

CENTRO UNIVERSITARIO ROSARIO DE INVESTIGACIONES HIDROAMBIENTALES

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA-EIC

ICDH-D 19-4_Rev00

UNIDAD 4

DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES

Pedro A. Basile

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2019



Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

UNIDAD 4

DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1. | INTRODUCCIÓN..... | 4 |
| 2. | ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL FLUJO DE FLUIDOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES.. | 4 |
| 3. | SIGNIFICADO DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES. LEYES DE SEMEJANZA DINÁMICA..... | 5 |
| 4. | FLUJOS LAMINARES PERMANENTES Y UNIFORMES..... | 8 |
| 4.1 | Flujo en conductos a presión. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales | |
| 4.2 | Flujo paralelo a superficie libre en un canal rectangular ancho. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales en vertical | |
| 5. | CONCEPTO DE CAPA LÍMITE..... | 15 |
| 6. | INESTABILIDAD DEL FLUJO LAMINAR Y ORIGEN DE LA TURBULENCIA..... | 15 |
| 7. | CAPA LÍMITE LAMINAR Y TURBULENTO A LO LARGO DE UNA PLACA PLANA..... | 17 |
| 8. | FLUJOS TURBULENTOS: CARACTERÍSTICAS GENERALES..... | 20 |
| 8.1 | Integración temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes. Ecuaciones de Reynolds | |
| 8.2 | Ecuaciones de Reynolds en función del tensor de tensiones medio y del tensor de tensiones total medio | |
| 9. | FLUJO TURBULENTO PERMANENTE Y UNIFORME..... | 25 |
| 9.1 | Tensiones turbulentas en función del flujo medio | |
| 9.2 | Flujo paralelo a superficie libre en un canal rectangular ancho. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales en vertical | |
| 9.2.1 | Distribución de velocidades en contornos hidráulicamente lisos | |
| 9.2.2 | Consideraciones sobre el espesor δ de la subcapa viscosa | |
| 9.2.3 | Distribución de velocidades en contornos hidráulicamente rugosos | |
| 9.2.4 | Número de Reynolds del contorno. Límites de comportamiento | |
| 9.2.5 | Régimen de transición | |
| 9.2.6 | Velocidad media en la vertical | |
| 9.3 | Coefficientes globales de resistencia al escurrimiento para flujo turbulento completamente desarrollado | |
| 10. | DINAMICA DE LA TURBULENCIA..... | 37 |
| 10.1 | Balance de energía cinética del flujo medio | |
| 10.2 | Balance de energía cinética de la turbulencia | |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 10.3 | Escalas de la turbulencia | |
| 10.4 | Modelos de cierre de la turbulencia para RANS | |
| 10.4.1 | Modelo de 0-Ecuaciones | |
| 10.4.2 | Modelo de 1-Ecuación | |
| 10.4.3 | Modelos de 2-Ecuaciones | |
| 10.4.4 | Modelos de orden superior | |
| 10.5 | Modelo LES (Large Eddy Simulation) | |
| 10.6 | Distribución de intensidad de turbulencia en vertical | |
| 10.7 | Distribución de viscosidad cinemática turbulenta en vertical | |
| 11. | INTEGRACIÓN EN VERTICAL DE LAS ECUACIONES DE REYNOLDS. MODELO HIDRODINÁMICO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL (2D-H)..... | 51 |
| 12. | ECUACIONES DE BARRÉ DE SAINT VENANT. MODELO HIDRODINÁMICO UNIDIMENSIONAL (1D)..... | 53 |
| 13. | INTEGRACIÓN DEL MODELO 1D EN EL TRAMO. MODELO HIDROLÓGICO CERODIMENSIONAL (0D)..... | 54 |
| 14. | SÍNTESIS DE MODELOS HIDRODINÁMICOS OBTENIDOS A PARTIR DE NAVIER-STOKES..... | 55 |
| 15. | BREVE COMENTARIO SOBRE MODELOS PARA FLUJO HÍDRICO EN MEDIOS POROSOS..... | 57 |
| 16. | INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN FÍSICA..... | 58 |
| 16.1 | Relaciones de escala para modelos físicos Froudianos | |
| 16.1.1 | Hidrodinámica | |
| 16.1.2 | Conceptos sobre modelación física a fondo móvil | |
| 16.1.2.1 | Relación de escala para el transporte de fondo | |
| 16.1.2.2 | Relación de escala para el tiempo morfológico | |
| 17. | BIBLIOGRAFÍA..... | 69 |

UNIDAD 4

DINÁMICA DEL FLUJO DE FLUIDOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES

1. INTRODUCCIÓN

En esta Unidad se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de fluidos viscosos incompresibles. Se analiza el significado dimensional de las mismas, introduciendo el concepto de semejanza dinámica a partir de dichas ecuaciones. Se describen los flujos laminares paralelos y de lento escurrimiento que surgen como casos particulares de las ecuaciones de Navier-Stokes. Se presentan las distribuciones de velocidades y tensiones de corte en flujos laminares permanentes uniformes, considerando conductos circulares a presión, como así también, flujos paralelos a superficie libre. Se introducen los conceptos de capa límite e inestabilidad del flujo laminar y consecuente origen de la turbulencia. Se describe conceptualmente el desarrollo de capa límite laminar y turbulenta a lo largo de una placa plana. Se derivan las ecuaciones de Reynolds, mediante integración de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre el período de la turbulencia (RANS 3D), donde aparece el concepto de tensiones turbulentas (o tensiones adicionales de Reynolds), las cuales originan nuevas incógnitas y, para poder cerrar el sistema, deben ser vinculadas con las magnitudes del flujo medio. Se deriva la ley universal de distribución de velocidades y la distribución de tensiones para el flujo turbulento permanente y uniforme. Se determinan expresiones para calcular la velocidad media en flujos turbulentos a partir del perfil logarítmico de distribución de velocidades. Se analiza la dinámica de la turbulencia, sus escalas (macro y micro) y se presentan algunos modelos de cierre para las ecs. de Reynolds (RANS 3D). Se presentan las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica en su versión bidimensional en horizontal (2D-H), que se obtienen a partir de la integración de las ecuaciones de Reynolds simplificadas 2D sobre la profundidad de flujo. Se presentan las ecuaciones de Saint Venant para el flujo unidimensional (1D), impermanente, gradualmente variado, obtenidas a partir de las ecuaciones 2D-H integradas sobre el ancho. Se presentan las ecuaciones del modelo cero-dimensional (0D) obtenidas a partir de la integración de las ecuaciones 1D sobre el tramo de propagación. Se realiza una síntesis de los modelos hidrodinámicos para flujos a superficie libre obtenidos a partir de las Ecuaciones de Navier-Stokes y se describen brevemente los modelos para el flujo de agua en medios porosos, observando la posibilidad de derivación de los mismos a través de sucesivas integraciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por último, se realiza una introducción a la modelación física, hidrodinámica a fondo fijo y conceptos sobre modelación física a fondo móvil.

2. ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL FLUJO DE FLUIDOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES

La ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso del flujo de fluidos viscosos incompresibles proporcionan cuatro ecuaciones escalares y tienen como incógnitas a la presión p y a las tres componentes del vector velocidad u . Dichas ecuaciones se expresan en notación tensorial como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (2)$$

y en notación vectorial:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

3. SIGNIFICADO DIMENSIONAL DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES. LEYES DE SEMEJANZA DINÁMICA

La ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S) para el flujo de un fluido viscoso incompresible (1) y (2), se pueden escribir, introduciendo en (2) las fuerzas de cuerpo debidas a la gravedad y reordenando, como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (4)$$

En el miembro izquierdo, el primer término representa la aceleración local y el segundo la aceleración convectiva, ambos términos representan las fuerzas de inercia. En el miembro derecho, el primer término representa las fuerzas de presión, el segundo las fuerzas viscosas y el tercero las fuerzas de gravedad.

Las variables que intervienen en las ecuaciones de Navier-Stokes puede ser adimensionalizadas mediante:

$$u_i^* = \frac{u_i}{u_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L}, \quad t^* = \frac{t u_0}{L} \quad (5)$$

donde u_0 es una velocidad de referencia y L una longitud característica del sistema en estudio.

Reemplazando las expresiones (5) en (4) se obtiene:

$$\frac{u_0^2}{L} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right) = -\frac{u_0^2}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu u_0}{L^2} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - g \frac{\partial z^*}{\partial x_i^*} \quad (6)$$

multiplicando cada término de (6) por L/u_0^2 , se obtienen las ecuaciones dinámicas de Navier-Stokes escritas en forma adimensional:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{u_0 L} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - \frac{gL}{u_0^2} \frac{\partial z^*}{\partial x_i^*} \quad (7)$$

En (7) se observan dos factores adimensionales:

$$\frac{\nu}{u_0 L} = \frac{1}{Re} \quad \text{y} \quad \frac{gL}{u_0^2} = \frac{1}{F^2} \quad (8a),(8b)$$

Dichos factores describen características bien definidas del flujo considerado: (8a) es el inverso del número de Reynolds, el cual representa la importancia de las fuerzas inerciales respecto a las fuerzas viscosas:

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho L^3 (u/t)}{\mu u L} = \frac{\rho L^3 u}{L/u \mu u L} = \frac{u L}{\nu}$$

y (8b) es el inverso del número de Froude al cuadrado, el cual representa la importancia de las fuerzas de inercia respecto a las fuerzas de gravedad:

$$F^2 = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas de gravedad}} = \frac{\rho L^3 (u/t)}{\rho g L^3} = \frac{\rho L^3 u}{L/u \rho g L^3} = \frac{u^2}{gL}$$

Un número de Froude (Reynolds) elevado no significa que las fuerzas de gravedad (viscosas) sean pequeñas, sino que la influencia de éstas, en las características dinámicas del flujo, es pequeña respecto a la influencia de las fuerzas de inercia. Análogamente, un número de Froude (Reynolds) bajo indica una gran influencia de las fuerzas de gravedad (viscosas) respecto a las fuerzas de inercia.

En términos de semejanza, dos flujos caracterizados por el mismo número de Reynolds presentan semejanza dinámica respecto a las fuerzas de resistencia viscosa, por lo tanto, en prototipo y modelo se debe satisfacer la relación:

$$\frac{\rho_p u_p L_p}{\mu_p} = \frac{\rho_m u_m L_m}{\mu_m} \quad (9)$$

Donde el subíndice m indica variables en el modelo y el subíndice p variables en el prototipo.

Por lo tanto, de (9): $\frac{\rho_r U_r L_r}{\mu_r} = 1$, donde $L_r = L_p/L_m$ (escala de reducción geométrica)

y en el caso de un mismo fluido en igualdad de condiciones de densidad y viscosidad ($\rho_r=1$, $\mu_r=1$) se tiene:

$$U_r = \frac{1}{L_r} \quad (10)$$

Esta relación no es compatible con la que se obtiene basándose en la semejanza dinámica de Froude (semejanza dinámica respecto a fuerzas de gravedad). Efectivamente:

$$\frac{u_p}{\sqrt{gL_p}} = \frac{u_m}{\sqrt{gL_m}} \Rightarrow U_r = \sqrt{L_r} \quad (11a),(11b)$$

Generalmente no es necesario satisfacer las dos leyes de semejanza dinámica simultáneamente, ya sea porque una fuerza (gravedad) predomina sobre la otra (viscosidad) o viceversa, ya sea porque, directamente una de las dos no interviene en el problema. Por ejemplo, en la modelación física del flujo laminar (bajos valores de Re) en un conducto o en un medio poroso, las fuerzas de gravedad pueden despreciarse, por lo tanto, la igualdad de Re en prototipo y modelo asegura la completa semejanza dinámica. Por otra parte, en la modelación física del flujo hídrico turbulento (elevados valores de Re) en un tramo de río o canal, las fuerzas viscosas pueden despreciarse, por lo tanto, la igualdad de Froude en modelo y prototipo aseguran la completa semejanza dinámica. En el apartado 16 se abordará este tema con más detalle.

Para completar los análisis descriptos en los párrafos anteriores se puede observar que, a partir de la ecuación (7), la mayor o menor importancia de los términos de fuerzas viscosas con respecto a los términos de inercia, en las ecuaciones de Navier-Stokes, dependen del valor que asume el número de Reynolds. Efectivamente, reemplazando (8a) y (8b) en (7) y reordenando se obtiene:

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial \dot{z}^*}{\partial x_i^*} = - \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \quad (12)$$

Por lo tanto, en función del valor que asume Re , se pueden distinguir dos casos límites:

Para $Re \rightarrow \infty$: tiende a cero el segundo término del miembro derecho, mientras los demás términos restan finitos. De esta manera se obtienen las ecuaciones de Euler escritas en forma adimensional. Por lo tanto, la dinámica del fluido perfecto (invíscido e incompresible) es atendible en aquellos flujos (inclusive de fluidos viscosos) donde prevalece fuertemente la fuerza de inercia sobre la resistencia viscosa. Se trata de un flujo gobernado preponderantemente por fuerzas de inercia y gravedad. Sin embargo, se debe tener en cuenta que cuando se trata de un fluido viscoso (real) la dinámica del fluido invíscido no es válida en proximidad de la superficie de contorno (pared), ya que en este caso en correspondencia de la pared se debe imponer la condición de no deslizamiento, la cual no existe en el fluido invíscido, el cual en contacto con la pared desliza con la velocidad del flujo en vez de ir a cero.

Para $Re \rightarrow 0$: la fuerza viscosa prevalece ampliamente respecto a la fuerza de inercia, de manera tal que el primer término del miembro derecho resulta despreciable en comparación con el segundo. Despreciando los términos de inercia se obtienen las ecuaciones que gobiernan la dinámica de flujos extremadamente lentos (creeping flows) de los fluidos viscosos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (p + \gamma z) = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (13)$$

Además de dichos flujos lentos, que se presentan para valores bajísimos de Re , existen por ejemplo los flujos laminares paralelos, constituidos por el movimiento rectilíneo unidimensional bien ordenado de estratos en forma de láminas; para los cuales solo $u_1 = u \neq 0$, la cual a su vez es constante en la dirección del flujo y por lo tanto, todos los términos de inercia son nulos sin que Re sea bajísimo como en el caso de un creeping flow.

4. FLUJOS LAMINARES PERMANENTES Y UNIFORMES

4.1 Flujo en conductos a presión. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales

Como ejemplo importante de flujo laminar consideremos un conducto cilíndrico de diámetro: $d = 2 r_0$, cuyo eje coincide con el eje coordenado x y los ejes coordenados y, z están contenidos en el plano de una sección transversal genérica (ver Figura 1).

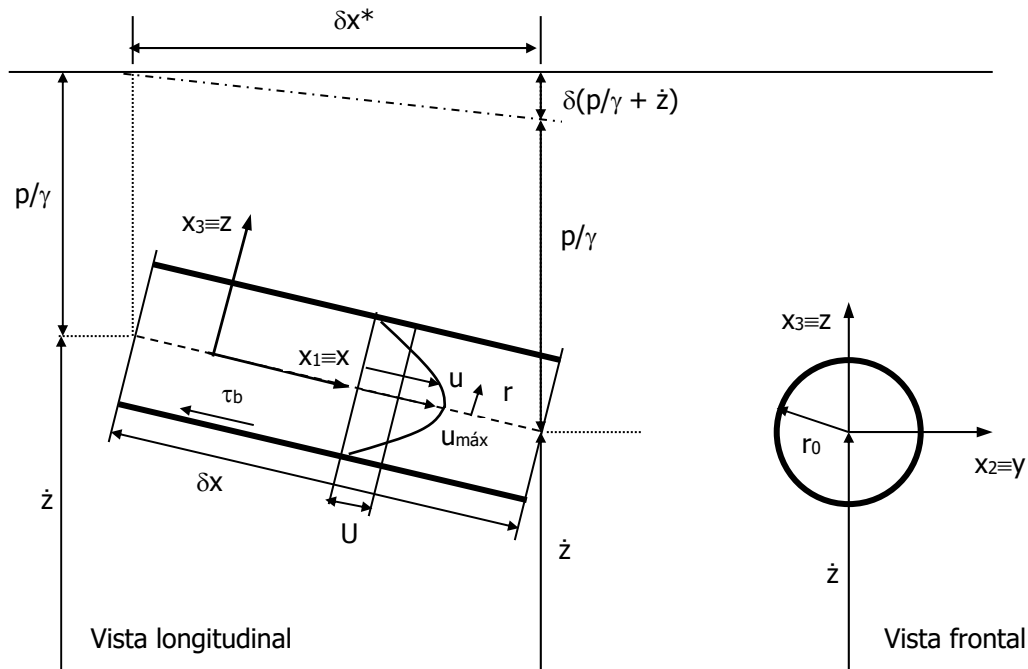


Figura 1.

El flujo es rectilíneo unidireccional bien ordenado, entonces las componentes del vector velocidad $v=u_2$ y $w=u_3$ son nulas, la única componente no nula es $u=u_1$. Además, como el flujo es permanente, la aceleración local es nula y, dado que es también uniforme, la aceleración convectiva es nula. Por lo tanto, $u=u_1$ no varía ni en el tiempo ni en la dirección $x=x_1$, solo puede variar en las direcciones $y=x_2$ y $z=x_3$, determinando de esta manera un sólido de revolución de velocidades con simetría radial. Por lo tanto, el vector velocidad se expresa como:

$$u_i = (u_1(x_2, x_3), 0, 0) = (u(y, z), 0, 0) \quad (14)$$

De esta manera, las ecuaciones de Navier-Stokes expresadas por (4) se reducen a:

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma z) = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma z) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma z) = 0 \quad (17)$$

Las últimas dos ecuaciones dan como resultado la distribución hidrostática de la presión en los planos normales al eje del conducto, como era de esperarse dado el carácter rectilíneo unidireccional del flujo.

La solución de la primera ecuación, que satisface la condición $u=0$ para $r=r_0$, es decir, la condición de no deslizamiento en la pared, es:

$$u = \frac{y^2 + z^2 - r_0^2}{4\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma z) = \frac{\gamma}{4\mu} (y^2 + z^2 - r_0^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) \quad (18)$$

Para una inclinación pequeña del conducto, el gradiente de la cota piezométrica es igual y de signo contrario a la pendiente piezométrica S , es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) = -S \quad (19)$$

Por lo tanto, considerando que el radio genérico r es: $r^2=y^2+z^2$, la (18) puede escribirse como:

$$\boxed{u = -\frac{\gamma S}{4\mu} (r^2 - r_0^2)} \quad (20)$$

La velocidad máxima se verifica en $r=0$, es decir, en correspondencia del eje del conducto:

$$u_{\text{máx}} = \frac{\gamma S r_0^2}{4\mu} \quad (21)$$

El valor de la velocidad media U se obtiene considerando la altura media del sólido de revolución de velocidades, que tiene por base una sección del conducto y cuya superficie está constituida por los extremos de los valores de velocidad u considerados a partir de dicha base. Se trata de un paraboloide de revolución cuya genérica sección axial es dada por la ecuación (20), con una altura media igual a la mitad de la altura máxima dada por (21), por lo tanto:

$$U = \frac{1}{2} u_{\text{máx}} = \frac{\gamma S r_0^2}{8\mu} \quad (22)$$

De esta manera, el valor del caudal es:

$$Q = U \pi r_0^2 = \frac{\gamma S \pi r_0^4}{8\mu} \quad (23)$$

Esta es la fórmula que obtuvo experimentalmente Poiseuille (1841) investigando el flujo de agua en conductos de pequeños diámetros (tubos capilares).

Realizando un balance de las fuerzas de presión y gravedad se obtiene la tensión tangencial o de corte sobre el contorno del conducto circular de área A y perímetro P :

$$\tau_b = \rho g \frac{A}{P} S = \rho g \frac{r_0}{2} S \quad (24)$$

El equilibrio de fuerzas requiere la presencia de una tensión τ a lo largo de una superficie de radio genérico r , análoga a la que se manifiesta sobre el contorno, por lo tanto, para un radio genérico r se tiene:

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} S \quad (25)$$

Es decir, la tensión tangencial es nula en correspondencia del eje del conducto y crece linealmente hasta el valor τ_b en el contorno. Consecuentemente, la distribución de tensiones sigue una ley lineal expresada por:

$$\tau = \tau_b \frac{r}{r_0} = \tau_b \left(\frac{r_0 - z}{r_0} \right) = \tau_b \left(1 - \frac{z}{r_0} \right) \quad (26)$$

donde $z=r_0-r$ es la distancia desde el contorno del conducto hasta el eje (ver Figura 2).

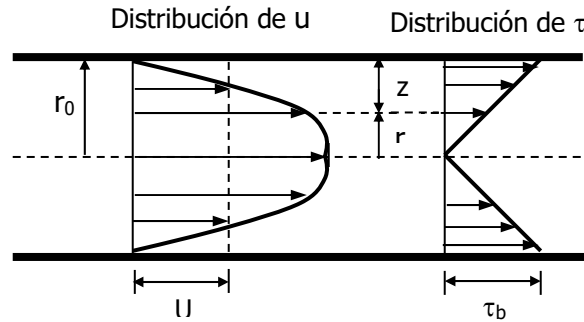


Figura 2. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales en un conducto circular en régimen de flujo laminar.

Observación

El flujo laminar en conductos cilíndricos mantiene sus características para valores del número de Reynolds, referido al diámetro del conducto, $Re=UD/\nu \leq 2000$. En el rango $Re \sim 2000-2400$, denominada zona crítica, el flujo laminar es muy inestable, produciéndose la transición a flujo turbulento. Para $Re > 4000$ el flujo es definitivamente turbulento. Considerando, por ejemplo:

$$U=1 \text{ m/s}; D=0,1 \text{ m}; \nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \rightarrow Re=10^5 \gg 4000$$

Es decir, en muchas aplicaciones de ingeniería (redes de distribución de agua potable, acueductos, etc.) el flujo es siempre turbulento.

4.2 Flujo paralelo a superficie libre en un canal rectangular ancho. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales en vertical

Consideremos primero las ecuaciones de N-S (2) expresadas en función del tensor de tensiones (ver Capítulo 2). Con la ayuda de la ecuación de continuidad, el término de esfuerzos viscosos puede expresarse como:

$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (27)$$

Reemplazando (27) en (2) y reordenando se obtienen las ecuaciones de N-S expresadas como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (28)$$

donde τ_{ij} es el tensor de tensiones, constituido por 9 componentes, el cual queda expresado como:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (29)$$

donde S_{ij} es el tensor de velocidad de deformación (ver Unidad 2) y δ_{ij} es el delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \rightarrow i = j \\ 0 & \rightarrow i \neq j \end{cases}$$

Consideremos ahora el caso de un flujo laminar permanente y uniforme que se desarrolla en un canal rectangular ancho, inclinado un ángulo pequeño ϕ respecto a la horizontal, como se muestra en la Figura 3.

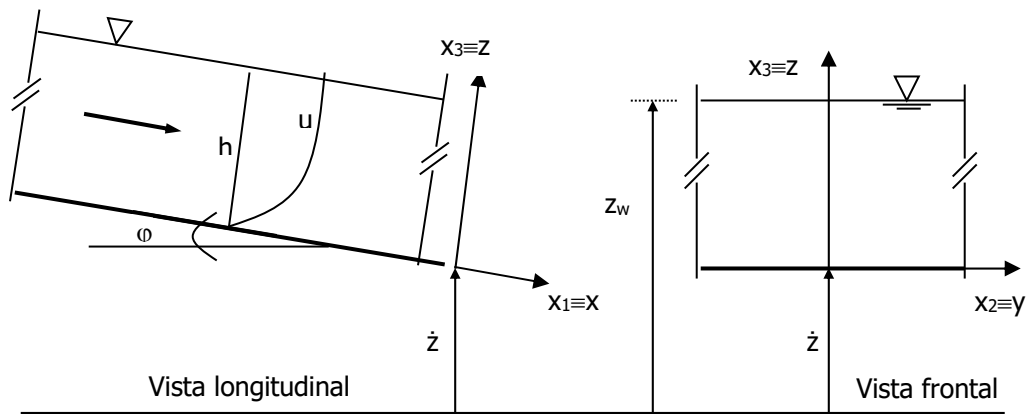


Figura 3.

El flujo es rectilíneo unidireccional bien ordenado, entonces las componentes del vector velocidad $v=u_2$ y $w=u_3$ son nulas, la única componente no nula es $u=u_1$. Además, como el flujo es permanente, la aceleración local es nula y, dado que es también uniforme, la aceleración convectiva es nula. Por lo tanto, $u=u_1$ no varía ni en el tiempo ni en la dirección $x=x_1$. Además, se supone que no existe efecto de las paredes laterales (muy ancho) entonces u tampoco varía con $y=x_2$. Es decir, u solo puede variar en la dirección $z=x_3$, determinando de esta manera un perfil en vertical como se muestra en la Figura 3. Por lo tanto, el vector velocidad instantánea tiene por componentes:

$$u_i = (u_1(x_3), 0, 0) = (u(z), 0, 0) \quad (30)$$

Las componentes no nulas del tensor de tensiones (29) que intervienen en el problema de la distribución de velocidades en vertical son:

$$\tau_{13} = \mu \frac{du_1}{dx_3} = \mu \frac{du}{dz} = \tau \quad (31)$$

$$\tau_{33} = -p \quad (32)$$

(Recordar que debido a la simetría del tensor de tensiones $\tau_{31}=\tau_{13}$ y $\tau_{11}=\tau_{22}=-p$)

Considerando que las fuerzas de cuerpo se deben a la gravedad, las componentes del vector f_i se expresan mediante la ecuación (42) obtenida en el Unidad 2:

$$f_i \equiv (f_1, f_2, f_3) = (gS_b, 0, -g) \quad (33)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes (28) se reducen a:

$$i = 1 \quad 0 = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dz} + gS_b \quad (34)$$

$$i = 2 \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \quad (35)$$

$$i = 3 \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g \quad (36)$$

donde S_b es la pendiente del fondo. La (35) establece que la presión es constante en la dirección transversal y. Integrando (34) y (36) imponiendo respectivamente tensión de corte y presión nulas en la superficie libre $z=h$, se obtiene:

- Variación lineal de tensión de corte en la vertical:

$$\tau(z) = \rho g (h - z) S_b = \tau_b \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad (37)$$

donde τ_b : tensión de corte sobre el fondo, expresada como:

$$\tau_b = \rho g h S_b \quad (38)$$

- Variación lineal de presión en la vertical (presión hidrostática):

$$p = \rho g (h - z) = \rho g h \left(1 - \frac{z}{h} \right) \quad (39)$$

Igualando (31) y (37), es decir, vinculando la tensión de corte con el gradiente de velocidad, e integrando, se obtiene el perfil parabólico de distribución de velocidades en la vertical:

$$u(z) = \frac{gS_b}{2\nu} (2hz - z^2) \quad (40)$$

La expresión de la velocidad media en la vertical U es:

$$U = \frac{1}{h} \int_{z=0}^{z=h} u(z) dz \quad (41)$$

Por lo tanto, reemplazando (40) en (41) e integrando se obtiene la velocidad media en la vertical, U:

$$U = \frac{gS_b}{3\nu} h^2 \quad (42)$$

El caudal específico o caudal por unidad de ancho q (m²/s) es:

$$q = Uh = \frac{gS_b}{3\nu} h^3 \quad (43)$$

En la Figura 4 se representan esquemáticamente las distribuciones de velocidad y tensiones tangenciales o de corte en vertical.

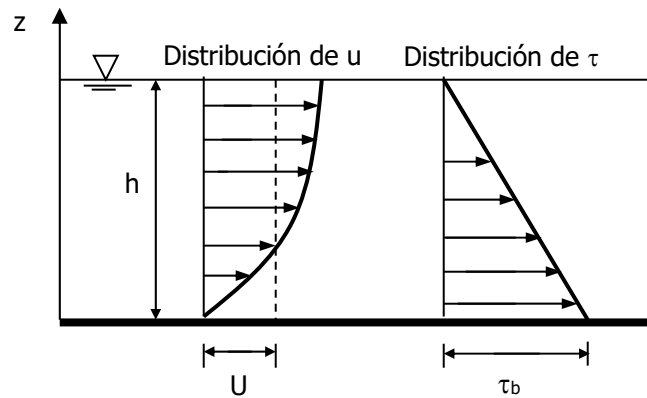


Figura 4. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales en un canal ancho en régimen de flujo laminar.

Observación

En canales abiertos la transición entre flujo laminar – turbulento se observa para valores de Re comprendidos entre: $500 \leq Uh/\nu \leq 12500$. Si consideramos:

$$U=1 \text{ m/s, } h=1 \text{ m, } \nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \rightarrow Re=10^6$$

Es decir, el valor de Re es varios órdenes de magnitud mayor que el valor correspondiente a la transición (pasaje de laminar a turbulento). Por lo tanto, el flujo laminar es prácticamente inexistente en canales abiertos.

5. CONCEPTO DE CAPA LÍMITE

Vimos en los puntos anteriores algunas aplicaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso de flujos puramente viscosos, es decir, cuando (para flujos laminares paralelos bien ordenados o en el caso de $Re \rightarrow 0$) los términos de inercia pierden importancia respecto a los términos asociados a las fuerzas de origen viscoso. Por otra parte, en el punto 3 se vio que las soluciones para fluidos perfectos son válidas, aún para el flujo de fluidos viscosos, cuando los términos de fuerzas viscosas resultan despreciables en comparación con los términos de inercia, (es decir, en el caso de $Re \rightarrow \infty$). Sin embargo, en este último caso (cuando se considera un fluido viscoso), resultaría una anomalía física el hecho que, en correspondencia del contorno, la velocidad tenga un valor finito en contacto con la pared y no asuma el valor cero como indica la condición de no deslizamiento para los fluidos viscosos reales.

Prandtl (1904) observó que, para un cuerpo perfilado que se desplaza en un fluido viscoso, el campo de flujo (para números de Reynolds elevados) tiene el carácter de flujo irrotacional, excepto en una zona limitada cerca del contorno, denominada capa límite, a través de la cual se verifica el pasaje de la velocidad gobernada por el flujo irrotacional externo al valor nulo que debe necesariamente asumir en contacto con el contorno. En el interior de la capa límite preponderan las fuerzas viscosas hasta que no se superan determinados límites de estabilidad, por lo tanto, se denomina capa límite laminar o viscosa. Superados dichos límites de estabilidad el flujo en la capa límite se transforma en turbulento y consecuentemente, se denomina capa límite turbulenta.

La observación de Prandtl es importante porque valida los procedimientos basados en la hipótesis de irrotacionalidad del campo de flujo, que permite utilizar el abordaje de flujo a potencial de la velocidad (visto en la Unidad 3), el cual será correcto en la mayor parte del campo de flujo con excepción de una zona cercana al contorno.

6. INESTABILIDAD DEL FLUJO LAMINAR Y ORIGEN DE LA TURBULENCIA

En ambientes naturales, el flujo laminar analizado en los puntos anteriores se presenta en algunas situaciones particulares, por ejemplo, en el caso del flujo de agua en un medio poroso, donde la velocidad es extremadamente baja y la longitud característica es del orden de la dimensión de los poros de la matriz de suelo. Por el contrario, para la mayoría de los flujos a superficie libre en ambientes naturales, el flujo laminar es prácticamente inexistente.

Justamente, apenas los efectos de las fuerzas de inercia se vuelven importantes en comparación con las fuerzas viscosas, el flujo de un fluido viscoso (real) no se desarrolla más en estratos paralelos bien ordenados y regulares, sino que asume un carácter desordenado e irregular. Tal situación fue puesta en evidencia por Reynolds (1883) mediante sus clásicos experimentos.

En dichos experimentos se constató que el pasaje de flujo laminar a flujo turbulento es caracterizado por el número de Reynolds (ya introducido en el punto 3) que proporciona la relación entre las fuerzas inerciales (que tienden a exaltar cualquier perturbación que afecte el campo de flujo) y las fuerzas viscosas (que tienden a amortiguar dichas perturbaciones). Para $Re_c=2000-2400$ cualquier perturbación del flujo, inclusive capaz de producir una ondulación momentánea de las líneas de corriente, es amortiguada en un cierto tiempo. Al contrario, para $Re>Re_c$, el flujo laminar es extremadamente inestable y basta una mínima perturbación para hacerlo pasar definitivamente a flujo turbulento.

Para explicar conceptualmente el origen del flujo turbulento consideremos la esquematización de dos masas fluidas que fluyen con velocidades distintas, tal como se muestra en la Figura 5.

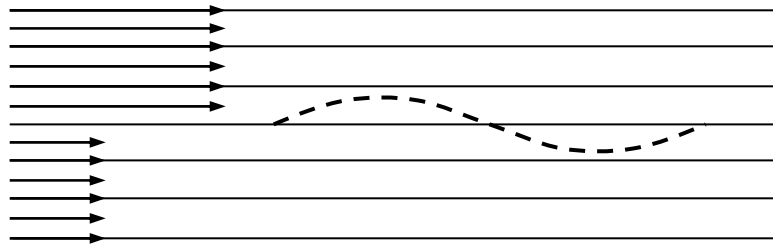


Figura 5.

Supongamos que "perturbamos" la línea de separación entre las dos masas fluidas como se indica en línea de trazos en la Figura 5. De esta manera, se crea un movimiento ondulatorio y la velocidad varía localmente, aumentado donde las líneas de corriente se acercan y disminuyendo donde se alejan. Si las fuerzas inerciales prevalecen sobre las fuerzas viscosas el fenómeno de perturbación tiende a aumentar y exaltarse, dando origen a la turbulencia, indicada esquemáticamente en la Figura 6 con el surgimiento de un remolino en el seno del fluido. En el caso contrario, es decir, cuando prevalecen las fuerzas viscosas respecto a las inerciales, el fenómeno tiende a amortiguarse y desaparecer, como se indica en la Figura 7.

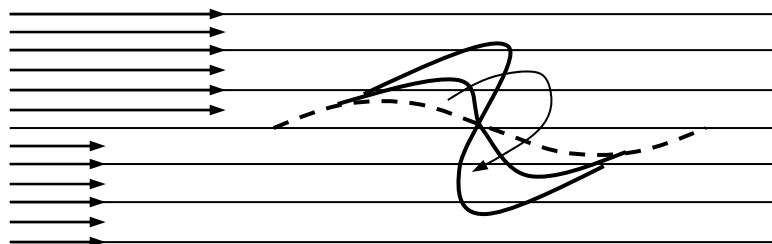


Figura 6.

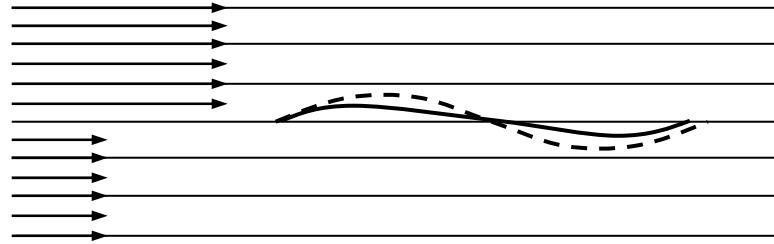


Figura 7.

La tendencia a la inestabilidad, es decir, la tendencia a formar remolinos o torbellinos en el seno del fluido y desordenar el campo de flujo, será mayor cuanto mayor sea el gradiente de velocidad entre las dos masas fluidas. Por otra parte, la cercanía de una pared o fondo fijo constituirá un obstáculo para la exaltación de la perturbación. Entran en juego, además, la densidad del fluido y la viscosidad. Podemos, por lo tanto, definir un coeficiente adimensional de "inestabilidad" (propuesto por Rouse): $X = X(\rho, \mu, du/dz, z)$ que caracteriza la importancia relativa de las variables que intervienen en la formación de los remolinos:

$$X = \frac{\rho (du/dz) z^2}{\mu} \quad (44)$$

Veamos el significado físico de esta magnitud, para lo cual examinamos el flujo laminar y la distribución de velocidad en proximidad de una pared, como se esquematiza en la Figura 8. La pared tiende a estabilizar el flujo, en particular, para $z=0$ tenemos $X=0$. El coeficiente X admite un máximo a una cierta distancia de la pared, donde tanto z como el gradiente de velocidad du/dz alcanzan valores elevados. Esta es la región donde surgen los remolinos cuando X supera un cierto valor crítico, que de acuerdo a Rouse es $X \approx 500$.

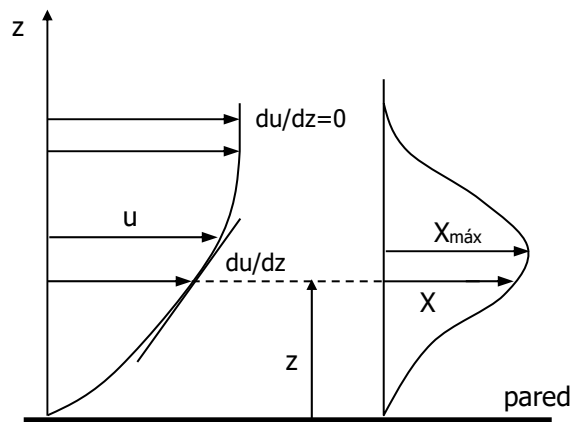


Figura 8.

7. CAPA LÍMITE LAMINAR Y TURBULENTO A LO LARGO DE UNA PLACA PLANA

Consideremos una placa plana fija, de pequeño espesor, que es investida por un flujo que presenta una distribución de velocidades uniforme u_0 como se indica en la Figura 9.

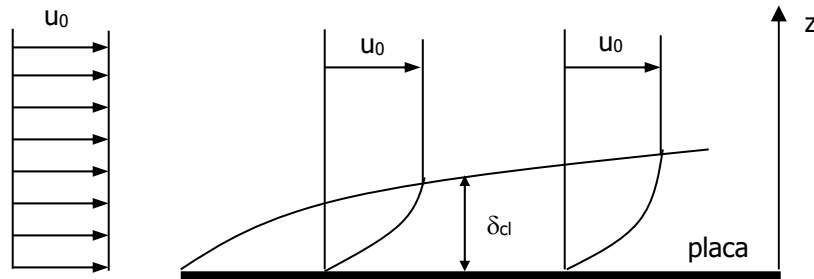


Figura 9. Placa plana envestida por una distribución de velocidad u_0 .

Dado el pequeño espesor de la placa, el campo de flujo no resultará en general perturbado por su presencia, salvo en proximidad de la pared debido a la formación de una capa límite, que en la parte inicial será laminar. Llamamos δ_{cl} a la altura de esta capa, entendiendo que dicha altura representa la distancia vertical a partir de la pared a la cual la velocidad es 1% inferior a la que presenta el flujo externo no perturbado (u_0). La unión de los puntos donde termina la capa límite marca la frontera entre el flujo laminar viscoso interior a la misma y el flujo externo. En tales puntos las tensiones tangenciales de origen viscoso (que prevalecen en el interior) y las fuerzas de inercia (que prevalecen en el flujo exterior) son del mismo orden de magnitud.

En el interior de la capa límite y en proximidad de la placa, en virtud del gradiente de velocidad (curvatura del perfil de velocidades) y de la viscosidad del fluido, se crea un esfuerzo tangencial de origen viscoso verificándose un efecto de retardo entre los distintos estratos de fluido en las inmediaciones de la placa. A medida que se avanza sobre la placa el gradiente de velocidad y por lo tanto el retardo se difunden hacia zonas no inmediatamente próximas a la placa, es decir, se produce el crecimiento en la altura de la capa límite.

Por lo tanto, en el interior de la capa límite se individualiza una zona, para ordenadas muy pequeñas, en la cual el coeficiente de inestabilidad X es inferior al crítico y de esta manera el flujo es laminar (lo cual se debe sustancialmente al efecto estabilizador que ejerce la pared sobre el fluido). A medida que se avanza sobre la placa, las ordenadas aumentan (la distancia a la pared aumenta) y X asume valores superiores al crítico, razón por la cual el flujo laminar en la capa límite se inestabiliza dando origen al flujo turbulento, que coexiste con el flujo laminar en una zona de transición, más allá de la cual el flujo turbulento se encuentra totalmente establecido, subsistiendo una subcapa viscosa en proximidad de la placa de altura δ , tal como se muestra en la Figura 10.

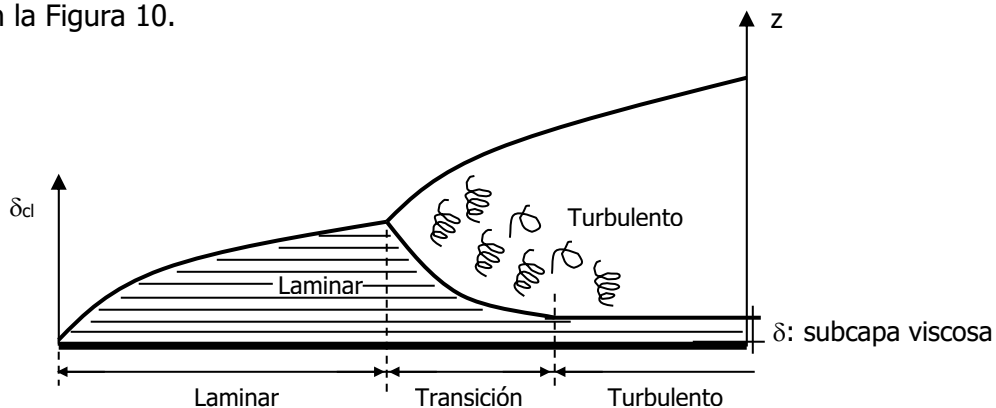


Figura 10. Capa límite laminar y turbulenta.

Veamos algunos ejemplos del desarrollo de una capa límite en el tramo inicial de un conducto circular y el posterior establecimiento de flujo laminar y turbulento. Suponemos que el conducto es alimentado desde un reservorio y la embocadura del conducto se encuentra bien perfilada.

Considerando un conducto de sección pequeña, a partir de la embocadura se establece una capa límite que crece progresivamente desde la pared al interior del conducto, como muestra la Figura 11. El núcleo central se va reduciendo hasta que desaparece cuando las dos capas límites laminares se unen y por lo tanto tenemos flujo laminar establecido, con distribución de velocidades parabólica dada por la ley de Poiseuille (ecuación (20)). La longitud L que se necesita para que el flujo laminar sea completamente establecido es función del número de Reynolds y del diámetro del conducto: $L=0,058 Re d$. Para $Re=(Ud/\nu) \leq 2000$ se obtiene que la longitud es $L \leq 120 d$ aproximadamente.

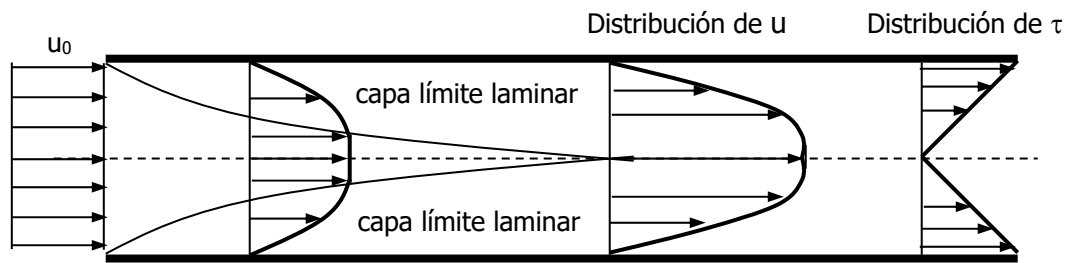


Figura 11. Establecimiento del régimen laminar en un conducto circular. Unión de la capa límite laminar.

Si el conducto tiene sección suficientemente grande la capa límite laminar se inestabiliza y se origina la turbulencia antes de que se unan las capas límites laminares (ver Figura 12), por lo tanto, tendremos flujo turbulento y distribución de velocidades logarítmica. La longitud a la cual el flujo turbulento se encuentra completamente desarrollado o establecido es función del número de Reynolds y del diámetro del conducto: $L=4,4 Re^{(1/6)} d$. La distribución de velocidades en un flujo turbulento no sigue una ley parabólica, como en el caso de flujo laminar, sino que como veremos más adelante, sigue una ley logarítmica.

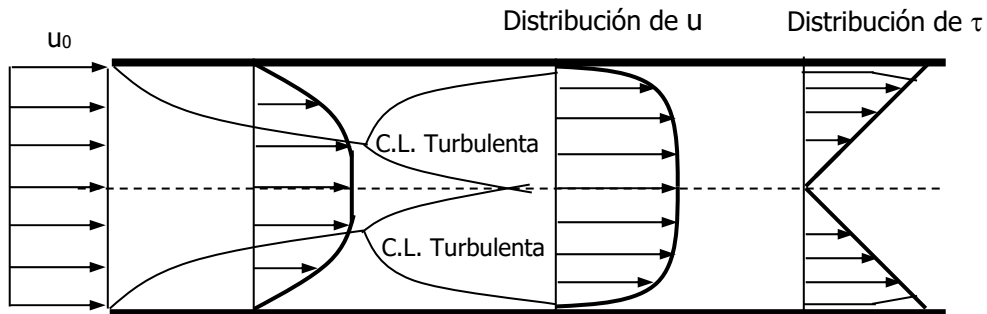


Figura 12. Establecimiento del régimen turbulento en un conducto circular. Unión de la capa límite turbulenta.

8. FLUJO TURBULENTO: CARACTERÍSTICAS GENERALES

La gran mayoría de los flujos que se observan en los problemas de ingeniería son turbulentos. Algunas características que se destacan de la turbulencia son (Tennekes y Lumley, 1972):

Altos números de Reynolds: La turbulencia no es una propiedad particular del fluido, es una condición de flujo que se da para valores elevados del número de Reynolds.

Irregularidad: Se trata de un flujo irregular, aleatorio y caótico. Consiste en un campo de velocidades fluctuantes que interactúa y deriva su energía a partir del campo de flujo medio.

Multiplicidad de escalas: En el flujo turbulento existe una gran variedad de escalas de longitud (tamaños de los remolinos o vórtices) y tiempos característicos.

Fluctuaciones de vorticidad: La turbulencia se caracteriza por elevados niveles de vorticidad fluctuante tridimensional.

Difusión: Debido a la turbulencia se originan intensos procesos de mezcla y se produce la difusión de momentum, temperatura, sedimentos en suspensión, etc., mucho más efectiva que la difusión molecular.

Disipación: La turbulencia es disipativa, ya que la energía cinética turbulenta se disipa bajo la influencia de la viscosidad, por lo tanto, la turbulencia no puede mantenerse por sí misma, debe derivar energía del flujo medio.

Medio continuo: Para estudiar la turbulencia vale la mecánica del medio continuo, ya que, aún la escala de longitud más pequeña de un flujo turbulento es mucho mayor que la escala molecular del fluido correspondiente.

8.1 Integración temporal de las ecs. de Navier-Stokes: Ecuaciones de Reynolds

Las ecuaciones de Navier-Stokes describen la dinámica del campo de flujo instantáneo, en la escala macroscópica más pequeña posible, de fluidos viscosos incompresibles y son válidas para flujos laminares y turbulentos. Sin embargo, debe considerarse que dichas ecuaciones son más adecuadas para representar la dinámica de flujos bien ordenados y regulares, como los flujos laminares. Mientras que, no son apropiadas para representar flujos turbulentos, entre otras cosas porque, dadas las características fluctuantes instantáneas del campo de velocidad, no es posible simular numéricamente dicho campo de flujo turbulento instantáneo en un modo económicamente razonable. Es decir, la resolución directa de las ecuaciones de N-S, para el flujo turbulento, resulta prohibitiva desde el punto de vista del tiempo y de los recursos computacionales necesarios, inclusive para problemas que presentan escalas temporales y espaciales sumamente restringidas. Por lo tanto, para flujo turbulento es necesario realizar promedios temporales (integración temporal) de las variables involucradas en las ecuaciones de N-S. De esta manera, el abordaje matemático es más accesible (y también es más accesible para nuestra mente). Tal procedimiento de integración fue propuesto por Reynolds (1895).

El término de aceleración convectiva en las ecs. de N-S (4) puede expresarse, considerando la ec. de continuidad (3), como: $u_j \partial u_i / \partial x_j = \partial u_i u_j / \partial x_j$. Por lo tanto, la ec. de continuidad y las ecs. de Navier-Stokes para un fluido viscoso incompresible se expresan como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (46)$$

En un flujo turbulento los valores locales e instantáneos de la velocidad y la presión sufren fluctuaciones irregulares y desordenadas a través del tiempo como se muestra en la Figura 13.

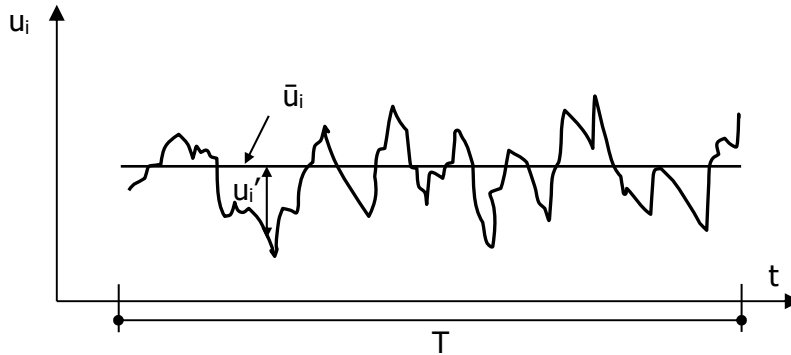


Figura 13. Representación de la evolución temporal de la velocidad instantánea en flujo turbulento.

Por lo tanto, de acuerdo a Reynolds (1895), es posible definir un flujo medio bien ordenado al que se le superponen las fluctuaciones turbulentas:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (47a)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (47b)$$

\bar{u}_i, \bar{p} : promedio temporal (representan la parte de flujo bien ordenado: flujo medio)

u'_i, p' : fluctuaciones o pulsaciones turbulentas

El promedio temporal se expresa como:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_0^T u_i dt \quad (48)$$

donde $T_1 \ll T \ll T_2$, es decir, T es un tiempo mucho mayor que la escala de tiempo de las fluctuaciones de velocidad (T_1), pero mucho menor que las escalas de tiempo asociadas a las variaciones más lentas del flujo medio (T_2). El promedio temporal de las pulsaciones turbulentas de velocidad (o presión), en dicho tiempo T , es cero:

$$\overline{u'_i} = \frac{1}{T} \int_0^T u'_i dt = 0 \quad (49)$$

Sean a y b dos variables genéricas instantáneas de flujo turbulento, las siguientes operaciones y propiedades que involucran promedios temporales de dichas variables son válidas (el promedio temporal se indica con la barra superior):

- i) El promedio temporal del valor medio de una variable (o sea, ya promediada temporalmente, la cual obviamente no varía en el período de integración, es decir, es una constante), es igual a sí mismo:

$$\overline{\overline{a}} = \overline{a} \quad , \quad \overline{\overline{b}} = \overline{b} \quad (50a)$$

- ii) El promedio temporal del valor fluctuante de una variable es cero (es la ec. (49)):

$$\overline{a'} = 0 \quad , \quad \overline{b'} = 0 \quad (50b)$$

- iii) El promedio temporal de la suma es igual a la suma de los promedios temporales:

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b} \quad (50c)$$

- iv) El promedio temporal del valor medio de una variable por un valor fluctuante es cero, ya que es similar a una constante por el promedio temporal de un valor fluctuante que es cero:

$$\overline{\overline{a} b'} = \overline{a} \overline{b'} = 0 \quad , \quad \overline{\overline{b} a'} = \overline{b} \overline{a'} = 0 \quad (50d)$$

- v) El promedio temporal del producto entre los valores fluctuantes de dos variables es distinto de cero, ya que ambos están correlacionados y son de signos opuestos:

$$\overline{a' b'} \neq 0 \quad (50e)$$

- vi) El promedio temporal del producto entre dos variables instantáneas es:

$$\overline{a b} = \overline{(\overline{a} + a')(\overline{b} + b')} = \overline{\overline{a} \overline{b} + \overline{a} b' + a' \overline{b} + a' b'} = \overline{a} \overline{b} + \overline{a' b'} \quad (50f)$$

- vii) El promedio temporal de la derivada espacial (o temporal) es igual a la derivada del promedio temporal:

$$\frac{\partial \overline{(a + b)}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \overline{(a + b)} \quad \frac{\partial \overline{(ab)}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \overline{(ab)} \quad (50g)$$

Sustituyendo (47a) en la ec. de continuidad (45) y luego integrando (promediando temporalmente) se obtiene:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\overline{\bar{u}_j + u'_j})}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0} \quad (51a,b,c)$$

Restando (51c) a (51a) se obtiene:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (51d)$$

Las ecuaciones (51c) y (51d) están indicando que tanto el flujo medio como las fluctuaciones turbulentas satisfacen la ecuación de continuidad.

Por otra parte, sustituyendo (47a) y (47b) en (46) e integrando cada término expandido (es decir, promediando temporalmente) se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) - g \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i}} \quad (52)$$

Las ecuaciones (52), obtenidas por Reynolds (1895), son idénticas a las ecuaciones (46) de Navier-Stokes, solo que representan el flujo medio y aparece un término adicional asociado a las fluctuaciones de velocidad debido a la turbulencia.

Con la ayuda de la ecuación de continuidad (51c), el término de aceleración convectiva en (52) puede expresarse como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (52a)$$

Además, multiplicando y dividiendo por ρ el segundo término del miembro derecho de (52) y reemplazando (52a) en (52) se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) - g \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i}} \quad (53)$$

En (53) se observa que el segundo término del miembro derecho está compuesto por las tensiones asociadas a la viscosidad del fluido (tensiones viscosas) y por las tensiones aparentes de Reynolds; la denominación de "aparentes" se debe a que no se trata de tensiones reales asociadas a la propiedad del fluido, sino que dependen del campo de flujo asociado a los valores pulsantes de velocidad promedio.

8.2 Ecuaciones de Reynolds en función del tensor de tensiones medio y del tensor de tensiones total medio

Las ecuaciones (53) pueden ser escritas en función del tensor de tensiones medio. En efecto,

el término de esfuerzos viscosos se expresa como en (27) pero para valores promedios. Por lo tanto, reemplazando en (54) y reordenando se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}) - g \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i} \quad (54)$$

donde $\bar{\tau}_{ij}$ es el tensor de tensiones medio:

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + 2\mu \bar{S}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (55)$$

expresado en función de la presión hidrodinámica media (donde δ_{ij} es el delta de Kronecker) y del tensor de velocidad de deformación medio \bar{S}_{ij} que brinda las tensiones de origen viscoso.

Por lo tanto, el tensor de tensiones total medio T para flujos turbulentos, queda definido mediante la contribución del tensor de tensiones medio y el tensor de tensiones turbulentas de Reynolds:

$$T_{ij} = \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (56)$$

Como mencionado anteriormente, las ecuaciones (52), (53) o (54) (idénticas a las ecs. (46) de Navier-Stokes) fueron obtenidas por Reynolds (1895) y muestran que, para el flujo turbulento, las ecuaciones de Navier-Stokes mantienen su forma siempre que se utilicen valores promedios temporales de velocidad y presión y se agreguen los esfuerzos medios turbulentos, denominados también tensiones adicionales o "aparentes" de Reynolds.

El tensor de tensiones turbulentas o tensiones adicionales de Reynolds tiene como cuadro:

$$\tau_{tij} \equiv \begin{bmatrix} \tau_{t11} & \tau_{t12} & \tau_{t13} \\ \tau_{t21} & \tau_{t22} & \tau_{t23} \\ \tau_{t31} & \tau_{t32} & \tau_{t33} \end{bmatrix} \equiv -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'_1 u'_1} & \overline{u'_1 u'_2} & \overline{u'_1 u'_3} \\ \overline{u'_2 u'_1} & \overline{u'_2 u'_2} & \overline{u'_2 u'_3} \\ \overline{u'_3 u'_1} & \overline{u'_3 u'_2} & \overline{u'_3 u'_3} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Las componentes de la diagonal principal son tensiones normales (presiones), las cuales usualmente son mucho más chicas que la presión hidrodinámica media. Las restantes son tensiones tangenciales (tensiones de corte), de las cuales solo tres son independientes ya que el tensor es simétrico. Por lo tanto, existen seis componentes independientes que se agregan como incógnitas en las ecuaciones de Reynolds.

Consecuentemente, tendremos cuatro ecuaciones disponibles (ecuación de continuidad + tres ecuaciones escalares dinámicas) para un total de diez incógnitas (una presión media, tres componentes de velocidad media y seis tensiones adicionales de Reynolds). En la modelación de la turbulencia, el problema fundamental de encontrar ecuaciones adicionales para remediar tal disparidad se denomina "problema de cierre de la turbulencia", para el cual se han propuesto distintas metodologías. Sustancialmente, la estrategia seguida por algunas metodologías ha consistido en relacionar, de alguna manera físicamente plausible, las tensiones de Reynolds con las magnitudes del flujo medio y sus gradientes. Algunos de los pioneros en esta temática fueron Boussinesq (1877) y Prandtl (1925). En particular, este último introdujo una ecuación empírica basada en el concepto de longitud de mezcla, que se describe en el próximo apartado.

Para finalizar con las ecuaciones de Reynolds, vemos que, reemplazando (56) en (54) se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - g \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (58)$$

que es otra manera de expresar las ecuaciones de Reynolds en función del tensor de tensiones total medio T.

9. FLUJO TURBULENTO PERMANENTE Y UNIFORME

9.1 Tensiones turbulentas en función del flujo medio

Las tensiones inducidas por el flujo turbulento, debido a las fluctuaciones de velocidad, pueden ser explicadas conceptualmente analizando un flujo turbulento paralelo. El elemento de área dA , ilustrado en la Figura 14a, es atravesado hacia arriba y hacia abajo de pequeñas cantidades de flujo. Si el flujo es hacia arriba (w' positiva) se produce un efecto de retardo del fluido inmediatamente superior a dA (u' negativa) y viceversa.

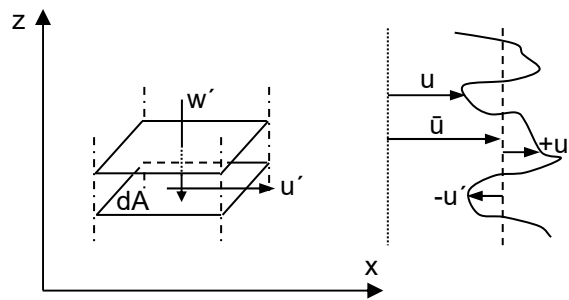


Figura 14a. Elemento fluido en el seno de un flujo turbulento paralelo.

La cantidad de movimiento (momentum) por unidad de volumen (masa específica x velocidad, considerando w' negativa, ver Figura 14a) es: $-\rho w'$. El caudal másico que atraviesa dA se expresa como: $-\rho w' dA$. El transporte de ese caudal másico infinitesimal por la velocidad u' , origina una variación de la cantidad de movimiento en dirección x (respecto a la condición media de base $\rho \bar{u}$) y una fuerza actuante sobre el plano inmediatamente inferior que resulta igual a: $dF = -\rho dA w' u'$. Por lo tanto, la tensión de corte es: $\tau_t = dF/dA = -\rho w' u'$, cuyo valor medio temporal se expresa como: $\tau_t(z) = -\rho \overline{u'w'}$.

Así como en el flujo laminar se desarrollan tensiones viscosas asociadas a la viscosidad molecular μ y al gradiente vertical de velocidad $u(z)$: $\tau = \mu(du/dz)$; puede pensarse que en el flujo turbulento las tensiones turbulentas (tensiones adicionales de Reynolds) están relacionadas a una viscosidad turbulenta y al gradiente de velocidad $\bar{u}(z)$ del flujo medio: $\tau_t = \mu_t(d\bar{u}/dz)$. Para el caso de un flujo permanente uniforme, Boussinesq (1877):

$$\tau_t(z) = -\rho \overline{u'w'} = \rho \nu_t \frac{d\bar{u}}{dz} \tag{59}$$

donde ν_t se denomina viscosidad cinemática turbulenta o viscosidad cinemática de remolino. La viscosidad dinámica turbulenta es $\mu_t = \rho \nu_t$.

Es necesario señalar que, contrariamente a μ y ν , los coeficientes de viscosidad turbulenta μ_t y ν_t no son propiedades del fluido, sino que son función de las variables del flujo.

Para evaluar ν_t y, consecuentemente, vincular las tensiones tangenciales turbulentas (asociadas a las componentes fluctuantes del campo de velocidad) con los gradientes de velocidad del flujo medio, es necesario realizar alguna hipótesis sobre éstas últimas. La más simple es la expresada por Prandtl (1925), para el caso de un flujo turbulento permanente uniforme, cuyo flujo medio sea paralelo al eje x , y presente una distribución vertical de la velocidad media temporal \bar{u} como se indica en la Figura 14b. En tal caso, las variables de flujo dependen solo de z .

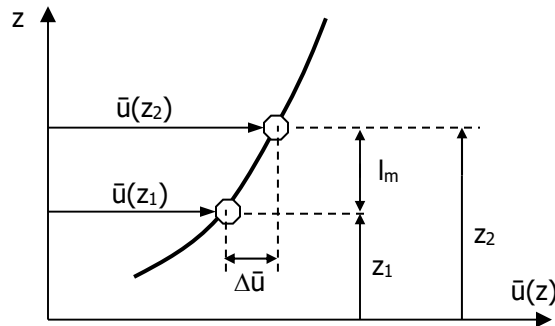


Figura 14b. Esquematización de la velocidad media temporal $\bar{u}(z)$.

Consideremos que la partícula en el nivel z_1 , debido a la fluctuación w' experimenta un desplazamiento vertical l_m . Esto crea un déficit de cantidad de movimiento $\rho \Delta \bar{u}$ en el nivel z_2 . Si la diferencia de velocidad del flujo medio $\Delta \bar{u} = \bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1)$ se estima expandiendo \bar{u} en series de Taylor truncadas al primer orden, se obtiene:

$$\rho \Delta \bar{u} \approx \rho l_m \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) \quad (60)$$

El flujo de cantidad de movimiento es $w'(\rho \Delta \bar{u})$, es decir:

$$\rho w' \Delta \bar{u} \approx \rho w' l_m \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) \quad (61)$$

El flujo de cantidad de movimiento promedio temporal se obtiene reemplazando en (61) el valor de w' por la raíz media cuadrática rmc (desvío estándar) de las fluctuaciones w' , es decir por: $w'_{rmc} = \sqrt{w'^2}$:

$$\rho w'_{rmc} l_m \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) \quad (62a)$$

Comparando (62) con (59) se observa que el flujo de cantidad de movimiento promedio temporal es idéntico a la tensión de corte turbulenta:

$$\tau_t(z) = \rho w'_{rmc} l_m \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) \quad (62b)$$

donde la viscosidad cinemática de remolino es dada por:

$$\nu_t = w'_{rmc} l_m \quad (62c)$$

Por otra parte, considerando que las fluctuaciones de velocidad son del mismo orden ($u' \approx w'$) y que están correlacionadas negativamente, o sea, para w' positiva se tiene un valor negativo de u' y viceversa, de (59) se obtiene:

$$\tau_t(z) = -\rho \overline{u'w'} = \rho \overline{w'^2} = \rho w'_{rmc}^2 \quad (63)$$

Igualando (62b) y (63) se obtiene:

$$w'_{rmc} = l_m \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right) \quad (64)$$

Reemplazando (64) en (62b) se obtiene que la tensión de corte turbulenta se vincula al flujo medio mediante:

$$\tau_t(z) = \rho l_m^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \quad (65)$$

Esta es la fórmula de Prandtl para el cálculo de las tensiones tangenciales turbulentas en un flujo permanente uniforme, que presentan una variación vertical de la velocidad \bar{u} debido a la presencia de una pared o fondo (capa límite bidimensional).

Introduciendo (64) en (62c), o comparando (65) con (59), la viscosidad cinemática de remolino queda expresada en función de l_m y el gradiente vertical de velocidad media temporal como:

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \quad (66a)$$

En este caso, es decir, para flujo turbulento permanente uniforme, cuyo flujo medio sea paralelo al eje x , y presente una distribución vertical de la velocidad media temporal $\bar{u}(z)$, l_m denominada longitud de mezcla, se puede expresar en función de la distancia a la pared mediante:

$$l_m = \kappa z \quad (66b)$$

siendo $\kappa=0,4$ (kappa: constante de Von Karman).

Por lo tanto, insertando (66b) en (65), la fórmula de Prandtl resulta:

$$\tau_t(z) = \rho \kappa^2 z^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \quad (67)$$

9.2 Flujo paralelo a superficie libre en un canal rectangular ancho. Distribución de velocidades y tensiones tangenciales en vertical

Consideremos el caso de un flujo turbulento permanente y uniforme que se desarrolla en un canal abierto ancho, como ha sido esquematizado en la Figura 3 (Punto 4.2).

En esta situación (análoga a la analizada en el punto 4.2 pero ahora para flujo turbulento) el vector velocidad tiene por componentes:

$$\bar{u}_i = (\bar{u}_1(x_3), 0, 0) = (\bar{u}(z), 0, 0) \quad (68)$$

y las componentes de velocidad fluctuantes son funciones de z solamente.

Las componentes no nulas del tensor de tensiones total medio (56) que intervienen en el problema de la distribución de velocidades en vertical son:

$$T_{13} = \mu \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} - \rho \overline{u'_1 u'_3} = \mu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho \overline{u' w'} = \tau \quad (69)$$

$$T_{33} = -\bar{p} - \rho \overline{u'_3 u'_3} = -\bar{p} - \rho \overline{w'^2} = -p \quad (70)$$

En (70) la contribución de la pulsación turbulenta vertical puede despreciarse ya que se ha comprobado experimentalmente que es mucho más pequeña que la presión hidrodinámica media, por lo tanto, a T_{33} lo denominamos directamente $-p$.

Las ecuaciones de Reynolds se reducen a:

$$i = 1 \quad 0 = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dz} + g S_b \quad (71)$$

$$i = 3 \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g \quad (72)$$

donde S_b es la pendiente del fondo.

Integrando (71) y (72) imponiendo respectivamente tensión de corte y presión nulas en la superficie libre $z=h$, se obtienen (nuevamente como en el caso de flujo laminar) la variación lineal de tensión de corte en la vertical:

$$\tau(z) = \rho g (h - z) S_b = \tau_b \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (73)$$

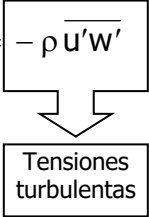
($\tau_b = \rho g h S_b$ es la tensión de corte sobre el fondo)

y la distribución de presión hidrostática:

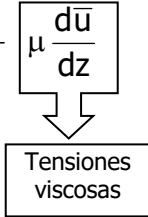
$$p = \rho g (h - z) = \rho g h \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (74)$$

Reescribiendo (69) se distinguen las dos componentes de la tensión de corte, una de origen turbulento (tensiones adicionales de Reynolds) y las tensiones viscosas (ver Figura 15).

$$\tau = \boxed{-\rho \overline{u'w'}} + \boxed{\mu \frac{d\bar{u}}{dz}} \quad (75)$$



Tensiones turbulentas



Tensiones viscosas

De acuerdo a (73) la distribución de tensión de corte en vertical sigue una ley lineal que puede ser esquematizada de la siguiente manera:

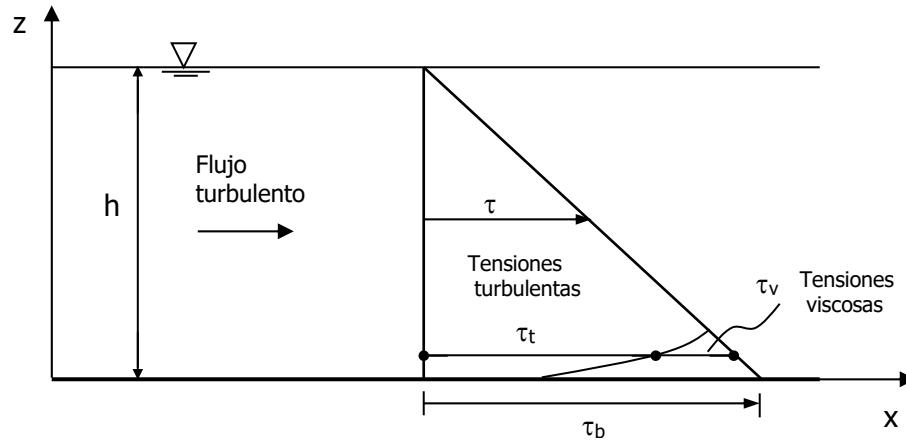


Figura 15.

Las tensiones viscosas son importantes solo en flujo laminar (como ya visto). En cambio, en flujo turbulento las tensiones viscosas se observan solo en un estrato delgado cercano a un fondo "hidráulicamente liso" (subcapa viscosa δ intacta).

Para derivar el perfil de distribución de velocidades en vertical, del flujo turbulento uniforme, consideramos la expresión empírica de Prandtl (1925) para representar las tensiones turbulentas (o tensiones de Reynolds) en función de las magnitudes del flujo medio en régimen permanente y uniforme:

$$\tau_t(z) = -\rho \overline{u'w'} = \rho \kappa^2 z^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \quad (76)$$

Planteamos, además, que en una región próxima al contorno:

$$\tau_t(z) = \tau_b \quad (77a)$$

donde τ_b es la tensión de corte sobre el fondo, ya introducida precedentemente:

$$\tau_b = \rho g h S_b \quad (77b)$$

por lo tanto, igualando (76) y (77a) se obtiene:

$$\tau_b = \rho \kappa^2 z^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \quad (78)$$

Operando algebraicamente tenemos:

$$d\bar{u} = \frac{\sqrt{\tau_b/\rho}}{\kappa} \frac{dz}{z} \quad (79)$$

Integrando:

$$\bar{u}(z) = \frac{\sqrt{\tau_b/\rho}}{\kappa} \ln z + C \quad (80)$$

La constante de integración C se obtiene especificando la condición: $\bar{u}(z_0)=0$, es decir, estableciendo una distancia z_0 a partir del fondo donde $\bar{u}=0$:

$$C = -\frac{\sqrt{\tau_b/\rho}}{\kappa} \ln z_0 \quad (81)$$

Reemplazando (81) en (80) obtenemos la ley de distribución de velocidades en vertical para un flujo turbulento uniforme:

$$\boxed{\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right)} \quad (82)$$

donde u_* es la velocidad de corte, definida como:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} = \sqrt{ghS_b} \quad (83)$$

La velocidad de corte u_* puede estimarse con (83); o a partir de (82) utilizando mediciones de velocidades en la vertical. En este último caso, si se utilizan solo dos puntos de medición a diferentes z :

$$u_* = \kappa \left[\frac{\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1)}{\ln z_2 - \ln z_1} \right] \quad (84)$$

La ecuación (82) representa el perfil logarítmico de distribución de velocidades en la vertical. La misma se denomina ley universal de distribución de velocidades o ley de la pared. Si bien haya sido derivada para una región cercana al fondo, numerosos datos experimentales y de campo han evidenciado su validez para la totalidad de la profundidad de flujo. Los valores de z_0 han sido obtenidos a través de experimentos efectuados considerando contornos hidráulicamente lisos y rugosos (Nikuradse, 1933).

9.2.1 Distribución de velocidades en contornos hidráulicamente lisos

Definición: Un contorno se define hidráulicamente liso cuando existe una subcapa viscosa de espesor δ en proximidad del fondo en la cual predominan los efectos viscosos (Figura 16).

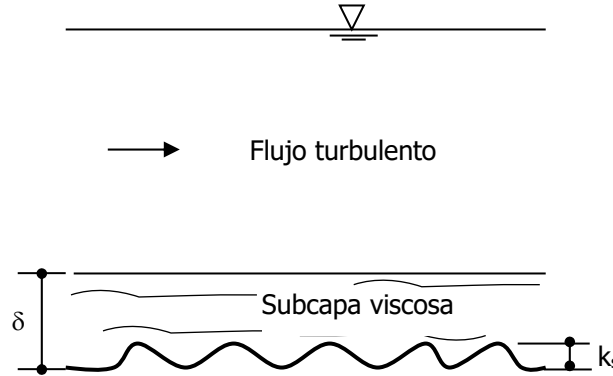


Figura 16. Flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso.

Esto se observa cuando: $k_s < 0,45 \delta$ (85)

donde k_s es la altura de rugosidad del contorno.

El valor de z_0 referido a δ es: $z_0 = 0,01 \delta$ (86)

El espesor aproximado δ es: $\delta = 11 \frac{\nu}{u_*}$ (87)

Reemplazando (86) en (85): $z_0 = 0,11 \frac{\nu}{u_*}$ (88)

Sustituyendo (88) en (82) y realizando simples pasajes algebraicos se obtiene:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 2,5 \ln \left(\frac{u_* z}{\nu} \right) + 5,5 \quad (89)$$

pasando a logaritmo decimal:

$$\boxed{\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 5,75 \log \left(\frac{u_* z}{\nu} \right) + 5,5} \quad (90)$$

Se observa que en régimen hidráulicamente liso el perfil de velocidades es independiente de la altura de rugosidad del contorno k_s .

9.2.2 Consideraciones sobre el espesor δ de la subcapa viscosa

En la subcapa viscosa predominan los efectos viscosos. Por lo tanto, la distribución de velocidades en esa zona sigue una ley lineal dada por:

$$\left. \begin{aligned} \tau(z) &= \mu \frac{d\bar{u}}{dz} \\ \tau(z) &= \tau_b = \rho u_*^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu} \quad (91)$$

Igualando (91) con el perfil logarítmico dado por (82), para $z=\delta$ y considerando $z_0=0,01 \delta$, se obtiene el valor teórico: $\delta=11,5 \nu/u_*$.

Se trata de un valor teórico ya que existe una zona de transición entre el perfil lineal y el logarítmico. Dicha zona de transición se extiende desde $z=(5 \text{ a } 30) \nu/u_*$, como se muestra esquemáticamente en la Figura 17.

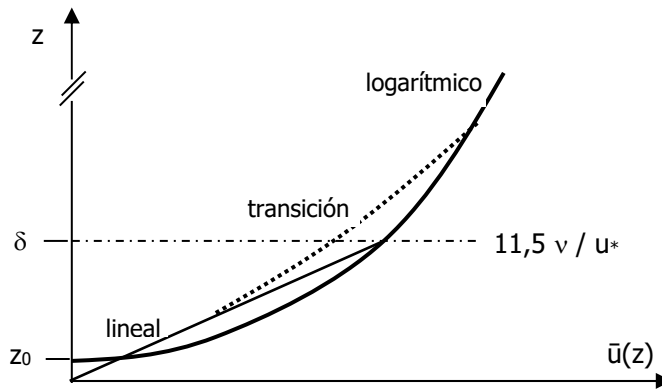


Figura 17. Representación esquemática de transición entre el perfil lineal y el logarítmico.

9.2.3 Distribución de velocidades en contornos hidráulicamente rugosos

Definición: Un contorno se define hidráulicamente rugoso cuando los valores de k_s o u_* aumentan de tal manera que se rompe la subcapa viscosa próxima al fondo (Figura 18).

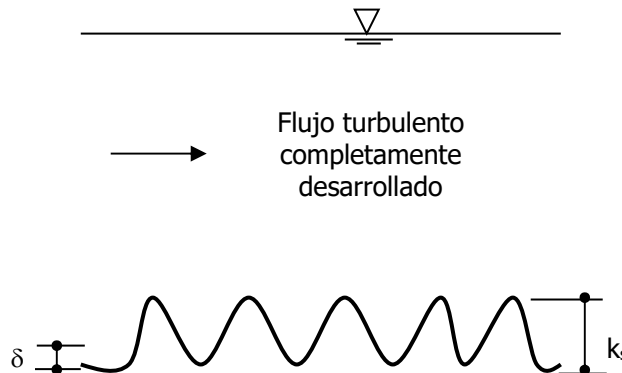


Figura 18. Flujo turbulento completamente desarrollado (contorno hidráulicamente rugoso).

Esto se observa cuando: $k_s > 6 \delta$ (92)

Para contornos con rugosidad uniforme, z_0 es igual a (Nikuradse, 1933):

$$z_0 = 0,033 k_s \quad (93)$$

Sustituyendo (93) en (82) y realizando simples pasajes algebraicos se obtiene:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 2,5 \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + 8,5 \quad (94)$$

pasando a logaritmo decimal:

$$\boxed{\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 5,75 \log\left(\frac{z}{k_s}\right) + 8,5} \quad (95)$$

Se observa que para turbulencia completamente desarrollada la expresión del perfil de velocidades es independiente de la viscosidad cinemática ν , siendo solo función de la altura de rugosidad k_s del contorno.

9.2.4 Número de Reynolds del contorno. Límites de comportamiento

Los límites de comportamiento pueden expresarse en función del número de Reynolds del contorno, dado en función de la velocidad de corte y de la longitud característica k_s :

$$Re_* = \frac{u_* k_s}{\nu} \quad (96)$$

De (85), (87) y (92) se obtiene:

- Hidráulicamente liso: $Re_* < 5$
- Hidráulicamente Transicional: $5 \leq Re_* \leq 70$
- Hidráulicamente rugoso: $Re_* > 70$

La distribución de velocidades puede ser expresada considerando los datos experimentales de Nikuradse como:

$$\boxed{\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 5,75 \log\left(\frac{z}{k_s}\right) + B} \quad (97)$$

donde la función de rugosidad $B=f(Re_*)$ tiene la siguiente expresión general:

$$B = (5.75 \log Re_* + 5.5)e^{-0.5913(\log Re_*)^{2.55}} + 8.5(1 - e^{-0.4982(\log Re_*)^{2.55}})$$

la cual se presenta en la Figura 19, conjuntamente con los datos experimentales de Nikuradse.

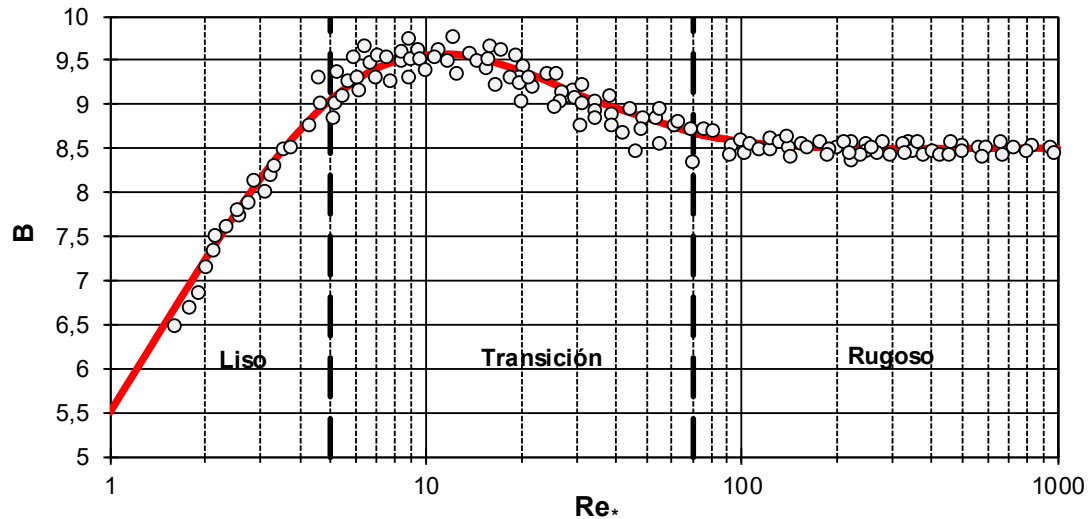


Figura 19. Función de rugosidad de Nikuradse.

En la Figura 19 se observa que, para flujo turbulento con contorno hidráulicamente liso y rugoso, B puede expresarse en forma simplificada mediante:

- $B=5,5+5,75 \log Re_*$ para el régimen turbulento hidráulicamente liso.
- $B=8,5$ para régimen turbulento rugoso (turbulencia completamente desarrollada).

9.2.5 Régimen de transición

En régimen de transición tanto ν como k_s intervienen en la expresión del perfil de velocidades, una expresión analítica para dicho régimen puede escribirse combinando los dos efectos a la manera de Colebrook-White, como:

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = 5,75 \log \left(\frac{u_* z}{0,11 \nu + 0,033 u_* k_s} \right) \quad (98)$$

9.2.6 Velocidad media en la vertical

Utilizando (82) y (41), cambiando en esta última el límite inferior de integración de $z=0$ a $z=z_0$ (la ley logarítmica es singular en cero), se determina el valor de z para el cual $\bar{u}(z)=U$ (velocidad media en la vertical). El valor es: $z = 0,368 h$ ($z=e^{-1} h$) a partir del fondo.

Reemplazando dicho valor en (89), (94) y (98) se obtienen respectivamente la velocidad media en la vertical para los distintos regímenes de flujo turbulento.

- Contorno Hidráulicamente Liso:

$$\frac{U}{u_*} = 2,5 \ln\left(\frac{u_* h}{\nu}\right) + 3 = 2,5 \ln\left(\frac{3,3 u_* h}{\nu}\right) = 5,75 \log\left(\frac{3,3 u_* h}{\nu}\right) \quad (99)$$

- Contorno Hidráulicamente Rugoso:

$$\frac{U}{u_*} = 2,5 \ln\left(\frac{h}{k_s}\right) + 6 = 2,5 \ln\left(\frac{11h}{k_s}\right) = 5,75 \log\left(\frac{11h}{k_s}\right) \quad (100)$$

- Contorno Hidráulicamente Transicional:

$$\frac{U}{u_*} = 5,75 \log\left(\frac{u_* h}{0,3 \nu + 0,09 u_* k_s}\right) \quad (101)$$

9.3 Coeficientes globales de resistencia al escurrimiento para flujo turbulento completamente desarrollado

Reemplazando la velocidad de corte dada por (83) en (100) obtenemos la ecuación de Chezy:

$$U = C \sqrt{h S_b} \quad (102)$$

donde el coeficiente de Chezy, C ($m^{1/2}/s$), queda expresado como:

$$C = 5,75 \sqrt{g} \log\left(\frac{11h}{k_s}\right) \quad (103)$$

De (102), recordando la definición de velocidad de corte e incorporando la relación entre los coeficientes C de Chezy y n de Manning se puede escribir:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{C}{\sqrt{g}} = \frac{h^{1/6}}{n \sqrt{g}} \quad (104)$$

La cual brinda:

$$U = \begin{cases} C h^{1/2} S_b^{1/2} \\ \frac{1}{n} h^{2/3} S_b^{1/2} \end{cases} \quad (105)$$

A partir de (83) y (104) se puede obtener una expresión de resistencia que vincula la tensión de corte sobre el fondo y la velocidad media en la vertical:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{g}} \Rightarrow \tau_b = \frac{\rho g U^2}{C^2} & (a) \\ \frac{h^{1/6}}{n\sqrt{g}} \Rightarrow \tau_b = \frac{\rho g n^2 U^2}{h^{1/3}} & (b) \end{cases} \quad (106)$$

10. DINÁMICA DE LA TURBULENCIA

La turbulencia no es una propiedad particular del fluido, es una condición de flujo que se da para elevados valores del número de Reynolds. Consiste en un campo de velocidades fluctuantes que interactúa y deriva su energía a partir del campo de flujo medio. La turbulencia es disipativa, ya que la energía cinética turbulenta se disipa bajo la influencia de la viscosidad, por lo tanto, la turbulencia no puede mantenerse por sí misma, debe derivar energía del flujo medio (Tennekes y Lumley, 1972).

En el flujo turbulento existe una gran variedad de escalas de longitud (tamaños de los remolinos o vórtices) y tiempos característicos. Las escalas de longitud grandes o macroescalas son del orden, por ejemplo, de la profundidad de flujo en un río y las escalas más pequeñas o microescalas son determinadas por la difusión molecular. La energía cinética turbulenta es extraída del flujo medio, a través de los remolinos de mayor tamaño (escala grande o macroescala), la cual es sucesivamente transferida a las escalas inferiores. Dado que la disipación viscosa se vincula con procesos moleculares, la misma puede ser efectiva a una escala pequeña (microescala).

Para analizar el proceso e identificar el término que extrae o drena energía del flujo medio a macroescala y luego ésta se disipa por efectos viscosos en la microescala, es necesario estudiar el balance de energía del flujo medio y el balance de energía de la turbulencia (valores fluctuantes de velocidad y presión). Esto puede realizarse manipulando las ecuaciones de Reynolds y de Navier-Stokes.

10.1 Balance de energía cinética del flujo medio

Consideremos las ecs. de Reynolds (58), simplificadas para flujo permanente y despreciando las fuerzas de cuerpo. Multiplicando dichas ecuaciones por \bar{u}_i , reordenando y expresando el miembro derecho por sus dos componentes, se obtiene:

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial(1/2) \bar{u}_i \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij} \bar{u}_i}{\partial x_j} - T_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (107)$$

Donde T_{ij} es el tensor de tensiones total medio, de las ecs. (56) y (55):

$$T_{ij} = \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} = -\bar{p} \delta_{ij} + 2\mu \bar{S}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (108)$$

Donde δ_{ij} es el delta de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i=j$, $\delta_{ij}=0$ si $i \neq j$) y el tensor de velocidad de deformación del flujo medio es dado por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (109)$$

El primer término del miembro derecho de (107) es el gradiente del tensor de tensiones total medio por la velocidad (trabajo del tensor de tensiones). Este término redistribuye la energía dentro del volumen de control.

El segundo término del miembro derecho de (107) es el tensor de tensiones total medio multiplicado por la tasa de deformación, el cual se puede expresar como:

$$T_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = T_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] = T_{ij} (\bar{S}_{ij} + \bar{R}_{ij}) = T_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (110)$$

donde, dado que T_{ij} es un tensor simétrico y \bar{R}_{ij} es un tensor antisimétrico (tensor de rotación del flujo medio), el producto: $T_{ij} \bar{R}_{ij}=0$.

Por lo tanto, de (108) y (110) se obtiene:

$$T_{ij} \bar{S}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} \bar{S}_{ij} + 2\mu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij} \quad (111)$$

El primer término del miembro derecho de (111) es nulo; efectivamente, en virtud de la ecuación de continuidad, en un fluido incompresible el trabajo de deformación de la presión media temporal es cero:

$$-\bar{p} \delta_{ij} \bar{S}_{ij} = \bar{p} \bar{S}_{ii} = -\bar{p} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (112)$$

Por lo tanto, la (111) puede expresarse como:

$$\tau_{ij} \bar{S}_{ij} = 2 \mu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij} \quad (113)$$

Introduciendo (113) y (108) en (107) y reordenando, se obtiene la ecuación de balance de energía cinética del flujo medio:

$$\boxed{\begin{array}{c} \bar{u}_j \frac{\partial(1/2) \bar{u}_i \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p} \bar{u}_i}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j} \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} + \overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij} \\ \text{(I)} \qquad \qquad \qquad \text{(II)} \qquad \qquad \text{(III)} \qquad \qquad \text{(IV)} \qquad \qquad \text{(V)} \qquad \qquad \text{(VI)} \end{array}} \quad (114)$$

El término (I) de (114) representa el transporte advectivo de energía cinética del flujo medio por unidad de masa: $(1/2) \bar{u}_i \bar{u}_i$.

Los términos (II), (III) y (IV) representan respectivamente, el transporte de energía por gradiente de presión, por tensiones viscosas y por las tensiones de Reynolds. Los cuales solo redistribuyen la energía del flujo medio difundiéndola dentro del volumen de control.

El término (V) representa el trabajo de deformación de las tensiones viscosas, el cual implica una pérdida de energía cinética y, consecuentemente, se denomina Disipación Viscosa.

El término (VI) representa el trabajo de deformación de las tensiones de Reynolds, se denomina Producción de Energía Cinética Turbulenta, la cual se mantiene drenando energía del flujo medio. En efecto, su valor es negativo debido a que ha sido comprobado experimentalmente que en la mayoría de los flujos turbulentos: $\overline{u'_i u'_j} < 0$, $\bar{S}_{ij} > 0$.

Es decir, hemos identificado el término (VI) que extrae energía del flujo medio a esta escala grande y la transfiere a las escalas inferiores.

Cabe señalar que, en esta escala grande, los valores del número de Reynolds son elevados, por lo tanto, los términos (III) y (V) son mucho menores que los términos (IV) y (VI) y, consecuentemente, pueden ser despreciados. Lo cual concuerda con que, para Reynolds elevados, el campo de flujo medio turbulento tiende a ser independiente de la viscosidad molecular ν .

Para poner en evidencia este aspecto, podemos estimar estos términos, considerando para esta escala grande, una longitud característica L y una velocidad característica $u \approx (\overline{u'_i u'_i})^{1/2}$

$$\text{(III)} = \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu \bar{u}_i \bar{S}_{ij}) \approx \frac{\nu u (u/L)}{L} \approx \frac{\nu u^2}{L^2} \approx \frac{u^3}{L} \left(\frac{\nu}{uL} \right) \approx \frac{u^3}{L} R_L^{-1}$$

$$\text{(IV)} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j} \bar{u}_i) \approx \frac{u^2 u}{L} \approx \frac{u^3}{L}$$

$$(V) = 2\nu\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij} \approx \frac{\nu u^2}{L^2} \approx \frac{u^3}{L} \left(\frac{\nu}{uL} \right) \approx \frac{u^3}{L} R_L^{-1}$$

$$(VI) = \overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij} \approx u^2 \frac{u}{L} \approx \frac{u^3}{L}$$

Realizando las relaciones: (III)/(IV) y (V)/(VI), se observa que dichas relaciones son del orden de la inversa del número de Reynolds en la escala grande: R_L^{-1} . Dado que en esta escala grande $R_L \gg 1$, se comprueba que los términos (III) y (V) pueden ser despreciados.

10.2 Balance de energía cinética de la turbulencia

Consideremos las ecs. de Navier-Stokes, simplificadas para flujo permanente y despreciando las fuerzas de cuerpo. Multiplicando dichas ecuaciones por la velocidad instantánea u_i , reordenando y expresando el miembro derecho por sus dos componentes, se obtiene:

$$\rho u_j \frac{\partial(1/2) u_i u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij} u_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (115)$$

Donde τ_{ij} es el tensor de tensiones:

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (116)$$

y el tensor de velocidad de deformación es dado por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (117)$$

Sustituyendo en (115) las variables instantáneas de velocidad, tensor de tensiones, tensor de velocidad de deformación, etc., en valores medios y fluctuantes (a la manera de Reynolds, por ej.: $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, etc.); luego integrando en el período de turbulencia (promediando temporalmente) se obtiene:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_j \frac{\partial(1/2) \bar{u}_i \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial(1/2) \overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j} \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(1/2) \overline{u'_i u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p} \bar{u}_i}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \bar{u}_i \bar{S}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i S'_{ij}}}{\partial x_j} - 2\nu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} \end{aligned} \quad (118)$$

Restando a la (118) la (114) y reordenando, se obtiene la ecuación de balance de energía cinética de la turbulencia (para los valores pulsantes de velocidad y presión):

$$\bar{u}_j \frac{\partial(1/2)\overline{u'_i u'_i}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i S'_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial(1/2)\overline{u'_i u'_i u'_j}}{\partial x_j} - 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} - \overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij} \quad (119)$$

Llamando k al valor de la energía cinética turbulenta instantánea k' por unidad de masa promediada en el período de la turbulencia:

$$k = \bar{k}' = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} \right) \quad (119a)$$

La ec. (119) puede escribirse como:

| | |
|--|-------|
| $\bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_i} + 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i S'_{ij}}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{k' u'_j}}{\partial x_j} - 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} - \overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij}$ | (120) |
| <div style="display: flex; justify-content: space-around; text-align: center;"> (I) (II) (III) (IV) (V) (VI) </div> | |

El término (I) representa el transporte advectivo de la energía cinética turbulenta por unidad de masa que realiza el flujo medio.

Los términos (II), (III) y (IV) describen, respectivamente, el trabajo de las fuerzas asociadas a las fluctuaciones de presión, el transporte por tensiones viscosas y el transporte turbulento de energía cinética turbulenta (es un transporte de tipo difusivo de k'). En general, los términos (II) y (III) son mucho menores que los restantes y pueden ser despreciados.

El término (V) representa la pérdida de energía cinética turbulenta debido al trabajo de deformación de las tensiones viscosas (Disipación Viscosa):

$$(V): \quad \varepsilon = -2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}}$$

Contrariamente a lo que sucede con el término (V) en la escala grande L representada por la ecuación (114), que puede ser despreciado; en esta escala pequeña o microescala, representada por la ec. (120), el término (V) adquiere mucha importancia y no puede ser nunca despreciado.

El término (VI) representa la Producción de Energía Cinética Turbulenta.

$$(VI): \quad P = -\overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij}$$

Se observa que dicho término es idéntico al de la ec. (120) de balance de energía cinética del flujo medio, pero de signo opuesto. Es decir, en la ec. (120) este término extrae energía del flujo medio (en escala grande L) y produce energía turbulenta en la microescala.

En la microescala, la turbulencia tiende a ser homogénea e isotrópica (no cambia con la posición ni con la dirección) y la disipación igual a la producción: $\varepsilon=P$, es decir, los tamaños de los

remolinos son suficientemente pequeños como para que la viscosidad molecular sea efectiva y disipe la producción de energía turbulenta en forma de calor.

La ec. (120), con algunas simplificaciones, representa la base para los modelos de "cierre de la turbulencia" con una ecuación de transporte (para k) y de dos ecuaciones de transporte (para k y ε).

10.3 Escalas de la turbulencia

La energía turbulenta extraída del flujo medio en la escala grande L , por los remolinos de mayor tamaño, es sucesivamente transferida a las escalas inferiores. Este proceso se denomina *cascada de energía* (Kolmogorov 1941). Según este proceso de cascada, la energía turbulenta es transferida hacia las escalas inferiores mediante la generación de remolinos de tamaños intermedios, los cuales a su vez se dividen en remolinos más pequeños, y así sucesivamente hasta que se alcanza la microescala, es decir, la escala donde los tamaños de los remolinos son suficientemente pequeños y posibilitan la disipación viscosa de dicha energía en forma de calor. El proceso de subdivisiones sucesivas de los remolinos se produce debido al estiramiento de los mismos y los esfuerzos de corte ejercidos por el flujo.

La escala más pequeña de un campo de flujo turbulento es representada por la *Microescala de Kolmogorov* (Kolmogorov, 1941). Dado que en la microescala: $P=\varepsilon$ y siendo la viscosidad cinemática molecular ν efectiva en el efecto de disipación, Kolmogorov seleccionó a ε (m^2/s^3) y ν (m^2/s) como las variables más relevantes y, mediante análisis dimensional, determinó las microescalas de longitud η (m), velocidad v (m/s) y tiempo $\tau=\eta/\nu$ (s):

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad v = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (121a,b,c)$$

El número de Reynolds R_k para la microescala de Kolmogorov resulta:

$$R_k = \frac{v \eta}{\nu} = 1 \quad (122)$$

Lo cual indica que, en contraposición con lo que sucede en la macroescala donde $R_L > 1$, en la microescala las fuerzas inerciales y las viscosas son iguales, es decir, los efectos viscosos son muy importantes, tal como descrito anteriormente.

La escala grande o macroescala de longitud, velocidad y tiempo son: L (m), u (m/s) y $T=L/u$ (s). La energía extraída del flujo medio en la macroescala es transferida sin cambios hacia las escalas inferiores y disipada en la microescala por los efectos viscosos. Por lo tanto, para $P=\varepsilon$:

$$P = -\overline{u'_i u'_j} \overline{S}_{ij} \approx \frac{u^3}{L} \approx \varepsilon \quad (123)$$

Una manera de comparar la microescala de Kolmogorov con la macroescala es sustituyendo en (121a,b,c), la estimación de ε dado por (123), con lo cual se obtiene:

$$\frac{\eta}{L} = R_L^{-3/4}, \quad \frac{\nu}{u} = R_L^{-1/4}, \quad \frac{\tau}{T} = R_L^{-1/2} \quad (124a,b,c)$$

Dado que en la macroescala $R_L \gg 1$, se observa que efectivamente la microescala de Kolmogorov es menor que la misma.

Existen otras escalas, como, por ejemplo, la microescala de Taylor (Taylor, 1935). Sin embargo, se comprueba que la microescala de Taylor es intermedia entre la macroescala y la microescala de Kolmogorov.

Taylor, para turbulencia isotrópica, plantea que la disipación es:

$$\varepsilon = -2\nu \overline{S'_{ij}S'_{ij}} = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} \quad (125)$$

La (125) puede demostrarse realizando el doble producto escalar $S'S'$ del tensor de velocidad de deformación y luego sumar los componentes individualmente.

Luego, estima una escala de longitud λ :

$$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2} = \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \approx \frac{u^2}{\lambda^2} \quad (126)$$

Por lo tanto, sustituyendo en (125) la expresión (126), la estimación de la disipación en la microescala de Taylor es:

$$\varepsilon = 15\nu \frac{u^2}{\lambda^2} \quad (127)$$

Para comparar la microescala de Taylor con la macroescala, igualamos (123) y (127):

$$\frac{u^3}{L} = 15\nu \frac{u^2}{\lambda^2} \quad (128)$$

Multiplicando por $(1/L)$ ambos miembros de (128) y despejando la relación λ/L , se obtiene:

$$\frac{\lambda}{L} = \sqrt{15} R_L^{-1/2} \quad (129)$$

Es decir, dado que en la macroescala $R_L \gg 1$, se comprueba que la escala de longitud de Taylor es menor que la escala de longitud de macroescala: $\lambda < L$.

Para comparar la microescala de Taylor con la microescala de Kolmogorov, dividimos la (129) por la (124a):

$$\frac{\lambda}{\eta} = \sqrt{15} R_L^{1/4} \quad (130)$$

Es decir que, para $R_L \gg 1$, se comprueba que la microescala de longitud de Taylor es mayor que la microescala de longitud de Kolmogorov: $\lambda > \eta$. Es decir, en resumen: $L > \lambda > \eta$.

Observación:

Resulta interesante estimar el esfuerzo computacional que requeriría utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes en forma directa (sin ser promediadas en el período de la turbulencia) para describir el campo de flujo turbulento instantáneo (Modelo DNS). En tal caso, para capturar la dinámica de la turbulencia, se debería representar todo el espectro, desde la macroescala hasta la microescala de Kolmogorov.

Si consideramos la (124a) resulta que, el subdominio de macroescala L^3 debe discretizarse en η^3 celdas, en función del número de Reynolds de la macroescala, o sea:

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^3 = R_L^{9/4}$$

Para un flujo turbulento con $R_L=10^6$, resulta una cantidad de $10^{54/4}$ celdas, para cada subdominio. Si el volumen total del dominio modelado es $V=100 L^3$, el número total de celdas es de $10^{72/4}$. Las variables de flujo instantáneas: presión + tres velocidades, deben calcularse en ese exorbitante número total de celdas, en cada paso de integración temporal Δt . Si consideramos la (124c) y un tiempo característico de la macroescala $T=10$ s, el paso de integración temporal debe ser: $\Delta t = \tau = 10 / 10^3 = 0.01$ s, el cual se debe repetir hasta completar el tiempo total de la simulación T^* . Si $T^*=10000$ s, el número total de pasos de tiempo es de 10^6 . Desde el punto de vista del almacenamiento de información y de los tiempos de cálculo, esto no es manejable actualmente. Esta es la razón por la cual, en las aplicaciones de ingeniería se ha ampliamente adoptado la utilización de las ecuaciones de Reynolds (RANS: Reynolds Average Navier-Stokes), conjuntamente con modelos de cierre de turbulencia.

10.4 Modelos de cierre de la turbulencia para RANS

Las ecuaciones de Reynolds (RANS) son:

Ec. continuidad:
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (131a)$$

Ecs. dinámicas:
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) - g \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i} \quad (131b)$$

donde $\bar{\tau}_{ij}$ es el tensor de tensiones del flujo medio:

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + 2 \mu \bar{S}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (131c)$$

y el tensor de tensiones turbulentas o de Reynolds es:

$$\tau_{tij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (131d)$$

Dado que dicho tensor es simétrico, el mismo agrega seis incógnitas adicionales a las ecuaciones de Reynolds (RANS). Por lo tanto, tenemos cuatro ecuaciones disponibles: 1 ecuación de continuidad + 3 ecuaciones escalares dinámicas, para un total de 10 incógnitas: 1 presión media, 3 componentes de velocidad media y 6 tensiones adicionales de Reynolds. Consecuentemente, para remediar tal disparidad, es necesario encontrar ecuaciones de cierre de la turbulencia.

La analogía de Boussinesq (1877), entre las tensiones viscosas en flujo laminar y las tensiones turbulentas en flujo turbulento, fue descrita en particular en el apartado 9.1. En este caso, general 3D que estamos describiendo, dicha analogía se expresa como:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (131e)$$

Donde ν_t es la viscosidad cinemática turbulenta o viscosidad de remolino; la cual no es una propiedad del fluido como la viscosidad molecular ν , sino que varía con el flujo; δ_{ij} es el delta de Kronecker y k es la energía cinética turbulenta por unidad de masa:

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \quad (131f)$$

El segundo término del miembro derecho de (131e) se incorpora para subsanar la contradicción: $\rho \overline{u'_i u'_i} = 0$ para $i=j$ (tensiones normales de Reynolds), que surge al desarrollar esa ecuación en ausencia de dicho término y considerar la ecuación de continuidad. Está claro que $\overline{u'_i u'_i} \neq 0$, ya que se trata del promedio temporal de un término cuadrático (donde u'_i es un valor distinto de cero) y cuyo resultando nunca puede ser cero.

El problema ahora consiste en determinar la viscosidad de remolino ν_t y k . Distintos modelos de cierre han sido planteados, algunos de los cuales se describen a continuación.

10.4.1 Modelo de 0-Ecuaciones

La denominación de modelo de 0-ecuaciones se refiere a que no utiliza ecuaciones diferenciales a derivadas parciales de transporte de la energía cinética turbulenta k (ni de la disipación ε) para poder determinar ν_t .

La viscosidad cinemática de remolino puede especificarse como un valor constante, ajustándolo por prueba error (lo cual no es muy satisfactorio, ya que, como se comentó anteriormente, ν_t varía en el campo de flujo de un punto a otro, y también, entre diferentes flujos (turbulencia libre, turbulencia de pared, etc.); o mediante el concepto de longitud de mezcla introducido por Prandtl (1925) y descrito en particular en el apartado 9.1.

Para el caso más general 3D, la viscosidad cinemática de remolino se expresa en función de la longitud de mezcla l_m y de los gradientes de velocidad del flujo medio como:

$$\nu_t = l_m^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right]^{1/2} \quad (132)$$

Es importante señalar que, ν_t no es una $\nu_{t,ij}$, porque de este modo se incorporarían otras 6 incógnitas y estaríamos en la misma situación que con el tensor de Reynolds. Consecuentemente, tanto en este modelo como en los que describiremos a continuación, se asume que: $\nu_t(\{x_i\}, t)$, es decir, la viscosidad cinemática de remolino varía en una sola dirección y en el tiempo t . Por lo tanto, se calcula en una dirección y se considera que en las otras direcciones es igual, lo cual es equivalente a asumir que localmente la turbulencia es isotrópica.

El valor de l_m depende del tipo de problema, por ejemplo, en capas límites para turbulencia de pared l_m es función de la constante de Von Karman κ y la distancia a la pared z : $l_m = \kappa z$ (Prandtl 1925). Existen otras expresiones, como las de Van Driest (1956), Cebeci-Smith (1974) y Baldwin y Lomax (1978).

Por otra parte, este modelo no puede determinar k (que aparece en (131e)), por lo cual, se realiza una simplificación, agrupando el segundo término de (131d) con el término de presión media en (131c) y el sistema se resuelve para un nuevo valor conglobado \tilde{p} :

$$\tilde{p} = \bar{p} + \rho \frac{1}{3} \overline{u'_i u'_i} \quad (133)$$

En general, la performance del modelo de 0-ecuación (o modelo de longitud de mezcla) es razonablemente buena, pero la especificación de la longitud de mezcla es altamente dependiente del problema en estudio.

10.4.2 Modelo de 1-Ecuación

A través de investigaciones independientes, Kolmogorov (1942) y Prandtl (1945) sugirieron que la viscosidad de remolino es proporcional al producto uL . Con la velocidad característica $u = k^{1/2}$, donde k es la energía cinética turbulenta por unidad de masa (ec. (131f) y L escala de longitud

de referencia de la turbulencia. Por lo tanto, considerando un coeficiente de proporcionalidad C'_μ , la viscosidad de remolino se expresa como:

$$v_t = C'_\mu \sqrt{k} L \quad (134)$$

De la ec. (123), considerando un coeficiente de proporcionalidad C_D , se tiene que la disipación viscosa es:

$$\varepsilon = C_D \frac{u^3}{L} = C_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (135)$$

El modelo de 1 ecuación resuelve la ecuación de transporte advectivo-difusivo de k , con términos fuente (P: producción de k) y sumidero o pérdida (ε : disipación de k); para determinar $k(\{x_i\}, t)$:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (136)$$

Por otra parte, la disipación viscosa ε se calcula con (135), utilizando algunos argumentos basados físicamente para determinar la longitud L . A partir de k y ε , la viscosidad de remolino se determina con:

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (137)$$

La (137) se obtiene eliminando L de (134) con la ayuda de (135) y considerando $C_\mu = C'_\mu C_D$.

10.4.3 Modelos de 2-Ecuaciones

Modelo k - ε estándar

Si no es posible estimar L mediante consideraciones físicas, entonces se necesitan más ecuaciones de transporte para las magnitudes características de la turbulencia. Uno de los modelos más utilizados emplea dos ecuaciones de transporte advectivo-difusivo: una para la energía cinética turbulenta k (ec. 136) y otra para la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta ε . El modelo k - ε estándar se representa mediante el siguiente sistema:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (138a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (138b)$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (138c)$$

La resolución del sistema de ecuaciones permiten determinar $k(\{x_i\},t)$, $\varepsilon(\{x_i\},t)$ y $v_t(\{x_i\},t)$. Los cinco parámetros: $C_\mu=0.09$, $C_{1\varepsilon}=1.44$, $C_{2\varepsilon}=1.92$, $\sigma_k=1.00$ y $\sigma_\varepsilon=1.30$; se suponen "constantes" tal como recomendado por Launder y Spalding (1974).

Los términos de advección y producción se vinculan al flujo medio, representado por las ecuaciones hidrodinámicas RANS, \bar{u}_i y sus gradientes espaciales. La viscosidad de remolino local aparece en los términos de difusión y en los de producción. Finalmente, la energía cinética turbulenta es disipada con una tasa ε (término sumidero o pérdida) en la ecuación de k (138a); mientras que, $C_{2\varepsilon} \varepsilon^2/k$ representa el término sumidero en el balance de ε (138b).

Las ecuaciones hidrodinámicas del flujo medio (RANS) y las ecuaciones de cierre de la turbulencia, deben resolverse conjuntamente o iterativamente, ya que el sistema completo es interdependiente:

RANS: \bar{u}_i y p , necesitan $v_t(x_i,t)$

Transporte de turbulencia: k y ε , necesitan \bar{u}_i (y sus gradientes espaciales) y v_t .

Viscosidad de remolino: $v_t(x_i,t)$, necesita k y ε .

Debido a su robustez y bajo costo computacional, k - ε es el modelo de cierre de turbulencia más utilizado en aplicaciones de ingeniería. Se aplica para flujos turbulentos con altos número de Reynolds, asumiendo turbulencia localmente isotrópica. El flujo cerca de las paredes, se modela usando como condición de contorno en el fondo la ley de la pared de distribución de velocidades.

Existen otros modelos de 2 ecuaciones, como, por ejemplo, el k - ω y el SST.

Modelo k - ω . Es similar al k - ε , pero en este caso la segunda ecuación de transporte es para ω , la tasa específica de disipación de energía cinética. El modelo puede resolver todo el campo de flujo hasta las paredes, sin usar la ley de la pared. Este modelo, si bien es menos robusto que el k - ε , generalmente da mejores resultados que el k - ε en regiones con recirculación, cerca de paredes sólidas, flujos con mucha curvatura, zonas de separación de flujo y chorros.

Modelo SST. El modelo SST (Shear Stress Transport), es un modelo que combina la robustez del k - ε con la exactitud del modelo k - ω , lo que lo hace aplicable a una amplia gama de flujos. Emplea k - ε en las zonas de flujo alejadas de las paredes y k - ω en las regiones cercanas a las paredes. Es un modelo para flujos con altos y bajos números de Reynolds, ya que puede resolver todo el flujo hasta las paredes, sin usar funciones de pared.

10.4.4 Modelos de orden superior

Existen otros modelos de cierre, por ejemplo, los que resuelven directamente las seis tensiones turbulentas de Reynolds que son incógnitas (Modelo de 6-Ecuaciones o de orden superior), sin utilizar la hipótesis de Boussinesq. Son modelos que requieren un mayor costo computacional

que los de dos ecuaciones. Su utilización es justificada cuando los valores de las “constantes”, por ejemplo, en el modelo $k-\varepsilon$, deben ajustarse desproporcionadamente para describir el campo de flujo. En tal caso, el modelo de dos ecuaciones $k-\varepsilon$ estaría representando un “ajuste de curvas” y no la dinámica física del campo de flujo turbulento real.

10.5 Modelo LES (Large Eddy Simulation)

En el modelo LES (Large Eddy Simulation) se realiza un “filtrado” o integración espacial (volumétrica) de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por lo tanto, el modelo LES es un modelo alternativo al RANS y se basa en un concepto diferente al de integración temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes que se realiza para obtener RANS.

En el modelo LES se asume que las escalas mayores de la turbulencia (escala grande L) son afectadas directamente por las condiciones al contorno, mientras que, las menores presentan características cuasi-universales e isotrópicas.

De esta manera, son los remolinos mayores que interactúan con el flujo medio, la escala de tiempo de los remolinos grandes es similar a la del flujo medio y la turbulencia en esa escala es anisotrópica, influenciada por la geometría y las condiciones al contorno. Por el otro lado, los remolinos pequeños, generados por la interacción y división de los remolinos grandes, son menos dependientes de las condiciones al contorno, sus escalas espaciales y temporales son mucho menores y la turbulencia generada por los mismos es de tipo isotrópica.

Por lo tanto, se resuelven numéricamente las variables “filtradas” en la escala grande L de la grilla de discretización y las menores son modeladas a escala de subgrilla. Es decir, la turbulencia es pensada como las fluctuaciones que ocurren a una escala menor de subgrilla.

El costo computacional del modelo LES es obviamente menor que el de resolución directa de las ecuaciones de Navier-Stokes (DNS), pero a su vez, es mayor que el de RANS + Modelos de cierre de turbulencia.

10.6 Distribución de intensidad de turbulencia en la vertical

Como ha sido mencionado anteriormente, un campo de velocidades turbulentas (ver Figura 13) puede ser descrito por magnitudes estadísticas. Por ejemplo, la intensidad de turbulencia, para cada componente longitudinal, transversal y vertical, puede caracterizarse mediante el valor r.m.c. (raíz media cuadrática) de las pulsaciones turbulentas (desvío estándar):

$$u'_{\text{rmc}} = \left(\overline{u_i'^2} \right)^{1/2} = \left[\overline{(u_i - \bar{u}_i)^2} \right]^{1/2} \quad (139)$$

Con $i=1,2,3$: $u'_1=u'$, $u'_2=v'$, $u'_3=w'$. Consecuentemente:

$$u'_{\text{rmc}} = \sqrt{\overline{u'^2}} \quad , \quad v'_{\text{rmc}} = \sqrt{\overline{v'^2}} \quad , \quad w'_{\text{rmc}} = \sqrt{\overline{w'^2}} \quad (140a,b,c)$$

A partir de mediciones experimentales con la técnica de hilo caliente, en condiciones controladas de flujo permanente uniforme en un canal de laboratorio, Nezu (1977) expresó las distribuciones de intensidad de turbulencia relativa (u'_{rmc}/u_*) en la vertical, para cada componente, válidas en el entorno $0.1 < z/h < 0.6$, como:

$$\frac{u'_{rmc}(z)}{u_*} = D_u e^{-\lambda_u(z/h)}, \quad \frac{v'_{rmc}(z)}{u_*} = D_v e^{-\lambda_v(z/h)}, \quad \frac{w'_{rmc}(z)}{u_*} = D_w e^{-\lambda_w(z/h)} \quad (141a,b,c)$$

Donde z : coordenada vertical (m), h : profundidad de flujo (m), u_* : velocidad de corte (m/s) y los coeficientes experimentales son: $D_u=2.3$, $D_v=1.63$, $D_w=1.27$ y $\lambda_u=\lambda_v=\lambda_w=1$ (Nezu, 1977).

A partir de la definición de k (energía cinética turbulenta por unidad de masa) expresada por (131f), se puede determinar la distribución vertical de k utilizando (141a,b,c), como:

$$k(z) = \frac{u_*^2}{2} (D_u^2 + D_v^2 + D_w^2) e^{-2z/h} \quad (142)$$

Asimismo, las mediciones experimentales también permiten estimar otros parámetros estadísticos (asimetría y curtosis) y son siempre necesarias para verificación y calibración de los modelos. Por otra parte, la intensidad de turbulencia es una variable muy importante, por ejemplo, para el dimensionamiento de revestimientos flexibles para protección contra procesos de erosión en canales y ríos, sobre todo en situaciones donde la turbulencia es aumentada muy por encima de la normal.

10.7 Distribución de viscosidad cinemática turbulenta en vertical

La distribución vertical de la viscosidad cinemática de remolino (o coeficiente de difusión turbulenta de momentum) juega un rol importante, por ejemplo, en el proceso de transporte de sedimentos en suspensión o en el proceso de transporte de contaminantes. Para obtenerla, se debe considerar la distribución lineal de tensión de corte dada por (73) y el perfil logarítmico de distribución de velocidades dado por (82). De acuerdo a la analogía de Boussinesq:

$$\tau_t(z) = -\rho \overline{u'w'} = \rho \nu_t \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (143a)$$

Además, la distribución lineal de tensión de corte turbulenta en vertical dada por (73); confirmada por otra parte con las mediciones realizadas por Nezu (1977) de distribución vertical del promedio $u'w'$, es:

$$\tau_t(z) = -\rho \overline{u'w'} = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (143b)$$

Igualando (143a) con (143b):

$$\nu_t \frac{d\bar{u}}{dz} = u_*^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (143c)$$

de (82) se tiene que:

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} (\ln z - \ln z_0) \quad (144)$$

derivando (144) respecto a z tenemos:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad (145)$$

Reemplazando (145) en (143c) y reordenando se obtiene la distribución vertical de viscosidad cinemática de remolino:

$$v_t(z) = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (146)$$

La distribución vertical dada por (146) es de tipo parabólica; v_t asume valores nulos en el fondo ($z=0$) y en la superficie libre ($z=h$). Mientras que, v_t es máxima para $dv_t/dz=0$, es decir, de (146) se deduce que el valor máximo de v_t se encuentra en $z=h/2$; y su valor es:

$$v_{t \text{ máx}} = \frac{1}{4} \kappa u_* h \quad (147)$$

Si v_t es promediada en la vertical se obtiene el siguiente valor:

$$v_{tm} = \frac{1}{6} \kappa u_* h \quad (148)$$

11. INTEGRACIÓN EN VERTICAL DE LAS ECUACIONES DE REYNOLDS. MODELO HIDRODINÁMICO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL (2D-H)

Para la resolución de muchos problemas hidráulicos, en la práctica de ingeniería, los modelos 3D (RANS o LES) son innecesariamente detallados para representar el flujo, por ejemplo, en ríos de decenas de kilómetros de longitud y simulaciones que abarcan meses o años. O sea, son más apropiados para escalas espaciales y temporales acotadas.

En tales casos es común adoptar una representación de flujo bidimensional horizontal mediante la integración a través de la profundidad de flujo h de las ecuaciones de Reynolds 2D.

Asumiendo aceleraciones verticales despreciables, la tercera ecuación dinámica de Reynolds se reduce a la distribución hidrostática de la presión en la vertical, quedando conformadas las ecuaciones de Reynolds 2D.

Para problemas de flujos a superficie libre el término de presión y gravedad pueden ser escritos como:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho + \rho g \dot{z}) = -g \frac{\partial z_w}{\partial x} \quad (149)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho + \rho g \dot{z}) = -g \frac{\partial z_w}{\partial y} \quad (150)$$

donde z_w es el nivel de la superficie libre o cota del pelo de agua.

Integrando en h las ecuaciones dinámicas 2D de Reynolds se obtiene un modelo hidrodinámico bidimensional en horizontal (2D-H), cuyas ecuaciones dinámicas son:

$$\frac{\partial}{\partial t} (hU) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta_1 hU^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta_2 hUV) + gh \frac{\partial z_w}{\partial x} + \frac{\tau_{bx}}{\rho} = 0 \quad (151)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hV) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta_2 hUV) + \frac{\partial}{\partial y} (\beta_3 hV^2) + gh \frac{\partial z_w}{\partial y} + \frac{\tau_{by}}{\rho} = 0 \quad (152)$$

y cuya correspondiente ecuación de continuidad integrada en vertical es:

$$\frac{\partial z_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial}{\partial y} (hV) = 0 \quad (153)$$

donde U , V son las velocidades medias en la vertical en direcciones x e y respectivamente; τ_{bx} , τ_{by} son las componentes en dirección x e y de la tensión de corte sobre el fondo; β_1 , β_2 y β_3 son coeficientes de Boussinesq que representan el efecto de la no uniformidad de la velocidad en la vertical, por ejemplo:

$$\beta_1 = \frac{1}{hU^2} \int_{z_b}^{z_w} \bar{u}^2 dz \quad (154a)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{hUV} \int_{z_b}^{z_w} \bar{u} \bar{v} dz \quad (154b)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{hV^2} \int_{z_b}^{z_w} \bar{v}^2 dz \quad (154c)$$

Las ecuaciones de cierre del modelo 2D-H para las componentes de la tensión de corte sobre el fondo pueden obtenerse a partir de (106a) como:

$$\tau_{bx} = \frac{\rho g (U^2 + V^2)^{1/2} U}{C^2} \quad (155a)$$

$$\tau_{by} = \frac{\rho g (U^2 + V^2)^{1/2} V}{C^2} \quad (155b)$$

Análogamente, se podría haber utilizado (106b) para expresar (155a) y (155b) en función de las velocidades medias en vertical U , V ; de la profundidad h y del coeficiente de rugosidad de Manning n , en vez del coeficiente de Chezy C .

12. ECUACIONES DE BARRÉ DE SAINT VENANT. MODELO HIDRODINÁMICO UNIDIMENSIONAL (1D)

La representación unidimensional del flujo es de interés práctico para la resolución de problemas propagatorios a lo largo de extensos tramos de ríos. Integrando en el ancho las ecuaciones del modelo hidrodinámico 2D-H se obtienen las ecuaciones de Saint Venant, para el flujo unidimensional impermanente gradualmente variado.

La ecuación dinámica resultante es:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial z_w}{\partial x} + \frac{P \bar{\tau}_b}{\rho} = 0 \quad (156)$$

y la correspondiente ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (157)$$

donde Q es el caudal, A el área transversal mojada, P el perímetro mojado, $\bar{\tau}_b$ la tensión de corte media sobre el perímetro mojado y β es el coeficiente de Boussinesq que representa el efecto de la no uniformidad de la velocidad en el ancho de la sección:

$$\beta = \frac{1}{h \bar{U}^2} \int_A U^2 dA \quad (158)$$

donde U es la velocidad media en vertical y \bar{U} es la velocidad media en la sección: $\bar{U}=Q/A$.

La ecuación de cierre del modelo hidrodinámico 1D para la tensión de corte media sobre el perímetro de la sección puede obtenerse a partir de (106a) como:

$$\bar{\tau}_b = \frac{\rho g \bar{U}^2}{C^2} = \frac{\rho g Q |Q|}{C^2 A^2} \quad (159)$$

o utilizando (106b):

$$\bar{\tau}_b = \frac{\rho g n^2 \bar{U}^2}{R^{1/3}} = \frac{\rho g n^2 Q|Q|}{A^2 R^{1/3}} \quad (160)$$

donde $R=A/P$ es el radio hidráulico; si el canal es ancho: $R/h_m \approx 1$, donde h_m es la profundidad media en la sección transversal.

Distintos modelos de propagación de crecidas pueden derivarse de (156). Despreciando el término de aceleración local se deriva el modelo de onda cuasi-dinámica, despreciando aceleración local y convectiva se obtiene el modelo de onda difusiva y despreciando el término de gradiente de presión se deriva el modelo de onda cinemática. En La Unidad 5 se analizarán en detalle estos modelos y se presentarán distintos esquemas numéricos en diferencias finitas para su resolución.

13. INTEGRACIÓN DEL MODELO 1D EN EL TRAMO. MODELO HIDROLÓGICO CERODIMENSIONAL (0D)

Si la ecuación de continuidad del modelo hidrodinámico 1D se integra en el tramo de propagación se obtiene:

$$\frac{dS(t)}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(t) \quad (161)$$

La (161) es una ecuación de continuidad cerodimensional (ecuación agregada para un tramo o para un reservorio o embalse) ya que la coordenada espacial ha sido removida mediante el proceso de integración y las variables intervinientes dependen solo del tiempo. En dicha ecuación S es almacenamiento (volumen), Q_{in} es el caudal de entrada y Q_{out} es el caudal de salida.

La ecuación dinámica 1D generalmente para configuraciones geométricas complejas no es posible integrarla en el tramo. La misma se sustituye por una función de almacenamiento, como por ejemplo (Muskingum):

$$S(t) = K[X Q_{in}(t) + (1 - X)Q_{out}(t)] \quad (162)$$

donde K y X son parámetros constantes del modelo. Desde el punto de vista físico el parámetro K representa el tiempo medio de traslado de la onda en el tramo y el parámetro X pondera los efectos relativos de los caudales Q_{in} y Q_{out} en el volumen almacenado. En particular, para $X=0$ la (162) representa la función de almacenamiento para un embalse con superficie del agua horizontal.

Derivando (162) respecto al tiempo e introduciendo el resultado en la (161) se obtiene:

$$K(1 - X) \frac{dQ_{out}(t)}{dt} + Q_{out}(t) = Q_{in}(t) - KX \frac{dQ_{in}(t)}{dt} \quad (163)$$

La ecuación (163) representa un modelo de propagación de tipo hidrológico cerodimensional. En la Unidad 5 se analizará este modelo y se presentarán distintos métodos numéricos para su resolución.

14. SÍNTESIS DE MODELOS HIDRODINÁMICOS OBTENIDOS DE NAVIER-STOKES

En la Figura 20 se resumen los distintos modelos hidrodinámicos que pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, para el flujo de un fluido viscoso incompresible, mediante sucesivas integraciones temporales y espaciales.

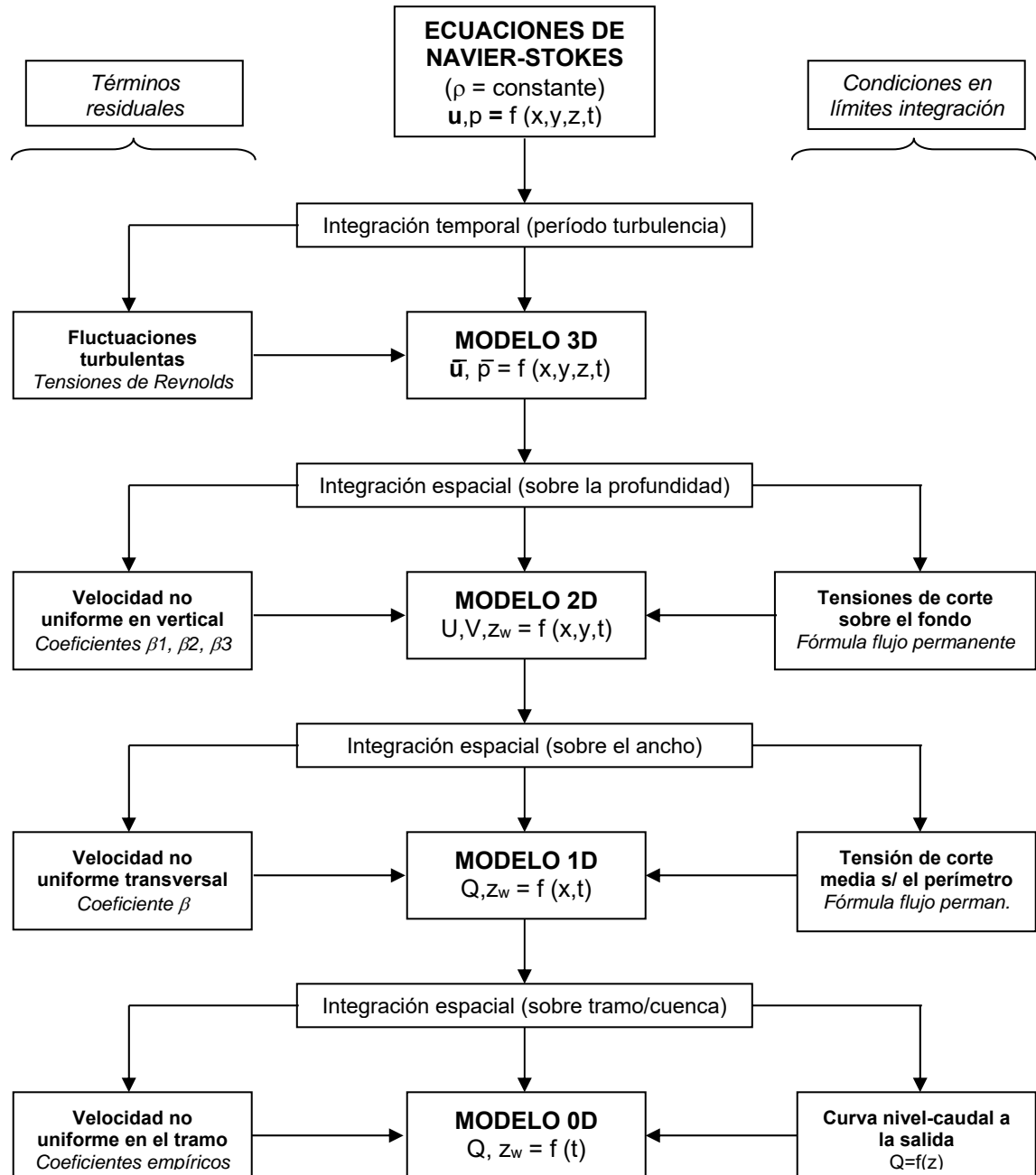


Figura 20. Modelos hidrodinámicos obtenidos a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de fluidos viscosos incompresibles y, en particular, para flujo turbulento a superficie libre, han sido objeto de diferentes simplificaciones a través de los años. Los más populares y aceptados modelos matemáticos empleados en el ámbito de los recursos hídricos durante los últimos 170 años son, efectivamente, formas más o menos simplificadas (también más o menos manipuladas) de las ecuaciones de Navier-Stokes (1845); no obstante, muchos han sido desarrollados en un modo completamente independiente de estas últimas.

Para flujo turbulento, la integración temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre el período de la turbulencia, conduce a las ecuaciones de Reynolds (RANS). Estas ecuaciones son idénticas a las de Navier-Stokes pero para el flujo medio, es decir, las tres componentes del vector velocidad \bar{u}_i y la presión p (purgadas de las fluctuaciones), aparecen como funciones de las tres coordenadas espaciales x , y , z y el tiempo t (modelo tridimensional 3D del flujo medio). Sin embargo, dada la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes (sobre todo el término de aceleración convectiva) las fluctuaciones turbulentas aparecen en las ecuaciones de Reynolds en forma de términos residuales, denominados tensiones adicionales de Reynolds, los cuales generan más incógnitas que ecuaciones disponibles. Algunos modelos de cierre de la turbulencia han sido descritos en el apartado 10.4.

De todos modos, el modelo tridimensional es generalmente innecesariamente complicado y muy oneroso computacionalmente para simular sistemas naturales complejos a grande escala espacial y/o temporal. Una simplificación de las ecuaciones de Reynolds del modelo 3D, definitivamente aceptada para flujos a superficie libre cuasi-horizontales (áreas costeras, estuarios, ríos, etc.), se obtiene asumiendo aceleraciones verticales despreciables, por lo cual, la tercera ecuación dinámica de Reynolds se reduce a la distribución hidrostática de la presión en la vertical, quedando conformadas las ecuaciones de Reynolds 2D. Realizando una integración espacial de las ecuaciones de Reynolds 2D sobre la profundidad de flujo, las variables dependientes son las velocidades medias en la vertical U , V y el nivel de la superficie libre z_w , funciones de las correspondientes coordenadas espaciales (x e y) y del tiempo t (modelo bidimensional horizontal 2D-H).

Los términos residuales en el modelo bidimensional son consecuencia de la distribución no uniforme de velocidades en la vertical. Éstos pueden ser estimados a partir de los denominados coeficientes de Boussinesq β_1 , β_2 y β_3 en condiciones de flujo permanente. Las tensiones de corte sobre el fondo (correspondientes con las condiciones en el límite inferior de integración en vertical) también se expresan mediante una fórmula de resistencia al flujo válida para condiciones de flujo permanente uniforme en función de U , V (y eventualmente de la profundidad h si se utiliza el coeficiente de rugosidad de Manning).

Además de la integración espacial en vertical sobre la profundidad de flujo, puede realizarse también la integración espacial en horizontal sobre el ancho de la sección transversal. Si las ecuaciones del modelo 2D-H son integradas sobre el ancho de la sección transversal se obtiene el modelo unidimensional 1D, constituido por las ecuaciones de Barré de Saint Venant, desarrolladas por el autor en 1871, independientemente del proceso de integraciones sucesivas de las ecuaciones de Navier-Stokes. En dichas ecuaciones, el caudal Q y el nivel z_w son función de la distancia x a lo largo de la corriente hídrica y del tiempo t .

También para el modelo unidimensional, el término residual (coeficiente de Boussinesq β) y las condiciones en el límite de integración (tensión de corte media sobre el perímetro mojado de la sección transversal) se estiman considerando una fórmula de resistencia válida para condiciones de flujo permanente uniforme. Cuando la sección transversal no es compacta (por ejemplo, es compuesta por un canal principal flanqueado por canales/planicies de inundación) el término residual no es para nada despreciable y debe ser evaluado mediante una división en subsecciones. En el Unidad 5 se describe en detalle tal procedimiento, cuando se presenta la resolución del modelo unidimensional de flujo impermanente gradualmente variado de onda dinámica. El modelo unidimensional, ya sea en condiciones de flujo permanente o impermanente, todavía representa el abordaje más apropiado para una gran variedad de problemas en Ingeniería Hidráulica e Hidrología. Por otra parte, los modelos hidrodinámicos cuasi-bidimensionales (cuasi-2D) se basan en distintas aproximaciones del modelo unidimensional para representar las leyes de descarga entre celdas adyacentes.

El modelo unidimensional puede ser ulteriormente simplificado mediante integración espacial. La operación de integración espacial más extrema es la que se realiza sobre la totalidad del campo de flujo (tramo de río o cuenca). Esta operación conduce a los modelos cerodimensionales 0D, también denominados en Hidrología modelos con parámetros concentrados (en contraposición con los anteriores que se definen como modelos diferenciales distribuidos). En estos modelos la ecuación de momentum es reemplazada por una relación algebraica denominada función de almacenamiento que vincula almacenamiento con caudales.

Los modelos cerodimensionales han encontrado mayor campo de aplicación en la Hidrología. Por ejemplo, en los denominados métodos de propagación de crecidas "hidrológicos" (método de Muskingum) o en los métodos conceptuales de transformación lluvia-caudal (Clark, Dooge, Nash, etc.). El punto crucial de los modelos cerodimensionales es la función de almacenamiento (último vestigio de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento o balance de momentum). Solo en algunos casos especiales (embalse profundo controlado por un vertedero, canal prismático, etc.) esta función puede obtenerse a través de la integración de las ecuaciones del modelo unidimensional despreciando los términos residuales. En la mayoría de los casos, especialmente en cuencas hidrográficas y tramos de ríos, la relación entre almacenamiento y caudales puede ser obtenida a través de la calibración de coeficientes empíricos.

15. BREVE COMENTARIO SOBRE MODELOS PARA FLUJO HÍDRICO EN MEDIOS POROSOS

Las ecuaciones que representan el flujo en un medio granular incompresible también pueden ser obtenidas a través de un proceso de integración de las ecuaciones de Navier-Stokes. Debido a que el escurrimiento a través de los poros de un material granular (como la matriz de un suelo) es generalmente muy bajo, el mismo puede considerarse un flujo de escurrimiento lento (creeping flow), por lo tanto, los términos de inercia de la ecuación de Navier-Stokes pueden ser despreciados y, además, no es necesario realizar ninguna integración temporal para eliminar fluctuaciones turbulentas. En cambio, a los efectos de suprimir las desviaciones y la tortuosidad de la distribución de velocidad a través de los poros, es necesario realizar la integración espacial sobre un pequeño volumen de agua (que incluya, sin embargo, un número grande de granos). Las tensiones normales y tangenciales transferidas al volumen de agua por el esqueleto granular

(digamos las condiciones en el límite de integración introducidas por la operación de promedio) son expresadas mediante la ley de Darcy, quedando conformadas las ecuaciones del modelo 3D.

El modelo tridimensional del flujo de agua subterránea, obtenido de esta manera, puede ser subsecuentemente objeto de integraciones espaciales, tal como vimos en el punto anterior. Integrando en vertical (profundidad) y en horizontal (ancho) se obtienen respectivamente los modelos bidimensionales y unidimensionales. La aproximación de Dupuit (presión hidrostática y distribución de velocidad uniforme en profundidad y en la sección transversal) corresponde a asumir que los términos residuales producidos por cada integración son despreciados.

Modelos cerodimensionales para flujo de agua subterránea se obtienen mediante integración espacial sobre la totalidad del campo de flujo. Nuevamente, como en el caso de los modelos de flujo a superficie libre, la ecuación de momentum es reducida radicalmente a una simple (frecuentemente lineal) relación entre almacenamiento y caudal, mientras que la continuidad se expresa mediante la conocida ecuación diferencial ordinaria agregada para un reservorio. Los modelos cerodimensionales (ya sea de reservorio único o una red de reservorios) son utilizados frecuentemente para simulaciones simples en hidrología subterránea.

16. INTRODUCCIÓN A LA MODELACIÓN FÍSICA

La modelación física de procesos hidrodinámicos se realiza para ensayar distintos tipos de estructuras hidráulicas y también para desarrollar investigaciones experimentales en condiciones controladas de laboratorio. A tales fines, con el modelo físico se trata de representar en escala reducida, el flujo (y eventualmente el sedimento) del río en escala real o prototipo; analizando por ejemplo el comportamiento de estructuras hidráulicas y distintas medidas alternativas que mejoren el diseño hidráulico final.

Los modelos físicos hidráulicos Froudianos, o sea aquellos escalados respetando la igualdad del número de Froude en modelo y prototipo, pueden ser clasificados en dos grandes grupos: i) de fondo fijo y ii) de fondo móvil. Así como en la modelación matemática morfodinámica se requiere una correcta representación de las variables de flujo (hidrodinámica), en la modelación física a fondo móvil (morfodinámica), también se necesita que la hidrodinámica sea representada correctamente, es decir, no se generen o se minimicen los "efectos de escala" en el modelo físico, que puedan inducir errores en la reproducción de la dinámica del flujo y del sedimento.

Por otra parte, existen modelos físicos hidráulicos analógicos o micro-modelos desarrollados en "mesas morfodinámicas", generalmente no escalados de acuerdo a Froude, que intentan reproducir solo algunas características del prototipo (Peakall et al., 1996). Es decir, simulan ciertas características de un sistema natural, aunque los procesos, las formas, la dinámica, el comportamiento, los materiales y/o las geometrías no se ajusten rigurosamente al escalamiento del sistema real (Chorley, 1967). Se trata de modelos descriptivos simples, basados en "afinidad de procesos" y no en estrictas leyes de semejanza (Hooke, 1968; Tal y Paola, 2007). Dichos modelos presentan dificultades para extrapolar los resultados de las mediciones a las situaciones del sistema real (Hooke, 1968, Isidoro et al., 2012). De todos modos, los mismos permiten la visualización de procesos morfodinámicos en forma expeditiva, los cuales son difíciles de observar directamente en la naturaleza, por lo cual son herramientas muy útiles para comunicación y educación (Maynord, 2006).

La elección del tipo de modelo físico depende de varios factores, incluidos los objetivos y la justificación del proyecto, así como las limitaciones de costo y espacio disponible en laboratorio (Frostick et al., 2011). Efectivamente, las dimensiones de un modelo físico están limitadas por la disponibilidad de espacio en el laboratorio. Grandes tramos de ríos son en principio excluyentes para este tipo de modelación, para los cuales resulta más conveniente la modelación matemática. En contraposición, los procesos hidrodinámicos y morfodinámicos locales en estructuras hidráulicas pueden ser adecuadamente simulados mediante modelación física.

En cualquier caso, la modelación física (a fondo fijo o móvil) puede ser complementada con modelación matemática de detalle, en un proceso de retroalimentación, en donde el modelo físico aporta datos fundamentales para calibrar un modelo matemático, con el cual re-analizar la performance del modelo físico e inclusive extender el dominio de modelación y realizar una mayor cantidad de pruebas con un costo logístico menor.

16.1 Relaciones de Escala para Modelos Físicos Froudianos

Las variables del prototipo se indican con el subíndice p y se refieren al río en escala real, para el cual debe construirse un modelo físico, cuyas variables se indican con el subíndice m. Por ejemplo, si g_p y g_m son la aceleración de la gravedad en prototipo y modelo respectivamente, la relación entre ambas variables se indica mediante $g_r = g_p/g_m$ y dado que son iguales $g_r = 1$.

Las leyes de similitud o semejanza se pueden dividir en tres tipos: i) geométricas ii) cinemáticas y iii) dinámicas (Yalin, 1971). Para que exista semejanza geométrica entre prototipo y modelo, las escalas de longitud deben guardar una cierta proporción.

Las escalas de longitud se refieren a las relaciones existentes entre dos sistemas de referencia en coordenadas cartesianas ortogonales (x,y,z) , tal como el de Figura 21, donde x: coordenada horizontal longitudinal, y: coordenada horizontal transversal y z: coordenada vertical. La relación de escala horizontal longitudinal es $x_r = x_p/x_m$, la cual para $x_r = 50$ indica que 1 m en el modelo físico es igual a 50 m en el prototipo. De la misma manera, $y_r = y_p/y_m$ y $z_r = z_p/z_m$.

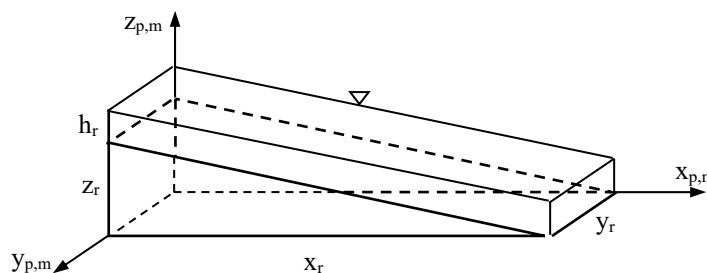


Figura 21. Sistema de referencia y relaciones de escala para semejanza geométrica.

La semejanza geométrica exacta o completa en un modelo físico hidráulico se obtiene cuando las relaciones de escala de longitudes (en horizontal y vertical) son idénticas. En tal caso se dice que el modelo físico es *no distorsionado*, es decir, se define una única escala L_r para todo el espacio: $L_r = x_r = y_r = z_r = h_r$.

Por otra parte, en un modelo *distorsionado*, las escalas horizontales x e y son generalmente iguales y se expresan como: $L_r=x_r=y_r$, la cual es distinta a la escala vertical: $z_r=h_r$. El factor de distorsión es $\delta=L_r/z_r$.

La mayoría de los ríos presentan dimensiones horizontales significativamente mayores que la profundidad de flujo, por lo tanto, adoptando un modelo no distorsionado, la profundidad de flujo en el modelo físico puede resultar muy pequeña. Más allá de la dificultad de realizar mediciones en tal situación, es probable que el flujo en el modelo sea laminar mientras que en el prototipo sea turbulento, o (si el fondo es móvil) en el modelo no se alcancen valores de velocidad y profundidad compatibles para el transporte de sedimento. En tal caso, se debe adoptar $L_r=x_r=y_r > z_r=h_r$ (modelo distorsionado), que analizaremos más adelante.

La semejanza cinemática implica que las líneas de corriente y trayectorias en prototipo y modelo deben ser geoméricamente semejantes. Para lo cual es necesaria la semejanza geométrica y una única escala de tiempo.

Para que exista semejanza dinámica entre prototipo y modelo, los polígonos de fuerzas deben ser geoméricamente semejantes. Para lograr una similitud dinámica, se requiere similitud geométrica y cinemática. El grado en que se satisfacen las leyes de similitud depende de: i) los fines y objetivos del estudio, ii) si se requiere que el modelo físico genere datos cuantitativos o cualitativos y iii) si el modelo puede ser calibrado y ajustado usando los datos disponibles del prototipo.

Los modelos físicos hidráulicos utilizan agua, o sea, la densidad del agua ρ y la viscosidad dinámica μ , son iguales en prototipo y modelo: $\rho_r=1$, $\mu_r=1$, lo cual implica que, para la viscosidad cinemática vale $\nu_r=1$. Además, dado que $g_r=1$, para el peso específico vale $\gamma_r=1$.

En el Apartado 3 se analizó el significado dimensional de las ecuaciones de Navier-Stokes y surgieron los números de Reynolds (Re) y Froude (F). Para el flujo a superficie libre en ríos y canales se adopta la profundidad de flujo h como longitud característica del fenómeno en estudio, cuya relación de escala es $h_r=h_p/h_m$, en concordancia con la escala de longitud vertical z_r (ver Figura 21). Considerando las velocidades medias en la sección transversal en modelo y prototipo (omitiendo la barra superior que indica velocidad media en la sección), las relaciones de escala para ambos números adimensionales son:

$$Re_r = \frac{U_r h_r}{\nu_r} = 1 \Rightarrow U_r = 1/h_r \quad (164)$$

$$F_r = \frac{U_r}{\sqrt{g_r h_r}} = 1 \Rightarrow U_r = \sqrt{h_r} \quad (165)$$

Aquí surge un conflicto entre (164) y (165). La única manera de solucionarlo es satisfaciendo las dos condiciones simultáneamente, lo cual conduce a la solución trivial $U_r=1$ si $h_r=1$, es decir, el modelo físico debe ser una réplica 1:1 del prototipo. Esto es posible en sistemas muy pequeños (Moss y Walter, 1978; Wilson et al., 2013) y es ciertamente inviable en ríos o canales con dimensiones espaciales importantes.

El número de Reynolds representa la relación entre fuerzas inerciales y viscosas, y determina si el flujo es laminar o turbulento. Por otra parte, el número de Froude representa la relación entre

fuerzas inerciales y gravitacionales, y determina si el flujo es subcrítico o supercrítico. El flujo en ríos y canales es turbulento, por lo tanto, una manera de prescindir de la condición (164) es asegurar flujo turbulento en el modelo físico, es decir, $Re_m > 600$.

Las relaciones de escala pueden obtenerse mediante análisis dimensional vía la aplicación del teorema π (Buckingham, 1914) o a partir del análisis de las ecuaciones que gobiernan el problema en estudio. La determinación de relaciones de escala, vía análisis dimensional, no dan una idea de la magnitud de los eventuales efectos de escala inducidos, por lo cual, es recomendable derivarlas mediante las ecuaciones que representan los procesos físicos involucrados.

La regla de escalado de una suma indica que, solo si dos términos tienen la misma escala, la suma de los términos tiene una idéntica escala. Por lo tanto, los efectos de escala son inexistentes si los términos de la ecuación diferencial que gobierna el proceso físico tienen una idéntica escala.

16.1.1 Hidrodinámica

Analicemos la ecuación de continuidad y la ecuación dinámica que rigen el flujo unidimensional impermanente en un canal prismático.

Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad se expresa como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U h}{\partial x} = 0 \quad (166)$$

donde h : profundidad de flujo (m), U : velocidad media en la sección (m/s), x : coordenada espacial (m) y t : coordenada temporal (s).

Igualando ambos términos de (166) y considerando $L_r = x_r$ se obtiene la relación de escala de tiempo t_r :

$$\frac{h_r}{t_r} = \frac{U_r h_r}{L_r} \Rightarrow t_r = L_r / U_r \quad (167a),(167b)$$

Además, $Q = A U$, donde A : sección transversal (m^2). Planteando la relación de escala entre prototipo y modelo, y considerando $L_r = y_r$, se obtiene:

$$Q_r = L_r h_r U_r \quad (167c)$$

Considerando que se debe satisfacer la condición de Froude (165), las relaciones de escala para el tiempo y el caudal son:

$$t_r = L_r h_r^{-1/2} \quad , \quad Q_r = L_r h_r^{3/2} \quad (168a),(168b)$$

Ecuación dinámica

La ecuación que describe la dinámica del flujo se expresa como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{U^2}{C^2 h} = 0 \quad (169)$$

donde U: velocidad de flujo media en la sección (m/s), h: profundidad de flujo (m), z: nivel del fondo (m), g: aceleración de la gravedad (m/s²), C: coeficiente de Chezy (m^{1/2}/s), x: coordenada espacial longitudinal (m), t: tiempo (s).

Igualando el primer término (aceleración local) con el segundo (aceleración convectiva) se obtiene la relación de escala de tiempo, ya determinada a partir de (167b) mediante el análisis de la ecuación de continuidad:

$$\frac{U_r}{t_r} = \frac{U_r^2}{L_r} \Rightarrow t_r = L_r / U_r \quad (170a),(170b)$$

Igualando el segundo término (aceleración convectiva) con el tercero (gradiente de fuerza de presión hidrostática) se obtiene la relación de escala de velocidad de flujo, ya vista anteriormente en (165) a partir de la condición de igualdad del número de Froude en prototipo y modelo ($F_r=1$):

$$\frac{U_r^2}{L_r} = \frac{h_r}{L_r} \Rightarrow U_r = \sqrt{h_r} \quad (171a),(171b)$$

Igualando el segundo término (aceleración convectiva) y el quinto (resistencia friccional) se obtiene la relación de escala para la resistencia al flujo (condición de rugosidad):

$$\frac{U_r^2}{L_r} = \frac{U_r^2}{C_r^2 h_r} \Rightarrow \frac{C_r^2 h_r}{L_r} = 1 \quad (172a),(172b)$$

El cuarto término de (169) escalado es $z_r/L_r=S_r$, es decir, es la relación de escala para la pendiente de fondo. Igualando en (169) el tercer término (gradiente de fuerza de presión hidrostática) con el cuarto término (acción de la gravedad) se obtiene:

$$h_r = z_r \quad (173)$$

Se observa que, para un modelo físico que cumple la condición de Froude: $F_r=F_p/F_m=1$, con semejanza geométrica completa, es decir, no distorsionado: $L_r=x_r=y_r=z_r=h_r$, se obtiene que: i) La relación de escala para pendiente de fondo es $S_r=1$, ii) La condición de rugosidad (172b) es igual a la unidad, consecuentemente la relación de escala para el coeficiente de Chezy es $C_r=1$. Todos los términos que intervienen en (169) tienen la misma escala L_r .

Sin embargo, el modelo físico admite cierta distorsión, por ejemplo, adoptando: $L_r=x_r=y_r$ distinto de $z_r=h_r$ (escala horizontal \neq escala vertical). Esto puede realizarse porque una de las hipótesis básicas de la ecuación dinámica (169) es que la distribución de presión en la vertical es hidrostática. Por lo tanto, si en el prototipo las líneas de corriente no experimentan curvaturas pronunciadas en el plano vertical, tal distorsión no implica efectos de escala sustanciales.

El motivo principal para utilizar un modelo físico distorsionado es obtener valores de profundidad en el modelo compatibles con la condición $Re_m > 600$ (flujo turbulento), y además, contemplar la condición de $Re_m^* > 70$ (flujo turbulento hidráulicamente rugoso), dos hipótesis básicas en (169).

Esta distorsión no produce efectos de escala sustanciales si se cumple la condición de Froude (171b) y se satisface la ecuación de resistencia al flujo escalada.

Un modelo distorsionado se realiza en la práctica cuando se intenta incrementar la profundidad de flujo en el modelo respecto a la de semejanza completa, por las razones expresadas anteriormente.

Esto se realiza adoptando $z_r = h_r < L_r$, por ejemplo, si $L_r = 60$ y $z_r = h_r = 30$, para una determinada profundidad h_p en el prototipo resulta $h_m = h_p/h_r$, es decir, en el modelo h se incrementa dos veces respecto a la correspondiente de semejanza completa $h_r = L_r$. También se incrementa la pendiente en el modelo: $S_m = 2S_p$ y aumenta la velocidad $U_m = U_p/h_r^{1/2}$. Esto permite al modelador, por ejemplo, modificar la rugosidad del fondo para lograr reproducir valores de profundidad observados en el prototipo para diferentes caudales, es decir, calibrar el modelo físico.

El procedimiento de calibración puede realizarse generalmente en un modelo físico hidráulico a fondo fijo, ya que, en un modelo físico a fondo móvil, la rugosidad aluvial no puede ser especificada a priori (solo estimada), dado que es función del sedimento empleado para materializar el fondo y de las condiciones de flujo en el modelo.

16.1.2 Conceptos sobre modelación física a fondo móvil

La simulación física de procesos morfodinámicos en ríos (fondo móvil) requiere obviamente que la dinámica del flujo, vista en el apartado precedente, sea correctamente simulada. Por lo tanto, a las consideraciones realizadas anteriormente se deben agregar las siguientes.

En primer lugar, el transporte adimensional de Einstein Φ puede expresarse en función de la tensión de corte adimensional τ_* como $\Phi = f(\tau_*)$:

$$\Phi = \frac{q_b}{\sqrt{(s-1)gd^3}} \quad , \quad \tau_* = \frac{hS}{(s-1)d} \quad (174a),(174b)$$

donde q_b : transporte volumétrico de sedimentos de fondo por unidad de ancho (m^2/s); d : diámetro del sedimento del lecho (m); s : gravedad específica del sedimento $s = \rho_s/\rho$, siendo ρ_s : densidad del sedimento (kg/m^3) y ρ : densidad del agua (kg/m^3); g : aceleración de la gravedad (m/s^2).

La regla de escalado de una función indica que, la relación de escala de la función es igual a la unidad si su argumento es igual a la unidad. Aplicando tal regla a la función $\Phi = f(\tau_*)$ implica que, para que no existan efectos de escala, se debe verificar:

$$\tau_{*r} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi_r = 1 \quad (175a),(175b)$$

Utilizando la ecuación de resistencia de Chezy: $U = C(hS)^{0.5}$, reemplazando en (174b) el valor de hS , la relación de escala para la tensión de corte adimensional resulta:

$$\tau_{*r} = \frac{U_r^2}{C_r^2(s-1)_r d_r} = 1 \quad (176)$$

Por otra parte, reemplazando en (176) la condición de rugosidad $C_r^2 = L_r/h_r$ dada por (172b), se obtiene:

$$U_r^2 = \frac{L_r}{h_r} (s - 1)_r d_r \quad (177)$$

Considerando que para un modelo no distorsionado ($L_r=h_r$), se cumple la condición de rugosidad (172b), es decir si no existe distorsión ($C_r=1$) de (177) resulta:

$$U_r^2 = (s - 1)_r d_r \quad (178)$$

Aquí aparece un conflicto con la condición de Froude $F_r=1$, la cual implica $U_r^2=h_r$, tal como lo expresa la (171b). Consecuentemente, para satisfacer simultáneamente la condición de Froude y la condición (178) para el transporte, se debe considerar $(s-1)_r=1$, con lo cual resulta: $d_r=h_r$. Esto es posible en lechos de sedimentos gruesos, como gravas gruesas, guijarros, cantos rodados, etc. En efecto, suponiendo un modelo físico no distorsionado con $L_r=h_r=40$ y $d_r=h_r$, si en el prototipo tenemos $d_p=200$ mm (guijarros grandes), en el modelo resulta $d_m=d_p/d_r=5$ mm (grava fina), con lo cual se puede utilizar sedimento que tiene la misma densidad ($s=2.65$) en prototipo y modelo, satisfaciéndose simultáneamente las condiciones: $F_r=1$, $C_r=1$ y $\tau_{*r}=1$.

Por otra parte, en el mismo caso anterior, si en el prototipo tenemos $d_p=1$ mm (arena), en el modelo resulta $d_m=d_p/d_r=25$ μ m (limo). Es decir, en el modelo se obtiene un diámetro muy pequeño con características sedimentológicas totalmente diferentes a las del prototipo, ya que puede exhibir cohesión y/o desarrollar formas de fondo inexistentes en el prototipo.

En tal caso es necesario adoptar un diámetro mayor en el modelo, pero con una densidad menor que la del sedimento del prototipo, es decir: $(s-1)_r>1$. Esto conduce a que $d_r \neq h_r$, originando una distorsión $h_r/d_r=(s-1)_r=\varepsilon>1$, que produce efectos de escala en el flujo, particularmente en la reproducción de la pendiente de energía, pero no en las profundidades de flujo (De Vries, 1993).

Generalmente, se prefiere cumplir con (175a), aunque es posible utilizar relaciones de escala adecuadas para la densidad del sedimento y distintos grados de distorsión geométrica, para tratar de igualar lo más posible la escala de velocidad de Froude ($F_r=1$) con la escala de velocidad que surge de $\tau_{*r}=1$, denominada velocidad ideal (Jansen, 1979), asegurando además, que la ecuación de resistencia al flujo de Chezy escalada cumpla: $U_r/C_r (h_r S_r)^{0.5}=1$, donde U_r es la velocidad ideal y $C_r=(L_r/h_r)^{0.5}$.

Realizando el escalado de la tensión de corte adimensional dada por (174b) e igualando a la unidad, resulta:

$$\tau_{*r} = \frac{(h_r^2/L_r)}{(s-1)_r d_r} = 1 \quad (179)$$

Es decir, en el caso más general que incluye la posibilidad de utilizar un modelo no distorsionado o distorsionado: $L_r \geq h_r$ y densidad de sedimento en el modelo igual o distinta a la del prototipo: $(s-1)_r \geq 1$, cumplir con $\tau_{*r}=1$ implica:

$$(s-1)_r d_r = h_r^2 L_r^{-1} \quad (180)$$

Recordando que el factor de distorsión geométrica es $\delta=L_r/h_r$ y habiendo definido el factor de distorsión de densidad del sedimento como $\varepsilon=(s-1)_r$, la (180) puede expresarse como:

$$d_r = \frac{h_r}{\varepsilon \delta} = \frac{d_p}{d_m} \Rightarrow d_m = \frac{\varepsilon \delta d_p}{h_r} \quad (181a),(181b)$$

En general, δ varía entre 1 (modelo no distorsionado) y 4. Por otra parte, considerando que la densidad del material sustituto debe ser mayor que la del agua, ε varía entre 1: $(s-1)_m=(s-1)_p$ y 50: $(s-1)_m=(s-1)_p/50$.

Por lo tanto, definiendo en primer lugar la escala vertical $z_r=h_r$, la relación de escala de diámetros se determina con (181a), y el diámetro en el modelo se determina con (181b). En (181b) se observa que, tanto la distorsión geométrica ($\delta>1$), como la distorsión en la densidad del sedimento ($\varepsilon>1$), permiten aumentar el diámetro en el modelo. Considerando el ejemplo anterior ($\delta=1$, $h_r=40$ y $d_p=1$ mm) si $\varepsilon=10$ se tiene: $d_m=0.25$ mm (tamaño de arena media). Para la arena del prototipo $s_p=2.65$, se tiene: $(s-1)_m=(2.65-1)_p/\varepsilon$, entonces la gravedad específica del material sustituto en el modelo será $s_m=1+(1.65/10)=1.165$.

Si se quisiera aumentar todavía más el diámetro en el modelo, se podría aumentar ε o, si es necesario incrementar también h_m , introducir distorsión geométrica ($\delta>1$) lo cual también contribuye a incrementar el d_m . Sin embargo, se debe considerar que, a medida que se incrementa d_m , disminuye la densidad del material sustituto a utilizar en el modelo, la cual obviamente no puede ser inferior a la del agua.

En la Tabla 1 se presentan valores de gravedad específica para distintos materiales livianos utilizados en la modelación física a fondo móvil (Bettes, 1990).

Tabla 1. Gravedad específica de materiales livianos.

| Material | $s=\rho_s/\rho$ |
|------------------------|-----------------|
| Poliestireno | 1.04 - 1.10 |
| Nailon, Plexiglas, PVC | 1.10 - 1.20 |
| PVC, Baquelita | 1.20 - 1.30 |
| Baquelita, Antracita | 1.30 - 1.60 |

La adopción de escalas adecuadas para tratar de disminuir los efectos de escala en el flujo, deben considerar también la relación de escala de tiempo morfológico, ya que una escala de tiempo morfológico muy grande origina un modelo "rápido", no dando lugar a realizar mediciones en el modelo o exagerando los procesos de erosión/deposición. Por otra parte, una escala de tiempo morfológico pequeña conduce a un modelo "lento", dando lugar a experimentos muy prolongados.

16.1.2.1 Relación de escala para el transporte de fondo

La relación de escala para el transporte q_{br} se obtiene a partir de (174a) y (174b), considerando que $\Phi=\alpha \tau_*^\beta$, con α coeficiente de proporcionalidad que puede ser ajustado con datos disponibles y $\beta=3/2$ para transporte de fondo.

$$\frac{q_{br}}{(s-1)_r^{1/2} d_r^{3/2}} = \frac{(h_r^2/L_r)^{3/2}}{(s-1)_r^{3/2} d_r^{3/2}} \quad (182a)$$

Despejando q_{br} de (182a) se obtiene:

$$q_{br} = \frac{h_r^3}{(s-1)_r L_r^{3/2}} \quad (182b)$$

16.1.2.2 Relación de escala para el tiempo morfológico

La ecuación que gobierna los procesos morfodinámicos de erosión-deposición es la ecuación de continuidad de sedimentos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_b}{\partial x} = 0 \quad (183)$$

donde p es la porosidad del sedimento, la cual no es mayormente afectada por el escalado y las demás variables ya fueron definidas. Por lo tanto, igualando ambos términos escalados, se obtiene:

$$\frac{z_r}{T_r} = \frac{1}{(1-p)_r} \frac{q_{br}}{L_r} \Rightarrow T_r = \frac{(1-p)_r L_r z_r}{q_{br}} \quad (184a),(184b)$$

donde $T_r = T_p/T_m$ es la relación de escala de tiempo morfológico. Dado que $z_r=h_r$ y considerando que $(1-p)_r \approx 1$, sustituyendo en (184b) la expresión de q_{br} (182b) se obtiene:

$$T_r = (s-1)_r L_r^{5/2} h_r^{-2} \quad (156)$$

La relación de escala de tiempo para la hidrodinámica $t_r=t_p/t_m$ es dada por la (168a) como: $t_r=L_r h_r^{-1/2}$.

En la Tabla 2 se presentan las relaciones de escala de tiempo para la hidrodinámica y la morfodinámica, considerando modelos físicos no distorsionados ($L_r=h_r$) y distorsionados ($L_r>h_r$), como así también, el material utilizado en modelo y prototipo: $(s-1)_r=1$ (misma densidad de sedimento en modelo y prototipo) y $(s-1)_r>1$ (material más liviano en el modelo que en el prototipo).

Tabla 2. Relaciones de escala para tiempos (hidrodinámica y morfodinámica).

| Modelo físico | Sedimento | $t_r=t_p/t_m$ | $T_r = T_p/T_m$ | T_r/t_r |
|----------------------------|---------------------------------|------------------|------------------------------|---------------------------|
| No distorsionado | $(s-1)_r=1$ ($\varepsilon=1$) | $h_r^{1/2}$ | $h_r^{1/2}$ | 1 |
| $L_r/h_r=1$ ($\delta=1$) | $(s-1)_r>1$ ($\varepsilon>1$) | $h_r^{1/2}$ | $(s-1)_r h_r^{1/2}$ | $(s-1)_r$ |
| Distorsionado | $(s-1)_r=1$ ($\varepsilon=1$) | $L_r h_r^{-1/2}$ | $L_r^{5/2} h_r^{-2}$ | $(L_r/h_r)^{3/2}$ |
| $L_r/h_r>1$ ($\delta>1$) | $(s-1)_r>1$ ($\varepsilon>1$) | $L_r h_r^{-1/2}$ | $(s-1)_r L_r^{5/2} h_r^{-2}$ | $(s-1)_r (L_r/h_r)^{3/2}$ |

Se observa que, la escala de tiempo para la hidrodinámica y la morfología son idénticas solo para un modelo no distorsionado, que utiliza material en el modelo con igual densidad que la del prototipo. En todos los demás casos, la diferencia entre ambas es más o menos importante dependiendo del grado de distorsión geométrica y sedimentológica introducido.

Ejemplo 1. Determinar las relaciones de escala para construir el modelo físico a fondo móvil de un tramo $L_p=360$ m de un río aluvial de ancho $B_p=15$ m, diámetro del lecho $d_p=210$ mm y pendiente $S_p=0.014$, con $U_p=4.06$ m/s y $h_p=1.62$ m. El valor del coeficiente α ajustado a los datos de transporte de sedimentos del prototipo es $\alpha=2.3$ con $\beta=3/2$. Se asume porosidad del sedimento $p=0.4$ en prototipo y modelo. El espacio disponible en el laboratorio es de 12 m. Viscosidad cinemática: $\nu=1 \times 10^{-6}$ m²/s.

Solución. Se plantea un modelo no distorsionado: $L_r=360 \text{ m}/12 \text{ m}=30$. En la Tabla 3 se resumen los cálculos realizados, donde se observa que se cumple la condición de Froude: $F_r=1$ y la condición de rugosidad: $C_r=1$.

La profundidad de flujo en el modelo es adecuada $h_m=5.4 \text{ cm}$. El diámetro del sedimento en el modelo es $d_m=7 \text{ mm}$ (grava media), por lo tanto, es posible adoptar sedimento con la misma densidad en prototipo y modelo $(s-1)_r=\epsilon=1$.

El flujo en el prototipo y en el modelo es turbulento hidráulicamente rugoso. Además, dado que el modelo es no distorsionado ($\delta=1$) y $\epsilon=1$, la escala de velocidad ideal es idéntica a la que se obtiene a partir de la condición de Froude.

Por otra parte, la tensión de corte adimensional en el prototipo y en el modelo es mayor que la crítica para inicio de movimiento (fondo móvil) y se cumple la condición $\tau_*=1$. La relación de tiempos entre morfodinámica e hidrodinámica es $T_r/t_r=1$. El caudal a introducir en el modelo es $Q_m=20 \text{ l/s}$ y el transporte de sedimentos $Q_{bm}=120 \text{ g/s}$.

Tabla 3. Resumen de cálculos del Ejemplo 1.

| Rel. Esc. Horiz.: $x_r=y_r=L_r$ | 30 | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|---------------------|------------------------|--------|
| Rel. Esc. Vert.: $z_r=h_r=d_r$ | 30 | | | |
| Rel. Esc. Velocidad: U_r | 5.48 | | | |
| | | $Q_m \text{ (l/s)}$ | $Q_{bm} \text{ (g/s)}$ | |
| | | 20 | 120 | |
| Variable | Símbolo | Prototipo | Modelo | Escala |
| Caudal | $Q \text{ (m}^3/\text{s)}$ | 98.7 | 0.020 | 4929.5 |
| Profundidad | $h \text{ (m)}$ | 1.62 | 0.054 | 30 |
| Ancho | $B \text{ (m)}$ | 15 | 0.5 | 30 |
| Longitud | $L \text{ (m)}$ | 360 | 12 | 30 |
| Pendiente | $S \text{ (-)}$ | 0.014 | 0.014 | 1 |
| Diámetro del sedimento | $d \text{ (m)}$ | 0.21 | 0.007 | 30 |
| Velocidad | $U \text{ (m/s)}$ | 4.06 | 0.741 | 5.48 |
| Nº de Froude | F | 1.018 | 1.018 | 1 |
| Coef. de Chezy | $C \text{ (m}^{1/2}/\text{s)}$ | 26.96 | 26.96 | 1 |
| Coef. rugosidad de Manning | $n \text{ (s/m}^{1/3}\text{)}$ | 0.0402 | 0.0228 | 1.76 |
| Tensión de corte adimensional | τ_* | 0.07 | 0.07 | 1 |
| Velocidad de corte | $u_* \text{ (m/s)}$ | 0.4717 | 0.086 | 5.48 |
| Nº de Reynolds (U, h) | Re | 6577200 | 40028 | 164.3 |
| Nº Reynolds (u_*, d) | Re_* | 99054.8 | 602.8 | 164.3 |
| Densidad sedimento | $(s-1)$ | 1.65 | 1.65 | 1 |
| Velocidad ideal | $U \text{ (m/s)}$ | 4.06 | 0.741 | 5.48 |
| Transporte de sedimentos | $q_b \text{ (kg/s.m)}$ | 39.52 | 0.240 | 164.3 |
| Tiempo hidrodinámica | $t \text{ (s)}$ | 88.7 | 16.2 | 5.48 |
| Tiempo morfodinámica | $T \text{ (hs)}$ | 6.5 | 1.2 | 5.48 |

Ejemplo 2. Determinar las relaciones de escala para construir el modelo físico a fondo móvil de un tramo $L_p=1500 \text{ m}$ de un río aluvial de ancho $B_p=100 \text{ m}$, diámetro del lecho $d_p=5 \text{ mm}$ y pendiente $S_p=0.0003$, con $U_p=2 \text{ m/s}$ y $h_p=5 \text{ m}$. El valor del coeficiente α ajustado a los datos de transporte de sedimentos del prototipo es $\alpha=9.5$ con $\beta=3/2$. Se asume porosidad del sedimento $p=0.4$ en prototipo y modelo. El espacio disponible en el laboratorio es de 15 m . Viscosidad cinemática: $\nu=1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Solución. Se plantea inicialmente un modelo no distorsionado: $L_r=1500$ m/15 m=100. Por lo tanto, $B_m=B_p/100=1$ m, $h_m=h_p/100=5$ cm, $U_r=100^{0.5}=10$, $U_m=U_p/10=0.2$ m/s.

El diámetro del sedimento escalado para el modelo es $d_m=d_p/100=0.05$ mm (muy pequeño, posibles efectos de cohesión). Si bien el flujo es turbulento, tanto en el prototipo ($Re_p=10^7$) como en el modelo ($Re_m=10^5$), es conveniente incrementar la profundidad de flujo en el modelo introduciendo distorsión geométrica, lo cual permite realizar las mediciones con más facilidad y, además, conjuntamente con la utilización de material más liviano en el modelo, ayuda a aumentar el diámetro.

En la Tabla 4 se resumen los cálculos realizados, donde se observa que se cumple la condición de Froude: $F_r=1$.

Tabla 4. Resumen de cálculos del Ejemplo 2.

| | | | | |
|-------------------------------------|---------------------------|-----------|-------------|----------------|
| Rel. Esc. Horiz.: $x_r=y_r=L_r$ | 100 | | Q_m (l/s) | Q_{bm} (g/s) |
| Rel. Esc. Vert.: $z_r=h_r$ | 30 | | 60.86 | 647.8 |
| Rel. Esc. Velocidad: U_r | 5.48 | | | |
| Variable | Símbolo | Prototipo | Modelo | Escala |
| Caudal | Q (m ³ /s) | 1000 | 0.06086 | 16431.7 |
| Profundidad | h (m) | 5 | 0.167 | 30 |
| Ancho | B (m) | 100 | 1 | 100 |
| Longitud | L (m) | 1500 | 15 | 100 |
| Pendiente | S (-) | 0.0003 | 0.001 | 0.3 |
| Diámetro sedimento | d (m) | 0.005 | 0.000167 | 30 |
| Velocidad | U (m/s) | 2 | 0.365 | 5.48 |
| Nº de Froude | F | 0.286 | 0.286 | 1 |
| Coef. de Chezy | C (m ^{1/2} /s) | 51.64 | 28.28 | 1.826 |
| Coef. rugosidad de Manning | n (s/m ^{1/3}) | 0.0253 | 0.0262 | 0.965 |
| Tensión de corte adimensional | τ_* | 0.18 | 0.61 | 0.3 |
| Velocidad de corte | u_* (m/s) | 0.1213 | 0.0404 | 3.0 |
| Nº de Reynolds (U,h) | Re | 10000000 | 60858 | 164.3 |
| Nº de Reynolds (u*,d) | Re_* | 606.5 | 6.74 | 90 |
| Densidad sedimento | (s-1) | 1.65 | 0.262 | 6.3 |
| Diámetro sedimento ($p/\tau_*=1$) | d (m) | 0.005 | 0.0035 | 1.429 |
| Nº de Reynolds (u*,d) | Re_* | 606.5 | 141.5 | 4.286 |
| Velocidad ideal | U (m/s) | 2 | 0.365 | 5.48 |
| Tensión de corte adimensional | τ_* | 0.18 | 0.18 | 1 |
| Transporte de sedimentos | q_b (kg/s m) | 2.776 | 0.648 | 4.286 |
| Tiempo para hidrodinámica | t (s) | 750 | 41 | 18.26 |
| Tiempo para morfodinámica | T (hs) | 1193 | 1.7 | 700 |

La profundidad de flujo en el modelo es adecuada $h_m=16.7$ cm. La distorsión geométrica introducida ($\delta=3.33$) aumenta el diámetro en el modelo, pero no lo suficiente, ya que es arena muy fina y $Re^*<70$, por lo tanto, se adopta material con menor densidad en el modelo $(s-1)_r=\epsilon=6.3$, con lo cual resulta $d_m=3.5$ mm y $s_m=1.262$ (se podría utilizar Baquelita, ver Tabla 1).

El flujo en el prototipo y en el modelo es turbulento hidráulicamente rugoso. Además, la escala de velocidad ideal es idéntica a la que se obtiene a partir de la condición de Froude. Por otra parte, la tensión de corte adimensional en el prototipo y en el modelo es mayor que la crítica para inicio de movimiento (fondo móvil) y se cumple la condición $\tau_*=1$. La relación de tiempos entre morfodinámica e hidrodinámica es $T_r/t_r=38.34$. El caudal a introducir en el modelo es $Q_m=60.86$ l/s y el transporte de

sedimentos $Q_{bm}=647.8$ g/s. La distorsión geométrica introduce distorsión en la condición de rugosidad, pero puede verificarse que se cumple: $U_r/C_r (h_r S_r)^{0.5}=1$.

17. BIBLIOGRAFÍA

- Abbot, M.B. and Basco, D.R. (1989). COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS. An Introduction for Engineers. John Wiley & Sons, New York.
- Baldwin, B.S. y Lomax, H. (1978). Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. AIAA Paper 78-257, Huntsville, AL.
- Bettes, R. (1990). *Survey of lightweight sediments for use in mobile-bed physical models*. In: Movable Bed Physical Models. H.W. Shen (Ed.). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 115-123.
- Boussinesq, J. (1877). Theorie de l'Écoulement Tourbillant. Mem. Presentes par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr., Vol. 23, pp. 46-50.
- Buckingham, E. (1914). *On physically similar systems: Illustrations of the use of dimensional equations*. Physical Review, 4(4), 345-376.
- Cebeci, T. y Smith, A.M.O. (1974). *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Ser. In Appl. Math. & Mech., Vol. XV, Academic Press.
- Chorley, R.J. (1967). *Models in geomorphology*. In: Models in Geography. Chorley, R.J., Haggett P. (Eds.), Methuen, London, 59 – 96.
- Cunge, J.A; Holly, F.M. and Verwey, A. (1980). PRACTICAL ASPECTS OF COMPUTATIONAL RIVER HYDRAULICS. Pitman, London.
- De Vries, M. (1993). *Use of models for river problems*. UNESCO Publishing, Paris. ISBN 92-3-102861-8.
- Frostick, L.E.; McLelland, S.J. y Mercer, T.G. (2011). *User guide to physical modelling and experimentation: experience of the HYDRALAB network*. CRC Press, Leiden: 245.
- Hinze, J. O. (1976). TURBULENCE. McGraw Hill, New York.
- Hooke, R.L. (1968). *Model Geology: prototype and laboratory streams – discussion*. Geological Society of America Bulletin, 79, 391 – 394.
- Isidoro, J.; de Lima J. y Leandro, J. (2012). *The study of rooftop connectivity on the rainfall-runoff process by means of a rainfall simulator and a physical model*. Zeitschrift für Geomorphologie, 57, 177 – 191.
- Jansen, P.Ph.; van Bendegom, L.; van den Berg, J.; de Vries, M. y Zanen, A. (1979) *Principles of River Engineering*. Pitman, London.
- Kolmogorov, A.N. (1942). Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid. Izvestia Academy of Sciences, USSR; Physics, Vol. 6, Nos. 1 and 2, pp. 56-58.
- Launder B. y Spalding D. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, pp. 269-289.
- Lesieur, M.W. (1987). TURBULENCE IN FLUIDS. Nijhoff, Amsterdam.
- Leslie, D.C. (1982). SIMULATION METHODS FOR TURBULENT FLOWS. En *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. K.M. Morton and M.J. Bairnes (eds). Academic Press, London.

- Maynard, S. (2006). *Evaluation of the micromodel: An extremely small-scale movable bed model*. Journal of Hydraulic Engineering, 132(4), 343–353.
- Nezu, I. (1977). Turbulent Structure in Open-Channel Flows. Ph.D. Thesis. Translation of Doctoral Dissertation in Japanese. Department of Civil Engineering. Kyoto University. Japan.
- Peakall J.; Ashworth, P.J. y Best, J.L. (1996). *Physical Modelling in Fluvial Geomorphology: Principles, Applications and Unresolved Issues*. The Scientific Nature of Geomorphology. Rhoads B.L., Thorn C.E. (Eds.). John Wiley & Sons, Chichester, 221–254.
- Peakall, J.; Ashworth, J.P. y Best, J.L. (2007). *Meanderbend evolution, alluvial architecture, and the role of cohesion in sinuous river channels: a flume study*. Journal of Sedimentary Research 77(3), 197-212.
- Prandtl, L. (1925). Uber die ausgebildete Turbulenz. *ZAMM*, Vol. 5, pp. 136-139.
- Prandtl, L. (1945). Uber ein neues Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz. *Nacr. Akad. Wiss. Gottingen, Math-Phys. Kl.* 1945, pp6-19.
- Reynolds, O. (1883). An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. R. Soc.* 174:935–82.
- Reynolds, O. (1895). On the Dynamic Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 186:123.
- Robertson, J.M. (1965). *HYDRODYNAMICS IN THEORY AND APPLICATION*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Rodi, W. (1980). *TURBULENCE MODELS AND THEIR APPLICATIONS IN HYDRAULICS*. IAHR Monograph, June 1980.
- Shames, I.H. (1995). *MECÁNICA DE FLUIDOS*. McGraw Hill Interamericana, Bogotá.
- Tal, M. y Paola, C. (2010). *Effects of vegetation on channel morphodynamics: results and insights from laboratory experiments*. *Earth Surface Processes and Landforms*, 35, 1014 – 1028.
- Tennekes, H. y Lumley, J.L. (1972). *A FIRST COURSE IN TURBULENCE*. MIT Press. Cambridge, MA.
- Van Driest, E.R. (1956). On Turbulent Flow Near a Wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 23, p. 1007.
- Von Karman, T. (1930). Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz. *Proc. Int. Congr. Appl. Mech.*, 3rd, Stockholm, Part 1, pp. 85-105.
- Yalin, S.M. (1971). *Theory of Hydraulic Models*. Macmillan Press LTD, London, 1971.