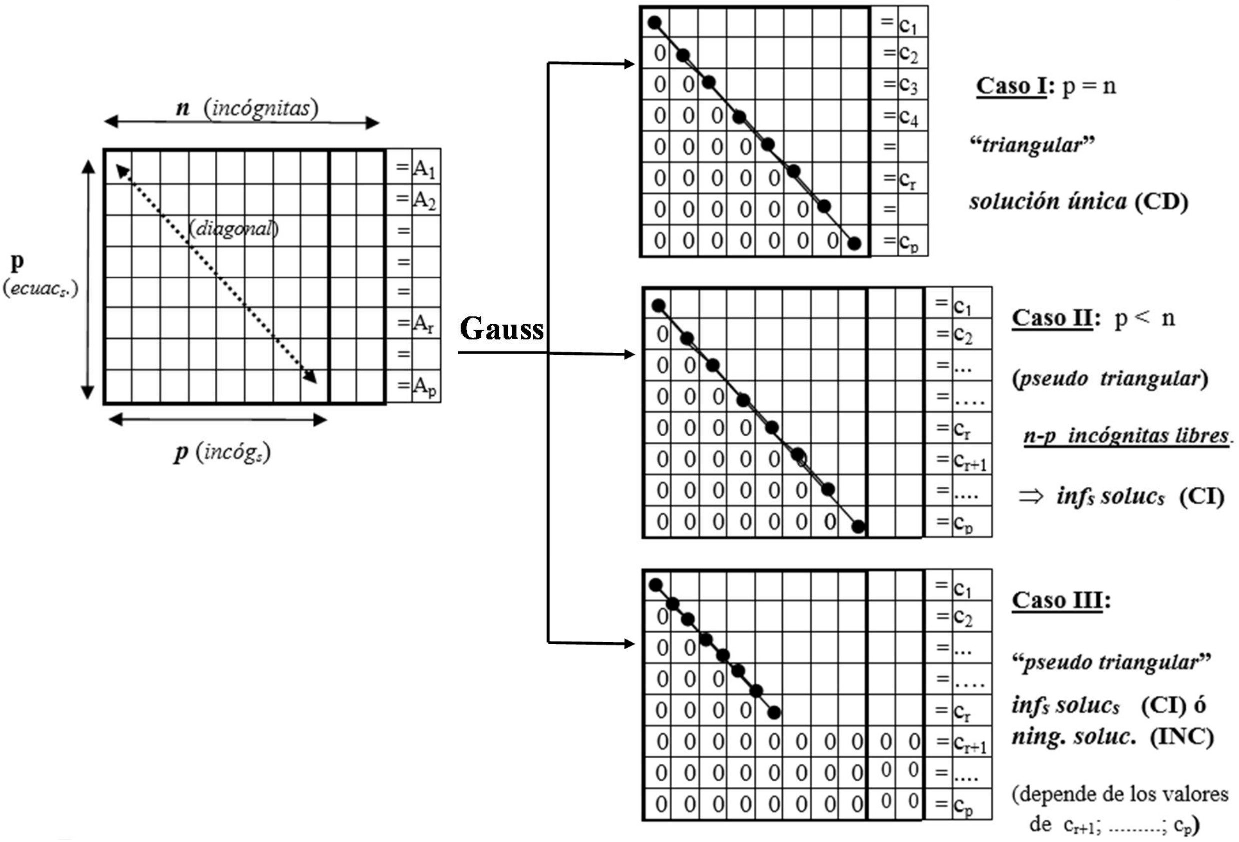
O3: ***reemplazar*** una ecuación del sistema por una *combinación lineal* (c.l.) de ecuaciones del sistema con la condición que la c.l. elegida *incluya* a la ecuación que se reemplaza.

Objetivo:

Llevar el sistema a uno equivalente pero de forma "*triangular*" o "*pseudo-triangular*".
Para ello se reemplazan todas las ecuaciones del sistema por c.l. de ecuaciones, *excepto la primera*.

El reemplazo se hace de modo que "sobre la *diagonal*" no queden ceros y que, "debajo de la *diagonal*" queden todos los coeficientes igual a cero.
El tipo de solución que se obtenga depende de que se pueda (o no) llegar a un sistema "triangular".

➢ ***$p \leq n$ → SEL $p \times n$ → sistema "rectangular ancho" ($p<n$) ó "cuadrado" ($p = n$)***



Caso I $p = n$ (**SEL 3×3**)

$$S1: \begin{cases} x+y+z=0 & E_1 \\ -x+y+z=-2 & E_2 \\ 2x-y=2 & E_3 \end{cases} \xrightarrow{\approx} \begin{cases} x+y+z=0 & E_1 \\ 0x+2y+2z=-2 & E'_2=E_1+E_2 \\ 0x+3y+2z=-2 & E'_3=2E_1-E_2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\approx} \begin{cases} x+y+z=0 & E_1 \\ 0+6y+6z=-6 & E''_2=3E'_2 \\ 0+6y+4z=-4 & E''_3=2E'_3 \end{cases} \xrightarrow{\approx} \begin{cases} x+y+z=0 & E_1 \\ 0+6y+6z=-6 & E''_2 \\ 0+0+2z=-2 & E'''_3=E''_2-E''_3 \end{cases}$$

sistema equivalente "triangular"
(todos ceros "debajo de la diagonal")

$$\xrightarrow{\approx} \begin{cases} x=-y-z & \textit{despejandox} \\ y=-1-z & \textit{despejandoy} \\ z=-1 & \textit{resolviend para z} \end{cases} \xrightarrow{\approx} \begin{cases} x=1 & \textit{calculandox} \\ y=0 & \textit{calculandoy} \\ z=-1 \end{cases}$$

(solución única)

S1 = { (1; 0; -1) } *(el conjunto solución tiene un único elemento)*

Geométricamente el sistema **S1** corresponde a la intersección de tres planos.
S1 = P $\in$ R^3 ⇒ los planos se cortan en un único punto **P (1; 0; -1)**

Caso II: $p < n$ **(SEL 2×3)**

$$S2: \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y+5z=55 & E_1 \\ x+3y+2z=25 & E_2 \end{array}\right. \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y+5z=55 & E_1 \\ 2x+6y+4z=50 & E'_2=2E_2 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y+5z=55 & E_1 \\ 0x+y-z=-5 & E''_2=E'_2-E_1 \end{array}\right. \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y=55-5z & E_1 \\ y=-5+z & E''_2 \end{array}\right.$$

sistema equivalente "no triangular"
n - p = 3 - 2 = ***1*** **→** ***incóg. libre*** **→** "z"

⇒ *el sistema tiene infinitas solucs.*
(que resultan de hacer $z=\lambda$)

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=55-5\lambda \\ y=-5+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{l} 2x=55-5\lambda-5(-5+\lambda) \\ y=-5+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{l} x=40-5\lambda \\ y=-5+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

ecuacs. params de una recta en R^3

S2 = { $(x; y; z)$ / $x = 40 - 10\lambda$; $y = -5 + \lambda$; $z = \lambda$; $\lambda \in$ R }

Geométricamente el sistema **S2** corresponde a la intersección de dos planos.
S2 = ***r*** (recta en R^3)
Dando valor a λ obtenemos puntos de la recta (sol): λ = 2 → **P** (30 ; -3 ; 2) ∈ ***r***

Caso III: cualquier caso que derive en un sistema pseudo triangular del tipo III (**SEL 3×3**)

$$S2: \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y+5z=55 & E_1 \\ x+3y+2z=25 & E_2 \\ 4x+10y+10z=120 & E_3 \end{array}\right. \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y+5z=55 & E_1 \\ 2x+6y+4z=50 & E'_2=2E_2 \\ 2x+5y+5z=60 & E'_3=\frac{1}{2}E_3 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y+5z=55 & E_1 \\ 0x+y-z=-5 & E''_2=E'_2-E_1 \\ 0x+0y+0z=5 & E''_3=E'_3-E_1 \end{array}\right. \xrightarrow{\approx} \left\{\begin{array}{ll} 2x+5y+5z=55 & E_1 \\ 0+y-z=-5 & E''_2 \\ 0=5 & \textit{ABSURDO} \end{array}\right.$$

***sistema equivalente "no triangular"* (**)**
(hay un cero en la diagonal y el t.i.$\neq 0$)

⇒ *el sistema no tiene solución*
(*no existe (x; y; z) tal que 0x+0y+0z= 5)*

S2 = ∅ *(el conjunto solución es " vacío")*

Geométricamente el sistema **S2** corresponde a la intersección de tres planos.
S2 = ∅ ⇒ al menos dos de los planos son *paralelos*, *no coincidentes*

Ejemplo **(SEL 3×3)**

$$\text{S3:}\begin{cases} 2x+5y+5z=55 & E_1\\ x+3y+3z=30 & E_2\\ x+4y+4z=35 & E_3\end{cases} \xrightarrow{\approx} \begin{cases} 2x+5y+5z=55 & E_1\\ 2x+6y+6z=60 & E_2'=2E_2\\ 2x+8y+8z=70 & E_3'=2E_3\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\approx}\begin{cases} 2x+5y+5z=55 & E_1\\ 0x+y+z=5 & E_2''=E_2'-E_1\\ 0x+3y+3z=15 & E_3''=E_3'-E_1\end{cases} \xrightarrow{\approx} \begin{cases} 2x+5y+5z=55 & E_1\\ 0+y+z=5 & E_2''\\ 0x+0y+0z=0 & E_3'''=E_3''-3E_2''\end{cases}$$

sistema equivalente "no triangular"
(hay un cero en la diagonal pero en este caso, el t.i. = 0)

$$\xrightarrow{\approx}\begin{cases} 2x+5y+5z=55 & E_1\\ 0+y+z=5 & E_2''\\ 0=0 & \textit{Verdadera}\end{cases}$$

⇒ el sistema tiene solución; esta viene dada por los puntos que satisfacen las dos primeras ecuacs.
(la última ecuación ´<u>sobra</u>´ pues $0x+0y+0z=0$, vale ∀ (x; y; z))

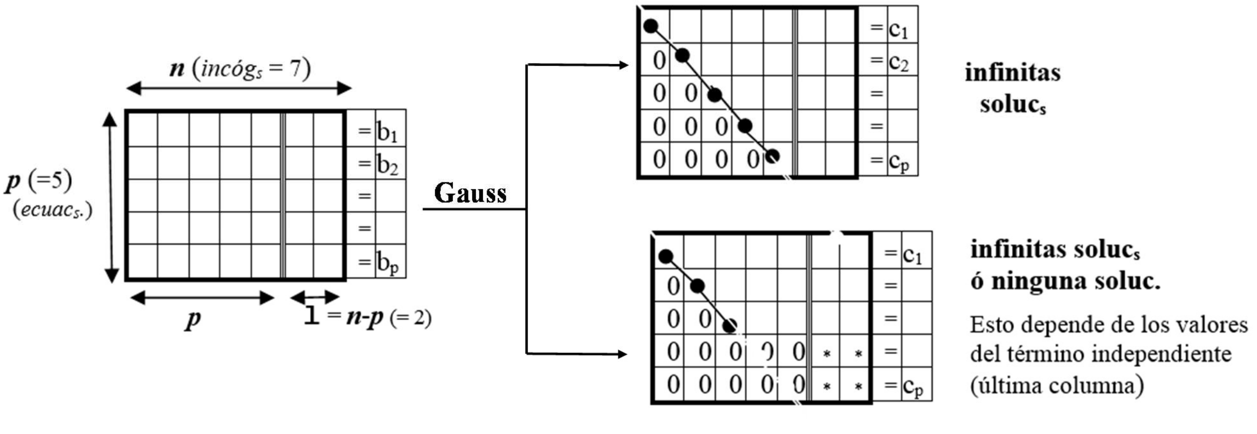
$$\xrightarrow{\approx}\text{S*3:}\begin{cases} 2x+5y+5z=55\\ y+z=5\end{cases}\xrightarrow{\approx}$$

SEL 2×3 – *(dos ecuacs; tres incógs)*
Sistema rectangular "*ancho*"
¿cómo se resuelve?

<u>Geométricamente</u> el sistema S*3 corresponde a la intersección de dos planos (*no paralelos*).
La intersección de dos planos no paralelos es una recta ⇒ **S3 = *recta* ; *¿cuál??***

S3 = ¿¿¿¿????

➢ ***p* < *n*** → menos ecuaciones que incógnitas → **SEL *p*×*n*** → sistema "rectangular-*ancho*"



Un sistema "rectangular-*ancho*" admite infinitas soluciones o no admite solución.

S*3: $\begin{cases}2x+5y+5z\ =55\\ \quad\ \ y+\ \ z=5\end{cases}\xrightarrow{\approx}\begin{cases}2x+5y=-5z+55\\ \quad\ \ y=\ -z+5\end{cases}$ *(llevo a sistema " triangular ")* *(queda una)* *(incógnita " libre " : z)*

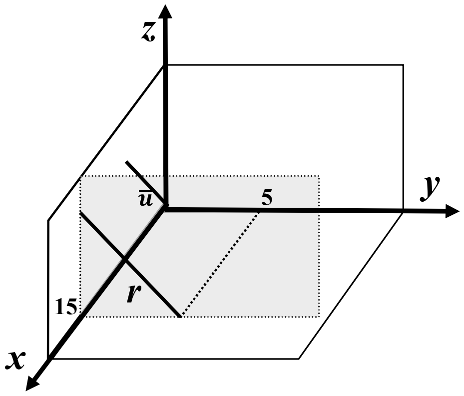
$$\xrightarrow{\approx}\begin{cases}2x+5y=-5z+55\\ \quad\ \ y=\ -z+5\\ \quad\ \ z=\ \lambda\end{cases}$$ *(tomo z como parámetro)*

$$\xrightarrow{\approx}\begin{cases}2x+5(-\lambda+5)=-5\lambda+55 & \textit{reempl y}\\ \quad\ y\ =\ -\lambda+5 & \textit{reempl z}\\ \quad\ z\ =\ \lambda\end{cases}$$

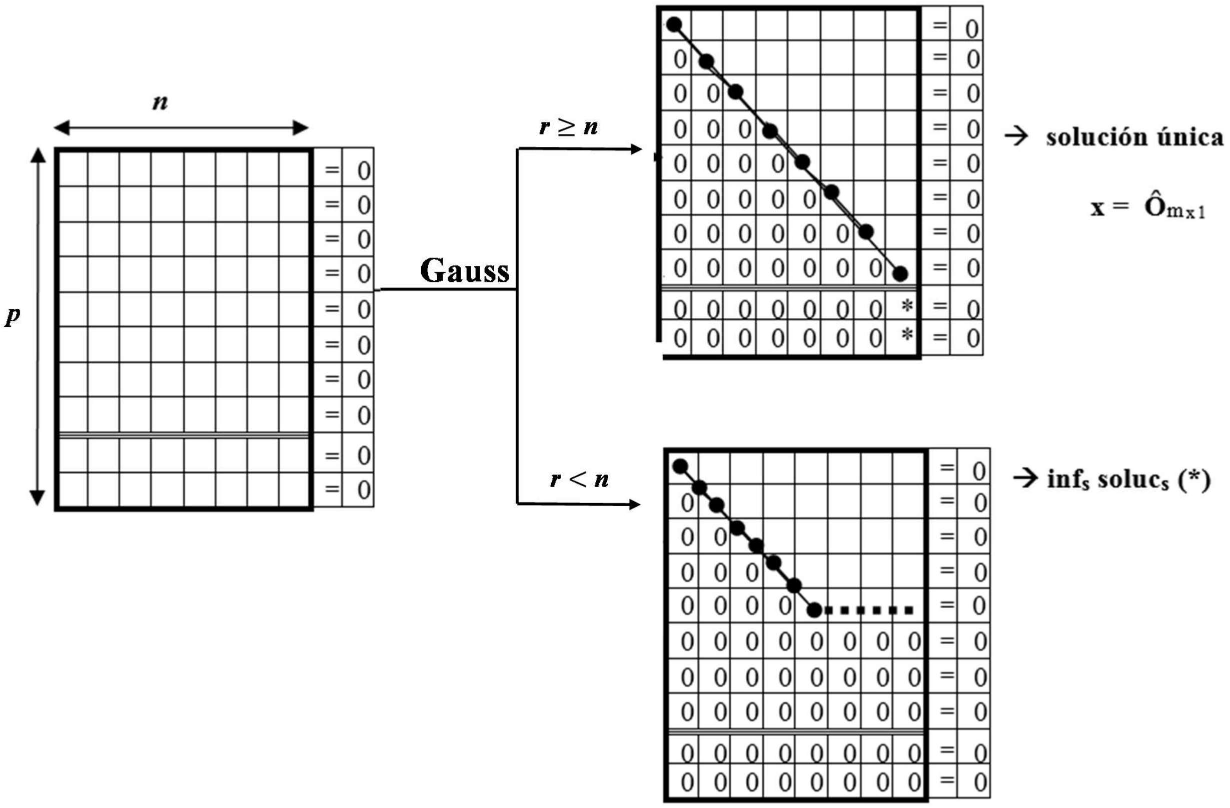
$$\xrightarrow{\approx}\begin{cases}x=15 & \textit{(resuelvo para x)}\\ y=5-\lambda\\ z=\ \lambda\end{cases}$$

Ecuacs Paramétricas de una recta en R^3. Recta que pasa por A(15; 5 ,0) y cuyo vector de dirección es $\overline{u}$ = (0; -1; 1)

S3 = { P(*x; y; z*) / *x* = 15 ; *y* = 5 - λ ; *z* = λ } = recta *r*



➢ ***p* > *n*** → más ecuaciones que incógnitas → **SEL *p*×*n*** → sistema "rectangular-*alto*"



Para buscar la solución del sistema **S** procedemos a:

A) aplicar Gauss, hasta reducir el sistema a la forma “triangular” o “cuasi- triangular”.

B) el sistema “*reducido*”, puede tener o no solución, lo que se decide observando las últimas ecuaciones.

Si tiene solución consideramos la cantidad de ecuaciones “significativas” (***m***) y la cantidad de incógnitas (***n***) (***ecuacs significativas*:** las que no tienen todos sus coef s. cero).
En tal caso tenemos dos situaciones posibles: $n = m$ ó $n > m$.

* $n = m$ → solución única.

* $n > m$ → infinitas soluciones

Si $r = n - m$ entonces r = cantidad de variables *no ligadas*; o sea, las que podemos *fijar arbitrariamente*.

r = “grado de libertad” del sistema

[***r*** define la dimensión del conjunto solución del **SEL**: unidimensional (recta); bidimensional (plano); etc.]

Apéndice E: MÉTODO AXIOMÁTICO - SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Una de las aplicaciones del Algebra Lineal es el estudio de los Sistemas Físicos, particularmente el de los sistemas que tengan un comportamiento lineal. El sustento teórico para el abordaje de estas cuestiones son los SISTEMAS AXIOMÁTICO. Estos sistemas constituyen el grado de abstracción máximo (y útil) alcanzado dentro de la matemática, posibilitan así que distintos conjuntos de objetos (vectores, matrices, funciones, etc) puedan ser abarcados por una única estructura algebraica la cual representa a todos en general y a cada uno en particular. Si una rama de la ciencia se desarrolla en base a estos sistemas recibe el nombre de "*axiomática*" y el método empleado se llama "*método axiomático*". Cabe aclarar que si bien la primera ciencia en acudir a este método fue la Física, hoy en día está ampliamente difundido, siendo la Biología Molecular otro importante ejemplo al respecto.

La matemática siempre ha gozado de la reputación de ser la ciencia más exacta y rigurosa, aquella cuya verdad está más allá de toda duda. A través de la historia se han dado varios intentos de justificar estas pretensiones de verdad. Los primeros fueron los griegos quienes a partir de revisar los resultados *prácticos* de sus antecesores egipcios y babilonios, terminan por dar a la matemática un *carácter distinto* al dado hasta entonces. No les basta que el conocimiento matemático sea "corroborado por la experiencia", tratan de mejorar esto organizándolo en forma de "sistemas deductivos". Así, y hace más de 2000 años, se origina el método axiomático cuyo ejemplo más acabado dentro de las matemáticas griegas lo constituye la obra "Elementos" de Euclides. Este recogió y organizó en secuencias lógicas prácticamente todos los resultados "geométricos" conocidos hasta entonces, sentó las bases de la que hoy conocemos como Geometría Euclideana, geometría con la que, por casi 2000 años, se cree haber alcanzado la tan anhelada "verdad absoluta" (al menos, en geometría).

Sin embargo, durante el siglo XIX empiezan a observarse resultados y paradojas que, al ir contra de la intuición, comienzan a generar fuertes dudas y controversias. Dentro de este contexto surgen varios programas de revisión crítica de los fundamentos de las matemáticas; entre ellos el programa logicista encabezado por Russell y Whitehead quienes en su obra "Principia Mathematica" se proponen codificar todos los métodos válidos de razonamiento matemático en un "sistema lógico" del cual se pudiera derivar "toda la matemática". Sin embargo, y ya publicada esta obra, las dudas persisten: ¿puede realmente derivarse toda la matemática del sistema expuesto en "Principia Mathematica"?; y en tal caso, ¿cómo asegurarse de que dicho sistema sea "consistente", es decir, que de él no se puedan desprender "contradicciones lógicas"?.... Esta segunda cuestión es planteada por el matemático alemán David Hilbert como uno de los problemas abiertos más importantes que debían ser investigados por los matemáticos de comienzos del siglo XX. En 1931, Kurt Gödel da una respuesta *inesperada* al problema de la *consistencia y completitud* del sistema expuesto en "Principia Mathematica": Gödel "demuestra", en el llamado Teorema de Incompletitud de Gödel, que ningún sistema que pretenda producir todas las verdades "aritméticas" (por ende, "matemáticas"), puede probar su propia consistencia; más aún, demuestra que cualquiera sea el sistema, siempre habrá verdades aritméticas que no se pueden "*demostrar*" *dentro del sistema*.

Ciertas interpretaciones *filosóficas* del teorema de Gödel, señalan que lo que este resultado implica es que cualquier tentativa de *"mecanizar" totalmente el razonamiento matemático, está condenada al fracaso*. (¿gana el *hombre*?, ¿no hay *máquina* que lo pueda suplir ?).

1. SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Definición

Un Sistema Axiomático es, en esencia, un conjunto de elementos *sin definir* para los cuales se asumen, *sin demostrar*, ciertos enunciados llamados "*axiomas*". Luego, a partir de los axiomas y a través del razonamiento lógico se "*deducen*" otras afirmaciones a las que se da el nombre de "*teoremas*".

O sea, en un Sistema Axiomático se distinguen los siguientes elementos:
1) términos primitivos: términos cuya naturaleza no queda especificada de antemano.
2) axiomas : propiedades que deben satisfacer los términos primitivos.
3) definiciones: cuestiones inherentes a *ese sistema*.
4) teoremas : propiedades que se "deducen" de los axiomas.

OBSERVACIONES:

1) Dado un Sistema Axiomático, de no aclarar nada, se sobreentiende que las deducciones se realizan según las reglas de la "Lógica Bivalente". Cabe señalar que hoy día existen otras Lógicas, a las cuales se acude según el problema a tratar.

2) Cuando a los términos primitivos les asignamos un *significado concreto*; decimos que tenemos una "*interpretación del sistema axiomático*". Si la interpretación dada es tal que los axiomas resultan *proposiciones verdaderas*, decimos entonces que tenemos un ***"modelo del sistema axiomático".***

3) Decimos que un Sistema Axiomático es "*consistente*" cuando en su desarrollo no aparecen axiomas o teoremas "*contradictorios*" entre sí. Tal consistencia se prueba (indirectamente) cuando se puede exhibir un "**modelo**".

2. LEYES DE COMPOSICIÓN

Def. 1: ***producto cartesiano***

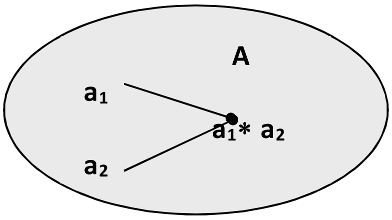
Dados dos conjuntos **S** y **T** , llamamos ***producto cartesiano*** y lo indicamos **SxT** al siguiente conjunto: **SxT** $= \{ (s;t) /\ s\in S\ ;\ t\in T\ \}$

Def. 2: ***operación o ley de composición "interna" .***

Una *función* definida de **AxA** en **A**, que indicamos $(*)$, $* :\ AxA \rightarrow A$

$$(a_1;a_2) \rightarrow a_1 * a_2$$

es una operación o ley de composición "interna" sobre **A**, si cumple las siguientes propiedades:



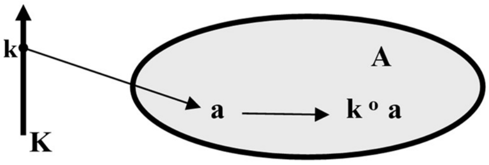
PROPIEDADES:

1☞ ASOCIATIVA
2☞ CONMUTATIVA: $a_1 * a_2 = a_2 * a_1\ \forall$ ....
3☞ EXISTE NEUTRO: **e** / ....
2☞ EXISTE INVERSO: a^{-1} / ....

Def. 3: ***ley de composición "externa" en A con operadores en K.***

Una *función* definida de **KxA** en **A**, que indicamos (º),

$$\circ :\ KxA \rightarrow A$$
$$(k;a) \rightarrow k \circ a$$



es ley de composición "externa" sobre **A.**

Nota: en general **K** es el conjunto de los reales o los complejos; en particular, en este trabajaremos con el conjunto de los reales.

3. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Por estructura algebraica entendemos cualquier conjunto de objetos sobre el que se define una o más operaciones (internas o externas). Estas estructuras se diferencian una de otras según la cantidad y tipo de operaciones que se definan entre sus objetos, las propiedades que las mismas verifiquen.
Veremos tres de estas estructuras y, en particular, estudiaremos en profundidad una de ellas: ***espacios vectoriales.***

3.1 - GRUPOS: (1 operación binaria interna)
3.2 - CUERPOS: (2 operaciones binarias internas)
3.3 - ESPACIOS VECTORIALES: (1 operación binaria interna ,
1 operación externa sobre un *cuerpo* **K**)

3.1 - GRUPOS:

Def : Es una estructura algebraica formada por un conjunto no vacío dotado de una operación interna que combina cualquier par de elementos para componer un tercero, dentro del mismo conjunto y que satisface las propiedades asociativa, existencia de elemento neutro y simétrico.
Ejemplo: El conjunto de los números enteros, que está formado por los números enteros, que están dotados de signo (positivos y negativos) junto con el {0} y la operación suma "+".

3.2 - CUERPOS:

Def: Es una estructura algebraica en la cual las operaciones llamadas adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la multiplicación respecto de la adición, además de la existencia de inverso aditivo, de inverso multiplicativo y de un elemento neutro para la adición y otro para la multiplicación, los cuales permiten efectuar las operaciones de sustracción y división (excepto la división por cero).
Ejemplo: Los números reales con las operaciones usuales forman un cuerpo.

3.3 - ESPACIOS VECTORIALES

Def. 1:

Diremos que un **conjunto V** es un **ESPACIO VECTORIAL** sobre **R** (reales), si están definidas dos operaciones, una ***suma*** **[⊕]** de elementos de **V** y un ***producto*** **[•]** de elementos de **V** por escalares (reales) que satisfacen las siguientes propiedades:

1) clausura respecto de la suma: $u, v \in V \Rightarrow u \oplus v \in \mathbf{V}$
2) clausura respecto del producto: $\alpha \in R$; $u \in V \Rightarrow \alpha \bullet u \in \mathbf{V}$
3) conmutatividad de la suma: $u \oplus v = v \oplus u$
4) asociatividad de la suma: $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$
5) existencia de elemento neutro (cero:0) para la suma: $u \oplus 0 = u$; $\forall\, u \in \mathbf{V}$
6) existencia de opuesto para la suma: $-u \in V \,/\, u \oplus (-u) = 0$
7) asociatividad para el producto de escalares y vectores: $(\alpha\,\beta)\bullet u = \alpha \bullet (\beta \bullet u)$
8) distributividad de la suma de vectores por escalar: $\alpha \bullet (u \oplus v) = \alpha \bullet u \oplus \alpha \bullet v$
9) distributividad de la suma de escalares por vector: $(\alpha + \beta) \bullet u = \alpha \bullet u \oplus \beta \bullet u$
10) existencia de *idéntico* (unidad: *1*) para el producto: $\mathit{1} \bullet u = u$; $\forall\, u \in \mathbf{V}$

Def 2 : [dimensión de un espacio vectorial]

- Si existe $\mathbf{S} \subset \mathbf{V} \,/\, \mathbf{S}$ *finito* y tal que **S** *genera* **V** (o sea, que todo elemento de **V** se puede escribir como combinación lineal de elementos de S) → **V** se dice finito dimensional .
- si no existe **S** finito que genere **V**→ **V** se dice infinito dimensional .

Def 3 : [**BASE**] **V** espacio vectorial ; **B** $\subset$ **V**
B es BASE de V $\Leftrightarrow$ **es el *menor* subconjunto de V que genera V**

Teorema 1: Si **V** es finito dimensional, **V** admite una base; o sea, existe **B** $=\{e_1,e_2, \ldots,e_n\}$ tal que $\forall x \in V \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} x_k . e_k$ y **B** es el *menor* subconjunto de **V** con tal propiedad.

Teorema 2: si **B** $=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base del espacio vectorial V, entonces **B** es un conjunto l.i. (linealmente independientes) y "**n**" es el máximo número de vectores l.i. en V.

Observación 1: vemos entonces que el número de elementos de la base de un espacio vectorial finito dimensional es una **propiedad intrínseca, característica** de cada espacio.

Def 4 : [**DIMENSIÓN**].

- Si V es finito dimensional, llamamos dimensión al número de elementos de la base. Lo indicamos: dim V = n.
- Si V es infinito dimensional decimos que tiene dimensión infinita. (dim V = ∞).

Observación 2 : si dim V= n y B base de V, del teorema 1 tenemos que, **todo** $x \in$**V admite una representación como c.l. de elementos de B** y del teor. 2 y la definición de **l.i**. tenemos que**, la representación como c.l. de elementos de B**, **es única.** Luego podemos identificar cada $x \in$**V** con su representación según la base **B**.

Bibliografía

CALCULO. CONCEPTOS Y CONTEXTOS, Stewart J., International Thornpson Editores, México (1999)

CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA, Purcell E. y Valberg D, Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1992)

CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA, Edwards C. H. y Penney D E, Prentice- Hall Hispanoamericana, México (1987)

CALCULUS (Vol. I y II), Apóstol T., Ed. Reverte, España (1973)

ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES@, Edwards C. H. y Penney D.F. Prentice-Hall Hispanoamericana, México (1993)

Edición: Marzo de 2014.
4º Edición: Marzo de 2022.
Este texto forma parte de la Iniciativa Latinoamericana de Libros de Texto abiertos (LATIn), proyecto financiado por la Unión Europea en el marco de su Programa ALFA III EuropeAid.