

Vacíos $WAdS$ x Σ en Teorías de Alta Curvatura

Tesina de Licenciatura en Física



Postulante: Gerónimo Jesús Caselli (Legajo: C-6642/7)

Director: Andrés Goya (Universidad de Buenos Aires)

Codirector: Luis O. Manuel (Universidad Nacional de Rosario)

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Universidad Nacional de Rosario

31 de mayo de 2022

A mis padres, familia y amigos.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres quienes me apoyaron en el momento en que decidí cambiar de carrera desde Ingeniería Mecánica cuando estaba en segundo año. También a mis hermanas, primos, viejos amigos y el resto de mi familia que también me acompañaron a lo largo de esta etapa.

También quiero agradecer profundamente a todos los profesores de la Facultad de Ciencias Exactas de Rosario y especialmente a los profesores la carrera de física que se destacaron por su excelencia académica, su compromiso en la enseñanza y en transmitir su pasión por la física.

Por último, agradezco a mi director Andrés Goya, por su desempeño como docente en Relatividad General y principalmente por su indispensable guía en la realización de esta Tesina. A pesar de la dificultad de trabajar a distancia siempre se prestó con plena disponibilidad para responder preguntas y coordinar periódicas consultas virtuales. También agradezco al grupo de Física de Altas Energías del IAFE (CONICET, UBA) por haberme incluido en las reuniones virtuales que realizan semanalmente, y en particular, a Gastón Giribet quien también estuvo involucrado en algunas de las discusiones de este trabajo.

Resumen

En esta tesis he estudiado una extensión particular de la correspondencia AdS/CFT (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory), específicamente, he trabajado en la conocida dualidad Warped AdS/CFT. La Conjetura de Maldacena estableció una equivalencia entre dos teorías muy diferentes: de un lado, una teoría de gravedad (D+1)-dimensional en la geometría de Anti-de Sitter, y del otro lado una teoría de campos conforme D-dimensional en el espacio-tiempo de Minkowski. Una propiedad interesante de la correspondencia AdS/CFT es que relaciona teorías en regímenes de acoplamiento opuestos. Esto motiva a buscar extensiones de la correspondencia a fin de aplicarlas, por ejemplo, en sistemas de materia condensada; el problema a resolver es encontrar una dual gravitatorio que realice las simetrías de la teoría de gauge de interés. Además de lo mencionado, es interesante por sí mismo estudiar extensiones de la correspondencia AdS/CFT con el objetivo de verificar la generalidad de la holografía.

Esto es lo que ha motivado mi trabajo, en el que estudié las propiedades de la solución de agujero negro asintóticamente $WAdS_3 \times \Sigma_{D-3}$ de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet (una teoría de gravedad con términos superiores en la curvatura). He encontrado el resultado inesperado de que todas las cargas conservadas (masa, momento angular, entropía) del agujero negro son cero, mientras que la temperatura es finita. Otros autores han encontrado situaciones similares, por ejemplo, en la dualidad Lifshitz/gravity. Sin embargo, aún no se ha encontrado una explicación razonable a este inusual resultado.

Índice

1. Introducción	1
2. Teorías de Gravedad de Alta Curvatura	5
2.1. Términos superiores en la curvatura	6
2.1.1. Teorías de Lovelock como correcciones a Relatividad General desde Teoría de cuerdas	6
2.1.2. Término de EGB como extensión dimensional de la característica de Euler	7
2.2. Termodinámica de agujeros negros y cargas conservadas en teorías de alta curvatura	9
2.2.1. Entropía de Wald	10
2.2.2. Temperatura	11
2.2.3. Cargas de Noether-Wald	14
3. Holografía	15
3.1. Espacio Anti-de Sitter	16
3.2. Teoría de campos conforme y simetrías	18
3.2.1. Funciones de correlación en una CFT	22
3.3. Conjetura de Maldacena (AdS/CFT)	24
3.3.1. Diccionario holográfico	27
3.4. Renormalización holográfica	32
3.4.1. Renormalización holográfica en GR	33
3.4.2. Renormalización holográfica en EGB	36
3.5. Extensiones de AdS/CFT	38
3.5.1. Correspondencia Lifshitz-Schrödinger/CMT	38
3.5.2. Correspondencia WAdS/WCFT	40
4. Cálculos y Resultados para WAdS$\times\Sigma$	44
4.1. Solución de las ecuaciones de campo	45
4.1.1. Caso $D = 5$	46
4.1.2. Caso $D = 6$	47
4.2. Renormalización holográfica	47
4.2.1. Tensor de Brown-York	48
4.2.2. Cargas conservadas	48
4.3. Entropía de Wald y cargas de Noether-Wald	49
4.3.1. Entropía de Wald	49
4.3.2. Temperatura	49
4.3.3. Cargas de Noether-Wald	51

5. Conocimientos Adquiridos y Resultados	52
5.1. Conocimientos adquiridos	52
5.2. Resultados y perspectivas a futuro	52
A. Integrales de Camino en QFT	55
A.1. Integrales funcionales	55
A.2. Teoría de campos euclídea	57
B. Hipersuperficies	60
Bibliografía	63

1. Introducción

Objetivo general

El objetivo general de este trabajo podría resumirse en profundizar el estudio de extensiones de la correspondencia AdS/CFT [Maldacena, 1999] a geometrías no AdS (por Anti-de Sitter). Daremos a continuación el contexto y las motivaciones para realizar este estudio.

Motivaciones

La teoría de la Relatividad General (GR, por sus siglas en inglés) es el marco teórico que describe la física a escalas cosmológicas y a escalas astrofísicas, como por ejemplo, la naturaleza y comportamiento de agujeros negros y galaxias. La Relatividad General ha sido puesta a prueba incontables veces desde su postulación en 1916 hasta la actualidad, por ejemplo, a partir de la desviación de la luz en torno al Sol realizada en 1919 por Dyson, Eddington y Davidson, hasta la reciente detección directa de ondas gravitacionales realizada por la colaboración LIGO en febrero del año [Abbott et al., 2016].

Más allá de su gran éxito existen motivos tanto observacionales como teóricos para estudiar modificaciones de GR. Entre las motivaciones cosmológicas podemos mencionar el llamado “Problema de la constante cosmológica” [Weinberg, 2001, Carroll, 2001], que consiste de la incompatibilidad entre las estimaciones del valor de la constante cosmológica obtenida de las observaciones de corrimiento al rojo de supernovas tipo Ia [Riess et al., 1998, Perlmutter et al., 1999] y valor de expectación de la energía de vacío provisto por el Modelo Estándar de la física de partículas, llegando a diferir en 120 órdenes de magnitud. Entre las motivaciones teóricas existe el problema de formular un modelo de gravedad cuántica.

Por otro lado, la teoría de cuerdas, uno de los candidatos más promisorios a proveer una teoría cuántica de la gravedad y unificadora de todas las interacciones fundamentales, brinda una motivación para estudiar teorías de gravedad con términos superiores en la curvatura. La teoría efectiva de bajas energías de teoría de cuerdas es una teoría de supergravedad¹ cuya parte gravitatoria está dada por la acción de Einstein-Hilbert. Al estudiar qué correcciones introduce teoría de cuerdas en el sector gravitatorio se puede ver que los términos a segundo orden en la expansión perturbativa son cuadráticos en el tensor de Riemann [Zwiebach, 1985].

Además, la teoría de cuerdas es el marco original de una idea que revolucionó la física de altas energías desde 1997 hasta la actualidad: la conjetura de Maldacena [Maldacena, 1999]. También llamada correspondencia AdS/CFT, la conjetura relaciona la teoría de

¹La supersimetría es una simetría hipotética en la que cada partícula tiene una compañera supersimétrica; cada bosón tiene una súper compañera fermión y viceversa.

cuerdas tipo IIB en $\text{AdS}_5 \times S^5$ con la teoría de Yang-Mills con $\mathcal{N} = 4$ supersimetrías y grupo de gauge $\text{SU}(N)$ en espacio plano de cuatro dimensiones. Esta dualidad es la realización más existosa y precisa relativa al principio holográfico propuesto por 't Hooft [Hooft, 1993] y Susskind [Susskind, 1995] el cual postula que “los grados de libertad deben estar en la superficie”. El ejemplo paradigmático es el de la entropía de agujeros negros que es proporcional al área del horizonte de eventos [Bekenstein, 2020]. Una característica interesante de la conjetura es que vincula teorías en regímenes de acoplamiento opuestos; cuando en un lado de la dualidad tenemos una teoría con acoplamiento débil, la otra está en acoplamiento fuerte y viceversa. Por ejemplo, en la versión más utilizada de AdS/CFT, la correspondencia provee una descripción de la teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM fuertemente acoplada (la cual es muy difícil de tratar), en términos de una teoría perturbativa de bajas energías de teoría de cuerdas, es decir, una teoría de supergravedad en la cual se pueden realizar cálculos con relativa facilidad.

Esta relación de dualidad entre una teoría fuertemente acoplada y una débilmente acoplada invita a buscar otros ejemplos de AdS/CFT en los que pueda usarse el lado opuesto al lado fuertemente acoplado para realizar cálculos que de otro modo podrían llegar a ser imposibles. Sin embargo, la mayoría de las CFTs que aparecen en los ejemplos usuales de extensiones de holografía no son, en principio, modelos realizables experimentalmente. Esto último, motiva la búsqueda de extensiones de AdS/CFT que puedan ser aplicadas, por ejemplo, a teorías de materia condensada, lo que podría brindar nuevas ideas para la física de sistemas fuertemente acoplados.

Por otro lado, también existen aplicaciones en sistemas fuertemente acoplados de materia condensada descritos por teorías con invariancia de escala no-relativista que pueden ser estudiados en un laboratorio. En este trabajo mencionaremos dos de ellos, a saber, los llamados fermiones en unitariedad, que consisten de arreglos de átomos fermiónicos fríos cuyas interacciones son aproximadamente invariantes de escala. El otro caso interesante son electrones fuertemente interactuantes con puntos críticos cuánticos que respetan la invariancia de escala anisótropa $(t, \vec{x}) \rightarrow (\lambda^z t, \lambda \vec{x})$ con $z > 0$, conocidos como puntos fijos de Lifshitz. Para describir sistemas de materia condensada mediante holografía es necesario encontrar una geometría en el dual gravitatorio que respete las simetrías de la CMT (sigla en inglés de condensed matter theory). En el caso de átomos fríos, el espacio-tiempo debe poseer las simetrías del grupo no-relativista conforme, también llamado grupo de Schrödinger [Son, 2008, Balasubramanian and McGreevy, 2008]. Por otra parte, para los sistemas de puntos críticos de Lifshitz, el dual gravitatorio debe ser invariante ante difeomorfismos de la forma $(t, \vec{x}) \rightarrow (\lambda^z t, \lambda \vec{x})$, $z > 0$. Dicha geometría recibe el nombre de espacio de Lifshitz [Kachru et al., 2008]. Los espacios de Schrödinger y de Lifshitz no son soluciones de vacío de GR, sino que es necesario añadir materia para soportar dichas geometrías. Es interesante notar que estos espacios con invariancia de escala anisótropa aparecen naturalmente como soluciones de vacío de teorías de gravedad con términos su-

periores en la curvatura, como se muestra en [Ayón-Beato et al., 2010, Ayón-Beato et al., 2011].

Por último, cabe mencionar otra extensión de AdS/CFT que ha sido estudiada en la literatura, la llamada Kerr/CFT [Guica et al., 2009], que relaciona la geometría de horizonte cercano de agujeros negros rotantes con la dinámica de una CFT bidimensional. Muy relacionada con Kerr/CFT se encuentra la correspondencia WAdS/(W)CFT, donde WAdS denota a las deformaciones de AdS conocidas como Warped Anti-de Sitter. Estos espacios también aparecen como geometrías de horizonte cercano de agujeros negros rotantes extremales. En este caso, WCFT no posee las simetrías del grupo conforme sino que posee un grupo de simetrías generado por la suma semi-directa entre un álgebra de Virasoro y un álgebra de Kac-Moody [Detournay et al., 2012].

Es interesante mencionar que la holografía ha sido tan exitosa en relacionar teorías gravitatorias y teorías de campos conformes que incluso mapea teorías de gravedad no-unitarias en CFT no-unitarias. Este es el caso de las Log-gravity y las teorías de campos logarítmicas denominadas Logarithmic CFT (LCFT), que tiene aplicación en percolación y turbulencia. La dualidad que las relaciona se denomina Log-grav/LCFT [Grumiller et al., 2013].

Metodología y objetivos específicos

En este trabajo de tesis nos proponemos extender el estudio de la correspondencia WAdS/WCFT al caso en que las soluciones son de mayor dimensión, en teorías en las que el gravitón no posee masa y en presencia de términos de alta curvatura. Este tipo de teorías son conocidas como teorías de Lovelock y aparecen como correcciones a GR en el límite de bajas energías de teoría de cuerdas [Zwiebach, 1985]. Más precisamente, lo que nos proponemos estudiar son soluciones del tipo $WAdS_3 \times \Sigma_{D-3}$ con $D = 5, 6$ en GR con el término de Gauss-Bonnet (cuadrático en la curvatura). Este es un sector que no ha sido explorado en la literatura y provee un escenario propicio para estudiar la correspondencia (W)AdS/CFT y sus aplicaciones a la física de los agujeros negros. Para llevar a cabo esta tarea se calcularon las cargas conservadas de la solución y la acción efectiva on shell de la teoría empleando herramientas de renormalización holográfica [Balasubramanian and Kraus, 1999] aplicadas a teorías de gravedad con términos de alta curvatura, haciendo los cambios necesarios para el caso de espacios asintóticamente WAdS como se realizó en [Giribet and Goya, 2013].

La estructura de esta tesis se divide en dos amplias secciones teóricas. En la primera de ellas (2) se introducirá la teoría de gravedad con la que trabajaremos, la cual es una teoría de gravedad de segundo orden en la curvatura. Luego, en esa misma sección se expondrán brevemente las bases de termodinámica de agujeros negros. En la sección 3 nos dedicaremos al estudio de la correspondencia AdS/CFT y sus extensiones. Luego,

en la sección 4 presentaremos los cálculos originales de este trabajo concernientes a la termodinámica de un agujero negro en la geometría $WAdS \times \Sigma$. Finalmente, en la sección 5 se encuentra un sumario de todo lo realizado, una discusión sobre los resultados y perspectivas a futuro sobre lo obtenido.

2. Teorías de Gravedad de Alta Curvatura

La Relatividad General (GR) es la teoría que explica todos los fenómenos astrofísicos conocidos a excepción de algunos particulares, como por ejemplo, las curvas de rotación de las galaxias espiral. Para poder explicarlas debe agregarse materia oscura al modelo o bien utilizar alguna de las teorías de Gravedad Modificada². Otra de las inconsistencias se encuentra en cosmología, es la expansión acelerada del universo, que para ser tal debe agregarse energía oscura al modelo.

Un problema conocido entre las predicciones de la GR y la QFT es que la teoría de campos da una energía de vacío que difiere en 120 órdenes de magnitud respecto del valor de la constante cosmológica [Weinberg, 2001]. El problema surge al intentar combinar ambas teorías. Si se siguen los pasos usuales para cuantizar una teoría de campos, como se hizo con el electromagnetismo y las teorías de Yang-Mills se encuentra que no es posible renormalizar GR.

Una idea que goza de bastante aceptación es que la Relatividad General debe ser modificada a pequeña escala y que la GR es un modelo efectivo que debe ser reemplazado en el régimen UV³ por una teoría distinta, que correspondería a la teoría cuántica de gravedad. La escala a la que uno espera estas correcciones está dada por la longitud de Planck $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$.

Al día de hoy, la candidata preferida para ser esta teoría de gravedad cuántica es la Teoría de Cuerdas⁴ (ST por String Theory) o bien su teoría madre (M-theory). En efecto, una de las predicciones de la ST es la existencia de una partícula de espín 2 cuya dinámica de vacío al nivel clásico esté gobernada por las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{con } \Lambda = 0) . \quad (1)$$

Además, la ST también predice correcciones de primer orden de (1) que serán relevantes a distancias comparables a la longitud característica de la teoría $l_s = \sqrt{\alpha'}$ (α' es la constante que está delante de la acción de la cuerda y es la inversa de la tensión de la misma. Determina la escala de energías de las cuerdas y sus excitaciones). Estas correcciones a pequeña distancias suelen describirse sumando términos de mayor orden en la curvatura a la acción de Einstein-Hilbert. Como resultado se obtiene una interacción de espín 2 finita, lo que aumenta las expectativas en esta teoría [Stelle, 1977, Zwiebach, 1985] para obtener un modelo consistente de gravedad cuántica.

²Estas no solucionan los problemas de modelo agregando materia o energía oscura al $T_{\mu\nu}$ sino que directamente alteran la geometría, por ejemplo, agregando torsión [Carroll, 2019].

³Con UV nos referimos al régimen ultravioleta, es decir, altas energías o indistintamente distancias muy cortas. En el caso de gravedad a distancias del orden de la longitud de Planck.

⁴En realidad ST aspira a más que ser una teoría de gravedad cuántica, la ambición es que logre unificar todas las interacciones fundamentales.

2.1. Términos superiores en la curvatura

Consideremos primero el caso más general con correcciones cuadráticas en la curvatura

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \alpha R^2 + \beta R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \gamma R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \right). \quad (2)$$

Las ecuaciones de campo asociadas a esta acción son [Garraffo and Giribet, 2008]:

$$\begin{aligned} 0 = & G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + (\beta + 4\gamma) \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(4\alpha + \beta)g_{\mu\nu}\square R + \\ & - (2\alpha + \beta + 2\gamma)\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2\gamma R_{\mu\gamma\alpha\beta} R_\nu^{\gamma\alpha\beta} + 2(\beta + 2\gamma)R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} + \\ & - 4\gamma R_{\mu\alpha} R_\nu^\alpha + 2\alpha R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\alpha R^2 + \beta R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \gamma R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta})g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Para valores genéricos de α, β, γ las ecuaciones de campo son ecuaciones de orden 4 en derivadas de la métrica (términos proporcionales a $\nabla_\mu \nabla_\nu R$, $\square R$, $\square R_{\mu\nu}$). Para el caso $\alpha = \gamma = -\beta/4$ se cancelan los términos con derivadas cuartas de la métrica y nos quedan ecuaciones de campo cuadráticas. Esta modificación de las ecuaciones de Einstein es no trivial para $D \geq 5$ (en $D = 4$ el término de Gauss-Bonnet es una derivada total de la acción y es trivial para la dinámica).

Esta elección es la que corresponde a la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet, cuya acción consiste del término de Einstein-Hilbert y el término de Gauss-Bonnet

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \alpha(R^2 - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}) \right). \quad (4)$$

De esta manera las ecuaciones de campo quedan:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} = & G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha \left(2R_{\mu\gamma\alpha\beta} R_\nu^{\gamma\alpha\beta} - 4R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} + \right. \\ & \left. - 4R_{\mu\alpha} R_\nu^\alpha + 2R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R^2 + R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta})g_{\mu\nu} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

En esta sección expondremos dos formas en las que emerge la teoría de EGB, una de ellas es a partir de la teoría de cuerdas y la otra es como extensión dimensional de la característica de Euler.

2.1.1. Teorías de Lovelock como correcciones a Relatividad General desde Teoría de cuerdas

Se puede ver cómo emerge la teoría de Lovelock en $D=5$ estudiando el límite de bajas energías de la M-theory (y por lo tanto, de la teoría de cuerdas) cuando ésta se compactifica de 11 dimensiones a 5.

Esto puede encontrarse en [Garraffo and Giribet, 2008], donde los autores arriban a

la siguiente acción efectiva,

$$S_{eff} = \int d^5x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{16} c_{(2)}^I V_I (R^2 - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}) \right), \quad (6)$$

donde han usado unidades tales que $G_{(5D)} = \frac{1}{16\pi}$ y la constante de acoplamiento $c_{(2)}^I V_I$ es una cantidad que depende de las propiedades interiores de la variedad sobre la que se realiza la reducción dimensional.

Sin entrar en detalles podemos notar que esta acción es la de (4) tomando $16\pi G \alpha = \frac{1}{16} c_{(2)}^I V_I$.

2.1.2. Término de EGB como extensión dimensional de la característica de Euler

Otra motivación para añadir el término de Gauss-Bonnet está inspirada en el *teorema de Gauss-Bonnet*, el cual establece que para una variedad riemanniana compacta dos-dimensional M con borde ∂M , la característica de Euler $\chi(M)$ es

$$\int_M K_{Gauss} dA + \int_{\partial M} k_g dl = 2\pi\chi(M). \quad (7)$$

El tensor de Riemann tiene una sola componente en dos dimensiones y se relaciona con la curvatura de Gauss $K_{Gauss} = -\frac{R_{1212}}{g}$. k_g es la curvatura geodésica de ∂M , que se define como la componente tangencial unitaria de $\frac{d^2}{d\mu^2}$, donde $\frac{d}{d\mu}$ es el vector tangente a ∂M . La relación (7) es la responsable de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo den 180 grados, dado que en el plano euclidiano,

$$\int_M K_{Gauss} dA = \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad (8)$$

y como el plano carece de curvatura, $K_{Gauss} = 0$ y $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Si bien el teorema de Gauss-Bonnet es para variedades bidimensionales, existe una generalización para más dimensiones que se conoce como *teorema de Chern-Gauss-Bonnet* [Alty, 1995], el cual vale para toda variedad riemanniana compacta, orientable, $2n$ -dimensional sin borde. En particular para $n = 2$,

$$\chi(M) = \int_M d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2). \quad (9)$$

Para nuestros propósitos escribiremos a este invariante topológico como

$$\alpha \sqrt{-g} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) = (16\pi G) \mathcal{L}_{GB}, \quad (10)$$

donde \mathcal{L}_{GB} es el lagrangeano del término de Gauss-Bonnet.

Es interesante conocer generalizaciones de la acción de Einstein-Hilbert agregando términos superiores en la curvatura. En 1971 D. Lovelock mostró qué forma deben tener estos términos que resumiremos a continuación en base a [Lovelock, 1971].

En los cursos estándar de Relatividad General suele motivarse las ecuaciones de Einstein en vacío $G_{\mu\nu} = 0$ buscando un tensor $A_{\mu\nu}$ que satisfaga las siguientes cuatro condiciones:

- (a) $A_{\mu\nu}$ es simétrico.
- (b) $A_{\mu\nu}$ está relacionado con la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus dos primeras derivadas, $A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})$.
- (c) $A_{\mu\nu}$ tiene divergencia nula, i. e., $\nabla_\nu A^{\mu\nu}$ (con ∇_ν denotamos a la derivada covariante ∇_{∂_ν}).
- (d) $A_{\mu\nu}$ es lineal en las derivadas segundas de la métrica.

En verdad, la condición (d) suele agregarse inspirada en trabajos de [Cartan, 1922, Weyl, 1922], quedando

$$A_{\mu\nu} = aG_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu} \quad (11)$$

con a, b constantes y $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein. Reconocemos que las ecuaciones resultantes serán las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica. También debe notarse que ninguna de estas condiciones depende de la dimensionalidad del espacio-tiempo. En el trabajo [Lovelock, 1971] Lovelock se vio motivado por el problema de encontrar un tensor $A_{\mu\nu}$ que satisfaga las condiciones (a), (b) y (c) omitiendo la condición (d). Para esto demuestra el siguiente teorema:

Teorema: El único tensor simétrico $A^{\mu\nu}$ tal que $A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})$ y $\nabla_\nu A^{\mu\nu} = 0$ es

$$A_{\nu}^{\mu} = \sum_{p=1}^{m-1} a_p \delta_{\nu\nu_1 \dots \nu_{2p}}^{\mu\mu_1 \dots \mu_{2p}} R_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} \dots R_{\mu_{2p-1} \mu_{2p}}^{\nu_{2p-1} \nu_{2p}} + a \delta_{\nu}^{\mu} . \quad (12)$$

donde el entero m es tal que $m = \frac{n}{2}$ si n es par y $m = \frac{n+1}{2}$ si n es impar. El símbolo $\delta_{\nu_1 \dots \nu_N}^{\mu_1 \dots \mu_N}$ es una delta de Kronecker generalizada, i.e.,

$$\delta_{j_1 \dots j_N}^{\mu_1 \dots \mu_N} = \begin{vmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \delta_{\nu_2}^{\mu_1} & \dots & \delta_{\nu_N}^{\mu_1} \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_2} & \delta_{\nu_2}^{\mu_2} & \dots & \delta_{\nu_N}^{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_N} & \delta_{\nu_2}^{\mu_N} & \dots & \delta_{\nu_N}^{\mu_N} \end{vmatrix} . \quad (13)$$

El teorema tiene como corolario que para $n = 4$ el único tensor simétrico que satisface (a), (b) y (c) es

$$A^{\mu\nu} = aG^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}, \quad (14)$$

de modo que (d) no es una suposición crucial para obtener la Relatividad General.

En virtud de que para $n < N$, $\delta_{\nu_1 \dots \nu_N}^{\mu_1 \dots \mu_N} = 0$ podemos expresar (12) como una serie infinita

$$A_\nu^\mu = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \delta_{\nu_1 \dots \nu_{2p}}^{\mu_1 \dots \mu_{2p}} R_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} \cdots R_{\mu_{2p-1} \mu_{2p}}^{\nu_{2p-1} \nu_{2p}} + a \delta_\nu^\mu. \quad (15)$$

que de hecho solo tiene un número finito de términos dependiente de la dimensión del espacio n .

Por otro lado, en el mismo trabajo Lovelock muestra cual es el lagrangeano que tiene a $A^{\mu\nu}$ como sus ecuaciones de Euler-Lagrange.

Teorema: Si $A^{\mu\nu}$ está dado por (12), entonces $\sqrt{g}A^{\mu\nu}$ es el tensor que se obtiene al variar la acción del siguiente lagrangeano

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} \sum_{p=1}^{m-1} 2a_p \delta_{\nu_1 \dots \nu_{2p}}^{\mu_1 \dots \mu_{2p}} R_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} \cdots R_{\mu_{2p-1} \mu_{2p}}^{\nu_{2p-1} \nu_{2p}} + 2a\sqrt{g}. \quad (16)$$

En particular, vemos que la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet corresponde a Lovelock cuadrático dado que,

$$\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} R_{\rho\sigma}^{\gamma\delta} = 4(R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2). \quad (17)$$

2.2. Termodinámica de agujeros negros y cargas conservadas en teorías de alta curvatura

En esta sección usaré algunos resultados muy básicos de teoría de campos que pueden encontrarse en el Apéndice A. Aquí mostraremos la relación que puede establecerse entre QFT y Mecánica Estadística para describir la termodinámica de una configuración de campos. De modo que considerando a la métrica $g_{\mu\nu}$ como un campo tenemos un tratamiento para la termodinámica de agujeros negros.

En teoría cuántica de campos (QFT por quantum field theory) la amplitud de propagación entre dos configuraciones de campo está dada por $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iI[\phi]}$. Esta es una integral oscilante, que por medio de una rotación de Wick $\tau = i t$ se convierte en $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]}$ que es convergente.

La amplitud de transición también se escribe como $Z = \langle \phi_2 | e^{iH(t_2-t_1)} | \phi_1 \rangle$. Fijando $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ y $i(t_2 - t_1) = \tau_2 - \tau_1 = \beta$ obtenemos $Z = \langle \phi | e^{\beta H} | \phi \rangle$. Si integramos en ϕ obtenemos

$$Z = \text{Tr}(\beta H), \quad (18)$$

donde la integral se toma sobre todos los campos ϕ que son periódicos en el tiempo imaginario con período β .

Recordando que en Mecánica Estadística $\mathcal{Z} = \sum_n e^{-1/T E_n}$ podemos identificar al

período en el tiempo imaginario β con T^{-1} . De esta manera identificamos a la traza de amplitudes de transición con la función de partición, lo que en adelante nos habilita a utilizar las herramientas conocidas de Mecánica Estadística para calcular propiedades termodinámicas. Por ejemplo, de Mecánica Estadística sabemos que

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = -\frac{\partial}{\partial \beta} Z, \quad (19)$$

$$S = \sum_n p_n \log(p_n) = \beta \langle E \rangle + \log Z. \quad (20)$$

La contribución dominante en la integral de camino es la del extremo en la acción, $\delta I = 0$. Esto corresponde al límite clásico ($\hbar \rightarrow 0$) de la integral de camino que puede obtenerse a partir del método de la fase estacionaria. De esta manera, podemos aproximar la función de partición como $Z \approx e^{-I^{(\text{on-shell})}}$, entonces, $\log Z \approx -I^{(\text{on-shell})}$.

En espacio-tiempo curvo la suma $\int \mathcal{D}\phi e^{-\beta I[\phi]}$ se generaliza a todos los campos ϕ y toda geometría g

$$Z = \int \mathcal{D}[\phi, g] e^{iI[\phi, g_{\mu\nu}]}, \quad (21)$$

y como en el caso de espacio plano, hacemos una rotación de Wick para obtener una integral con mejores propiedades de convergencia,

$$Z = \int \mathcal{D}[\phi, g] e^{-\beta I[\phi, g_{\mu\nu}]}. \quad (22)$$

Si por ejemplo, consideramos el caso de GR sin campos de materia la acción es

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R - 2\Lambda). \quad (23)$$

En este trabajo, estudiamos el vacío de una teoría de gravedad de EGB (por Einstein-Gauss-Bonnet) por lo que usaremos la acción

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \left(R - 2\Lambda + \alpha (R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2) \right), \quad (24)$$

para calcular (19) y (20).

En los siguientes apartados mostraremos cómo calcular las cargas conservadas y la entropía con métodos alternativos al que acabamos de exponer.

2.2.1. Entropía de Wald

Wald ha demostrado que la entropía es una carga de Noether [Wald, 1993, Iyer and Wald, 1994] y además que calcular entropía y cargas mediante el método de Noether es equivalente a usar la acción euclídea [Iyer and Wald, 1995].

En el artículo mencionado Wald deduce una fórmula para calcular la entropía que

repasaremos a continuación. Para un vector de Killing ξ^a en el horizonte se define a la gravedad superficial κ en un punto (del horizonte de eventos \mathcal{H}) como

$$\xi^\alpha \nabla_\alpha \xi^\beta = \kappa \xi^\beta, \quad (25)$$

donde ξ^α es un vector de Killing normal a \mathcal{H} . Para agujeros negros con simetría esférica vale que κ es constante.

Se define a la 2-forma binormal $\epsilon_{\alpha\beta}$ como

$$\nabla_\alpha \xi_\beta = \kappa \epsilon_{\alpha\beta}. \quad (26)$$

Y Wald encuentra la siguiente expresión para la entropía,

$$S = -2\pi \oint_{\mathcal{H}^+} d^{D-2}x \sqrt{\sigma} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial R^{\mu\nu\rho\sigma}}. \quad (27)$$

2.2.2. Temperatura

En esta sección mostraremos dos métodos para calcular la temperatura de Hawking de un agujero negro. El primero, es a partir de la imposición de periodicidad en el tiempo euclídeo de la métrica y el segundo, corresponde a obtener la temperatura por medio de la gravedad superficial [Carroll, 2019].

Por simplicidad expondremos el primer método trabajando con la métrica de agujero negro BTZ (por Bañados, Teitelboim, Zanelli) [Banados et al., 1992]. En su descomposición ADM la métrica de agujero negro BTZ tiene la forma,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (28)$$

donde

$$N^2(r) = -M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2},$$

con $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi)$.

Será conveniente adoptar una coordenada angular co-rotante con el horizonte tal que $d\phi' = N^\phi(r_+)dt + d\phi$. Comenzaremos por hacer una “aproximación de horizonte cercano” en la métrica y una rotación de Wick en el tiempo (ver apéndice A),

$$ds^2 \stackrel{t=i\tau}{\cong} N^2 d\tau^2 + \frac{dr^2}{N^2(r)} + r^2 d\phi'^2. \quad (29)$$

Ahora, expandimos $N^2(r)$ en torno a $r = r_+$,

$$N^2(r) \approx \overbrace{N^2(r_+)}^{=0} + \partial_r N^2|_{r_+} (r - r_+) + \mathcal{O}(r - r_+)^2, \quad (30)$$

de modo que

$$ds^2 \approx \partial_r N^2|_{r_+} (r - r_+) d\tau^2 + \frac{dr^2}{\partial_r N^2|_{r_+} (r - r_+)} + r_+^2 d\phi'^2. \quad (31)$$

Despreciando la parte angular del intervalo y haciendo un cambio de coordenadas $x^2 = r - r_+ \Rightarrow 2x dx = dr$ obtenemos

$$ds^2 \approx \partial_r N^2|_{r_+} x^2 d\tau^2 + \frac{4}{\partial_r N^2|_{r_+}} dx^2. \quad (32)$$

Podemos absorber los factores que acompañan a dx^2 haciendo $r' = \frac{2x}{\sqrt{\partial_r N^2|_{r_+}}}$,

$$ds^2 \approx \frac{(\partial_r N^2|_{r_+})^2}{4} r'^2 d\tau^2 + dr'^2. \quad (33)$$

Esta métrica prácticamente parece el elemento de línea sobre un círculo, hacemos un último cambio de coordenadas $\theta = \frac{\partial_r N^2|_{r_+}}{2} \tau$ y tenemos

$$ds^2 \approx r'^2 d\theta^2 + dr'^2. \quad (34)$$

A fin de evitar una singularidad cónica en la variedad euclídea cerca del horizonte debemos imponer condiciones de periodicidad sobre θ :

$$\theta \sim \theta + 2\pi \Rightarrow \tau \sim \tau + \beta, \quad (35)$$

luego,

$$\beta \partial_r N^2|_{r_+} = 2\pi, \quad (36)$$

y tenemos que la temperatura de Hawking T_H es

$$\frac{1}{\beta} = T_H = \frac{1}{4\pi} \partial_r N^2|_{r_+}. \quad (37)$$

Si por el contrario, no utilizamos una métrica en descomposición ADM en la cual $g_{rr} \neq 1/N^2(r)$,

$$ds^2 = -N^2(r) dt^2 + \rho^2(r) (N^\phi(r) dt + d\phi)^2 + \frac{dr^2}{h(r)N^2(r)} \quad (38)$$

donde $N^2(r_{\pm}) = 0$ pero $h(r_{\pm}) \neq 0$, podemos replicar el procedimiento anterior y obtener

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \sqrt{h(r_+)} \partial_r N^2(r)|_{r_+}. \quad (39)$$

Como ejemplo, podemos mencionar el caso de Schwarzschild,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{1}{\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)} dr^2,$$

en el que usando (37) y notando que $N^2(r) = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)$, $r_+ = 2GM$ obtenemos

$$T_H^{Sch} = \frac{1}{8\pi GM}.$$

Ahora veamos cómo calcular T_H a partir de la gravedad superficial. Para una solución estacionaria, esto es, que consiste de un agujero negro rotante con velocidad angular constante, el vector ξ^μ es

$$\xi = \partial_t + \Omega_H^{(j)} \partial_{\phi_j}, \quad (40)$$

donde ϕ_j representa los distintos ángulos de rotación del agujero negro y $\Omega_H^{(j)} = - \frac{g_{t\phi_j}}{g_{\phi_j\phi_j}} \Big|_{r=r_H}$. Además este vector define una región en la que $\xi \cdot \xi = 0$ que se denomina como horizonte de Killing.

Por otra parte, notando que de (26) se deduce

$$-\frac{1}{2} \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla^\alpha \xi^\beta = \kappa^2, \quad (41)$$

y tenemos una manera para calcular la temperatura de Hawking

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (42)$$

Debe notarse que la temperatura de Hawking es una propiedad de la geometría y no de la dinámica, ya que se deriva solo de la métrica mientras que, por ejemplo la entropía, depende de la acción de la teoría de gravedad (20). Una misma métrica de agujero negro puede ser solución de distintas teorías de gravedad con lo que la temperatura de agujero negro no cambiará de una teoría a otra. Por el contrario, las cargas conservadas a priori sí serán distintas.

Como ejemplo ensayemos el cálculo anterior en el agujero negro BTZ (por Bañados,

Teitelboim, Zanelli) [Banados et al., 1992]. La métrica está dada por,

$$ds^2 = - \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(\frac{J}{2r^2} dt + d\phi \right)^2, \quad (43)$$

que tiene rotación en la coordenada ϕ con velocidad angular J , y para el cual se obtiene,

$$T_H^{BTZ} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi\ell^2 r_+^2} = \frac{2G\sqrt{M^2\ell^2 - J^2}}{\ell\pi\sqrt{GM\ell^2 + G\ell\sqrt{M^2\ell^2 - J^2}}}. \quad (44)$$

2.2.3. Cargas de Noether-Wald

Una de las formas más naturales que puede adoptar la densidad lagrangiana es aquella en que sólo depende de la métrica y la curvatura $L(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta})$. De acuerdo con [Iyer and Wald, 1994, Rivera-Betancour and Olea, 2018] la corriente conservada asociada a un vector de Killing está dada por

$$\sqrt{-g}J^\mu = 2E_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(\nabla_\nu\nabla^\alpha\xi^\beta + R_{\nu\sigma}^{\alpha\beta}\xi^\sigma) + \xi^\mu L, \quad (45)$$

donde $E_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}}$.

Los últimos dos términos en (45) son proporcionales a las ecuaciones de campo por lo que se anulan on-shell. El primer término de lado derecho de (45) satisface la identidad de Bianchi, con lo que la corriente conservada puede escribirse como

$$\sqrt{-g}J^\mu = 2\nabla_\nu(E_{\alpha\beta}^{\mu\nu}\nabla^\alpha\xi^\beta), \quad (46)$$

donde la corriente J^μ es $J^\mu = \nabla_\nu Q^{\mu\nu}$. La carga conservada puede expresarse como una integral en la superficie de codimensión 2, que denotaremos S

$$Q = \int_S dS_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = \int_S d^{D-2}x \sqrt{\sigma} u_\mu n_\nu Q^{\mu\nu}, \quad (47)$$

aquí σ es el determinante de la métrica de la hipersuperficie S y u_μ, n_ν son 1-formas normales a S .

Finalmente, reexpresamos la carga conservada sobre una superficie S como,

$$\mathcal{Q}[\xi] = \int_S d^{D-2}x \sqrt{\sigma} \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}} \nabla^\alpha \xi^\beta. \quad (48)$$

3. Holografía

En los sistemas físicos usuales la entropía es una cantidad extensiva, es decir, es proporcional al volumen del sistema. Sin embargo, en el caso de los agujeros negros la entropía está dada por,

$$S_{BH} = \frac{k_B}{4\ell_P^2} A, \quad (49)$$

donde ℓ_P es la longitud de Planck $\ell_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ y A es el área del horizonte de eventos. Esto es parte del principio holográfico propuesto por 't Hooft [Hooft, 1993] y Susskind [Susskind, 1995], el cual establece que “los grados de libertad se encuentran en la superficie”. El hecho de que la entropía del agujero negro sea proporcional al área del mismo, y no al volumen, como se esperaría de una propiedad extensiva del sistema, da un primer indicio de que los grados de libertad del mismo se encuentran en el horizonte de eventos.

El origen de la ST (por String Theory) data de fines de la década del 1960, en aquel entonces fue estudiada para tratar de entender la dinámica de los hadrones y mesones que interactúan mediante la fuerza nuclear fuerte. La teoría fue diseñada para explicar, entre otras cosas, las llamadas trayectorias de Regge, que vinculan la energía con el momento angular de los hadrones según la ley $J = \alpha' E^2$. Sin embargo, a mediados de los años '70, se logró una descripción correcta de la interacción fuerte entre quarks y gluones mediante una QFT con simetría $SU(3)$ conocida como QCD (por quantum chromodynamics).

Es interesante destacar que el modelo de cuerdas provee una descripción útil de bajas energías para la dinámica de los mesones, dado que estos están formados por un par quark/anti-quark “unido” por gluones que forman una especie de “tubo de líneas de fuerza”, lo que nos permite pensarlo como una cuerda que une el par quark/anti-quark. Dado que la tensión de la cuerda que une los quarks es independiente de su longitud, necesitamos una cantidad infinita de energía para separarlos. Este razonamiento explica al menos cualitativamente el comportamiento de QCD a bajas energías, es decir, en el régimen no-perturbativo. Esto último hace pensar que existe alguna relación entre teorías de gauge en el régimen no-perturbativo y teorías de cuerdas. Al día de hoy aún no se conoce la relación exacta entre teoría de cuerdas y QCD, sin embargo, existe una realización de esta dualidad entre teorías de gauge fuertemente acopladas y ST, es la conocida como “Conjetura de Maldacena” o correspondencia AdS/CFT [Maldacena, 1999]. En su versión original esta dualidad relaciona una QFT en $R^{1,3}$ muy particular (una teoría de Yang-Mills (YM) con supersimetría e invariancia de gauge $SU(N)$ en el límite de acoplamiento fuerte), con una teoría de Supergravedad (que es el límite de baja energía de ST) en un fondo $AdS_5 \times S^5$. La geometría anti-de Sitter y el hecho de que $\mathcal{N} = 4 SYM$ es una teoría de campos conforme (CFT) es lo que le da el nombre a la conjetura: correspondencia AdS/CFT. Otro aspecto muy interesante y curioso de la correspondencia AdS/CFT es que relaciona teorías de distinta dimensionalidad. Vincula una teoría de campos en cuatro dimensiones

espacio-temporales planas con una teoría de gravedad en un espacio de anti-de Sitter de cinco dimensiones. Es en este sentido en el que se denomina a la correspondencia como una dualidad “holográfica”, como los hologramas que codifican una imagen tridimensional en una superficie bidimensional.

En esta introducción no expondré los detalles de la correspondencia AdS/CFT en su versión original que es la que acabamos de mencionar. Más concretamente, lo que haremos será presentar la correspondencia AdS/CFT empleando la prescripción de Witten [Witten, 1998] para el caso sencillo de un campo escalar y usar esto como introducción para la extensión Warped AdS/Warped CFT que concierne a este trabajo. En este capítulo estudiaremos cada lado de la dualidad por separado preparando el terreno para establecer la correspondencia.

3.1. Espacio Anti-de Sitter

El espacio-tiempo anti de Sitter es una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa. La acción de Einstein-Hilbert es

$$I_{EH} = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda), \quad (50)$$

donde estamos considerando una métrica lorentziana con signatura $(- + \dots +)$.

Las ecuaciones de Einstein en vacío $T_{\mu\nu} = 0$ satisfacen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (51)$$

$$R = \frac{2D}{D-2} \Lambda \quad (52)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{D-2} g_{\mu\nu}. \quad (53)$$

Es decir, tienen la propiedad de que el tensor de Ricci es proporcional a la métrica; son espacios de Einstein.

Además en el caso particular de AdS también se trata de un espacio maximalmente simétrico

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{D(D-1)} (g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}). \quad (54)$$

Con las convenciones anteriores el espacio AdS corresponde a una solución de vacío con $\Lambda < 0$ sin singularidades.

Otra manera interesante de introducir el espacio AdS $_{d+1}$ es como una superficie embebida en un espacio lorentziano $\mathbb{R}^{2,d}$. AdS $_{d+1}$ es un hiperboloide

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_d^2 = -L^2, \quad (55)$$

en un espacio plano $(d + 2)$ -dimensional con métrica

$$ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + dX_1^2 + \dots + dX_d^2. \quad (56)$$

Por construcción, este espacio tiene por grupo de isometrías a $SO(2, d)$, por lo que AdS_{d+1} también es invariante ante las transformaciones de $SO(2, d)$.

El espacio (55) puede parametrizarse en términos de coordenadas $(\tau, \rho, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$, es decir, podemos expresar $\vec{X} = \vec{X}(\tau, \rho, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ como

$$\vec{X} = \begin{cases} X_{-1} = \ell \cosh \rho \sin\left(\frac{\tau}{\ell}\right) \\ X_0 = \ell \cosh \rho \cos\left(\frac{\tau}{\ell}\right) \\ (X_1, \dots, X_{d-1}) = \ell \sinh \rho \underbrace{(\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-1})}_{S^{d-1}}. \end{cases} \quad (57)$$

de modo que $\vec{X}^2 = -\ell^2$. Nótese que los ángulos $(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ parametrizan una esfera S^{d-1} . En estas coordenadas, conocidas como coordenadas globales la métrica de AdS_{d+1} queda

$$ds^2 = \ell^2(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2). \quad (58)$$

Aquí $\frac{\tau}{\ell} \in [0, 2\pi)$ es periódica, por lo que la curva con vector tangente ∂_t sería una curva tipo-tiempo cerrada, lo cual es problemático en términos causales. Sin embargo, podemos extender τ tal que $\frac{\tau}{\ell} \in \mathbb{R}$ de modo que los puntos $\frac{\tau}{\ell}$ y $\frac{\tau}{\ell} + 2\pi$ son distintos. De esta manera eliminamos las curvas tipo-tiempo cerradas, lo que pictóricamente se podría decir que equivale a “desenrollar el hiperboloide”. A este nuevo espacio es al que llamamos AdS y esta carta con $\frac{\tau}{\ell} \in \mathbb{R}$ se denomina “cubrimiento universal”.

Ahora veamos en qué sentido el espacio de $Mink_d$ es el “borde” de AdS_{d+1} . Para esto escribimos AdS_{d+1} en el “parche de Poincaré” (Poincaré Patch),

$$\vec{X} = \begin{cases} X_{-1} = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}(L^2 - t^2 + x^i x^i)\right) \\ X_0 = \frac{L}{Z} t \\ X^i = \frac{L}{Z} x^i \\ X_d = \frac{z}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2}(L^2 - t^2 + x^i x^i)\right), \end{cases} \quad (59)$$

donde $i = 1, \dots, d$, quedando el elemento de línea

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2). \quad (60)$$

Finalmente, veamos el comportamiento del parche de Poincaré en el “borde” $z = 0$. En el límite $z \rightarrow 0$ el factor $\frac{L^2}{z^2} \rightarrow \infty$. Si tomamos $z = \epsilon$ constante $\Rightarrow dz = 0$ y luego consideramos $\epsilon \ll 0$,

$$ds^2|_{z=\epsilon} = \frac{L^2}{\epsilon^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu). \quad (61)$$

Si ahora realizamos una transformación conforme de la métrica $ds'^2 = \Omega(x)ds^2$ tal que $\Omega(x)$ no tenga polos en $\epsilon = 0$, notaremos que el nuevo elemento de línea ds'^2 es conforme a la métrica de Minkowski. El “borde” de AdS_{d+1} es un “borde conforme”; define una clase conforme de métricas d -dimensionales. En este espacio de Minkowski de d dimensiones estará formulada la teoría de campos conforme de la correspondencia AdS/CFT, que denominaremos “teoría del borde”, mientras que nos referiremos a la teoría de gravedad en el interior de AdS como “teoría del bulk”.

3.2. Teoría de campos conforme y simetrías

En esta sección estudiaremos las teorías de campos conformes, y nos preocuparemos principalmente en sus simetrías dado que éstas permitirán vislumbrar la condición necesaria pero no suficiente para establecer una dualidad holográfica; que los espacios de cada lado de la dualidad tengan el mismo grupo transformaciones de simetría. Ésta y la siguiente subsección están escritas en base al libro “Conformal Field Theory” de P. Di Francesco et al. [Francesco et al., 2012].

Para comenzar es oportuno aclarar que no debe confundirse la invariancia de Weyl con la invariancia conforme. La invariancia de Weyl es una propiedad de todas las teorías en las que la transformación

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)g_{\mu\nu}, \quad (62)$$

es una simetría. En otras palabras son invariantes ante un reescalo arbitrario.

En el caso de la invariancia conforme de una QFT la métrica está fija y una transformación conforme de las coordenadas $x \rightarrow \tilde{x}$ que deja a la métrica invariante a menos de un factor de escala. Por ejemplo en el espacio de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \lambda(x)\eta_{\mu\nu}, \quad (63)$$

en el caso de que $\lambda = 1$ tendremos las isometrías, el grupo conforme tiene como subgrupo al grupo de Poincaré.

La diferencia fundamental con la invariancia de Weyl radica en que la métrica es fija y que existen transformaciones de Weyl que no pueden pensarse como un difeomorfismo. El

nombre “conforme” viene del hecho de que una transformación conforme de coordenadas no altera el ángulo entre dos curvas.

Para encontrar los vectores generadores de los difeomorfismos del grupo conforme trabajaremos en el espacio de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Un difeomorfismo infinitesimal satisface

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (64)$$

entonces una transformación conforme será tal que

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}. \quad (65)$$

Para encontrar los vectores de Killing consideremos ahora una transformación infinitesimal

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu + \xi^\mu \Rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (66)$$

de modo que el intervalo es

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow d\tilde{s}^2 = ds^2 + (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) dx^\mu dx^\nu. \quad (67)$$

Además como $\Omega(x) > 0$ podemos escribirla infinitesimalmente como $\Omega = e^{1+\sigma(x)} \approx 1 + \sigma(x)$

$$d\tilde{s}^2 = (1 + \sigma(x))ds^2 = ds^2 + (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) dx^\mu dx^\nu \quad (68)$$

de donde vemos que

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \sigma(x)\eta_{\mu\nu}, \quad (69)$$

tomando la traza obtenemos

$$2\partial_\mu \xi^\mu = D\sigma(x) \quad (70)$$

y queda

$$\sigma(x) = \frac{2}{D}\partial_\mu \xi^\mu. \quad (71)$$

Reemplazando $\sigma(x)$ en (69),

$$\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu = \frac{2}{D}\partial_\alpha \xi^\alpha \eta_{\mu\nu}, \quad (72)$$

tomando la divergencia,

$$\partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \partial^\mu \xi_\mu - \frac{2}{D}\partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha = 0, \quad (73)$$

ahora derivamos respecto a x^μ ,

$$\partial_\mu \square \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha - \frac{2}{D}\partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha = 0 \quad (74)$$

$$\frac{1}{2}\partial_{(\mu}\square\xi_{\nu)} + \frac{D-2}{D}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\xi^{\alpha} = 0. \quad (75)$$

Reacomodando esta última ecuación obtenemos una ecuación diferencial para los generadores de transformaciones conformes,

$$\left(\eta_{\mu\nu}\square + \frac{D-2}{D}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\right)\partial_{\alpha}\xi^{\alpha} = 0. \quad (76)$$

Podemos notar dos cosas; que para $D = 2$ ocurre algo que merece un estudio particular, y además, que los ξ^{μ} son aniquilados por un operador de orden 3 y por lo tanto serán cuadráticos en x^{μ} .

Sólo nos ocuparemos del caso $D > 2$, las soluciones a la ecuación (76) son:

- (a) $\xi^{\mu} = a^{\mu}$ (cuadrivector que no depende de x), corresponde a D traslaciones rígidas.
- (b) $\xi^{\mu} = \omega_{\nu}^{\mu}x^{\nu}$ con $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, corresponde a $\frac{D(D-1)}{2}$ transformaciones de Lorentz.
- (c) $\xi^{\mu} = \lambda x^{\mu}$ con λ constante, corresponde a un cambio de escala rígido.
- (d) $\xi^{\mu} = b^{\mu}x_{\nu}x^{\nu} - 2x^{\mu}b_{\nu}x^{\nu}$, corresponde a las transformaciones de simetría conocidas como “conformes especiales”.

Podemos reconocer que el caso (a) corresponde a transformaciones $O(x^0)$, los casos (b) y (c) son $O(x)$ y (d) es $O(x^2)$. Además notamos que (a) y (b) conforman el grupo de Poincaré (grupos de Lorentz junto con las traslaciones) que como se ha dicho es un subgrupo del grupo conforme.

La dimensión del grupo conforme se obtiene como,

$$\#a + \#b = \frac{D(D+1)}{2}, \quad (77)$$

$$\#c + \#d = D + 1, \quad (78)$$

de modo que la dimensión de grupo de simetrías es de $\frac{1}{2}(D+1)(D+2)$. Vemos que la dimensión del grupo conforme en dimensión D coincide con la dimensión del grupo de simetrías de un espacio maximalmente simétrico en dimensión $D+1$.

Ahora presentaremos la forma en que conmutan los generadores del grupo conforme. Algunos de los conmutadores tienen un resultado intuitivo, por ejemplo, el de una traslación y un cambio de escala. Es fácilmente imaginable que la diferencia entre (traslación-cambio de escala) y (cambio de escala-traslación) debe ser una traslación. Sin embargo, pueden obtenerse en rigor haciendo el cálculo sobre una función arbitraria, por ejemplo para una dilatación y una traslación tenemos,

$$\begin{aligned}
[\lambda x^\mu \partial_\mu, \partial_\nu] f &= \lambda (x^\mu \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu (x^\mu \partial_\mu f)) \\
&= \lambda (x^\mu \partial_\mu \partial_\nu f - \delta_\nu^\mu \partial_\mu f - x^\mu \partial_\mu \partial_\nu f) \\
&= -\lambda \partial_\nu f.
\end{aligned} \tag{79}$$

Los generadores del grupo conforme son:

$$\begin{aligned}
P_\mu &= -i \partial_\mu \quad (\text{Traslación}) \\
L_{\mu\nu} &= i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (\text{Transformaciones de Lorentz}) \\
D &= -i x^\mu \partial_\mu \quad (\text{Dilatación}) \\
K_\mu &= -i (2x_\mu x^\nu \partial_\nu - \mathbf{x}^2 \partial_\mu) \quad (\text{SCT, por special conformal transformation})
\end{aligned} \tag{80}$$

y satisfacen el álgebra:

$$\begin{aligned}
[D, P_\mu] &= i P_\mu \\
[D, K_\mu] &= -i K_\mu \\
[K_\mu, P_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu}) \\
[K_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu} K_\nu - \eta_{\rho\nu} K_\mu) \\
[P_\rho, L_{\mu\nu}] &= i(\eta_{\rho\mu} P_\nu - \eta_{\rho\nu} P_\mu) \\
[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{81}$$

Las transformaciones finitas se obtienen exponenciando estos generadores y puede verse que son:

- (a) $\tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$ (traslación finita)
- (b) $\tilde{x}^\mu = \omega_\nu^\mu x^\nu$ (transformación de Lorentz finita)
- (c) $\tilde{x}^\mu = e^\lambda x^\mu$ (dilatación finita)
- (d) $\tilde{x}^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu \mathbf{x}^2}{1 - 2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}^2 \mathbf{x}^2}$ (SCT)

Existe una forma de escribir estas relaciones de conmutación de manera más compacta, para esto definimos los generadores:

$$\begin{aligned}
J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} & J_{-1\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \\
J_{-10} &= D & J_{0\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu),
\end{aligned}$$

donde $J_{ab} = -J_{ba}$, $a, b = -1, 0, 1, \dots, d$. Las relaciones de conmutación quedan,

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}) \quad (82)$$

donde $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$ es una métrica ficticia que tiene dos signos menos.⁵ Escrito de esta manera vemos que los generadores del grupo conforme satisfacen las relaciones de conmutación de $\text{SO}(2, d)$ que coincide con las isometrías de AdS_{d+1} . Este será uno de los ingredientes fundamentales para la correspondencia AdS/CFT.

Para terminar este apartado prestaremos atención a aquellas funciones que sean invariantes ante el grupo conforme, buscamos una función $f(\mathbf{x}_i)$ de N puntos que sea invariante ante estas transformaciones.

La invariancia traslacional requiere que la dependencia en \mathbf{x} sea del tipo $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$. Por su parte la invariancia ante rotaciones impone que la dependencia en \mathbf{x} solo pueda ser del tipo $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ dado que $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = 1$ y además $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = |\Lambda\mathbf{x}_i - \Lambda\mathbf{x}_j|$ (donde Λ denota una transformación de Lorentz).

La invariancia ante cambios de escala implica que $f(\mathbf{x}_i)$ solo puede depender de cocientes del tipo,

$$\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|}. \quad (83)$$

Finalmente, ante transformaciones especiales, la distancia entre dos puntos transforma de la siguiente manera

$$|\mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_j'| = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{(1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{b}^2\mathbf{x}_i^2)^{1/2}(1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_j + \mathbf{b}^2\mathbf{x}_j^2)^{1/2}}, \quad (84)$$

de modo que es imposible construir f con 2 o 3 puntos. La posibilidad más simple es de 4 puntos y corresponde a los “cocientes anarmónicos” o “cocientes cruzados”,

$$\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3||\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|} \quad \frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4|}$$

Con N puntos pueden construirse $N(N - 3)/2$ cocientes cruzados independientes.

3.2.1. Funciones de correlación en una CFT

Notación: por simplicidad en esta sección omitiremos el uso de la negrita \mathbf{x} sobrentendiendo que x_1 denota el vector llamado 1 y no la componente covariante 1. Esto suele quedar claro en el mismo contexto de la ecuación.

Para comenzar definiremos a los campos “cuasi-primarios” como aquellos que ante un

⁵Si por el contrario hubiéramos trabajado en el espacio euclídeo plano, que en coordenadas cartesianas tiene $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ aquí $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

cambio de escala transforman como,

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\Delta/D} \phi(x), \quad (85)$$

donde el exponente Δ se denota como “peso conforme” y $|\partial x'/\partial x|$ es el jacobiano de la transformación de coordenadas conforme relacionado con el factor de escala $\Omega(x)$ según

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Omega(x)^{-D/2}. \quad (86)$$

La función de dos puntos es

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Phi \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) e^{-I[\Phi]}, \quad (87)$$

donde ϕ_1 , ϕ_2 son campos cuasi primarios (no necesariamente distintos). Φ denota el conjunto de todos los campos funcionalmente independientes en la teoría (al que ϕ_1 y ϕ_2 deben pertenecer), $I[\Phi]$ denota la acción que asumimos invariante conforme.

La invariancia conforme supuesta en la acción y en la medida de integración de la integral de camino conducen a la siguiente regla de transformación para la función de dos puntos

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\Delta_1/D} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\Delta_2/D} \langle \phi_1(x'_1)\phi_2(x'_2) \rangle. \quad (88)$$

Concentrémonos en el caso en que la transformación es una dilatación $x \rightarrow \lambda x$ tendremos,

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2} \langle \phi_1(\lambda x_1)\phi_2(\lambda x_2) \rangle. \quad (89)$$

Como hemos visto en 3.2, la invariancia ante traslaciones y rotaciones impone que la función de correlación de dos puntos tenga una dependencia de la siguiente forma

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|), \quad (90)$$

donde debido a (88) $f(x) = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2} f(\lambda x)$. Finalmente, se concluye que

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \quad (91)$$

donde C_{12} es un coeficiente constante.

Solo nos resta explotar la invariancia ante transformaciones especiales para conocer las propiedades de la función de correlación de dos puntos. No lo hemos demostrado, pero

para una SCT vale que

$$\Omega(x) = (1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^2 \Rightarrow \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \Omega(x)^{-D/2} = \frac{1}{(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^D}. \quad (92)$$

Ahora, dada la transformación (84) para la distancia entre dos puntos, la covarianza de la función de dos puntos (91) implica,

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\Delta_1/D} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\Delta_2/D} \frac{C_{12}}{|x'_1 - x'_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2}} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (93)$$

con $\gamma_i = (1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2)$.

Esta restricción solo se satisface si $\Delta_1 = \Delta_2$. En otras palabras, dos campos cuasiprimarios solo están correlacionados si tienen la misma dimensión conforme Δ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1}} & , \text{ si } \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0 & , \text{ si } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases} \quad (94)$$

Trabajando de manera análoga se puede arribar a la expresión para la función de correlación de 3-puntos,

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_2 - x_3|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_1 - x_3|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2}}. \quad (95)$$

Podría creerse que el resto de las funciones de correlación son análogas y que solo están indeterminadas por una constante de normalización. Sin embargo, la función de 4-puntos (o más) tiene una dependencia arbitraria respecto de los cocientes cruzados, i.e.,

$$\langle \phi_1(x_1) \dots \phi_4(x_4) \rangle = f \left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}} \right) \prod_{i < j}^4 x_{ij}^{\Delta/3 - \Delta_i - \Delta_j}. \quad (96)$$

Hemos abreviado $x_{ij} = |x_i - x_j|$ y $\Delta = \sum_{i=1}^4 \Delta_i$.

3.3. Conjetura de Maldacena (AdS/CFT)

Ya hemos visto qué propiedades tienen el espacio Anti-de Sitter en dimensión $D + 1$ y una teoría de campos conforme en Minkowski de dimensión D . Además hemos comprobado que tienen el mismo grupo de simetrías $SO(2, D)$. El objetivo central de esta sección es señalar de manera precisa qué objetos en la teoría de gravedad en Anti-de Sitter se corresponden con objetos en la CFT. En la jerga a esto se lo suele llamar "diccionario holográfico".

Usaremos la figura 1 para hacer más pictórica nuestra presentación de la correspondencia. Por un lado tenemos una CFT que se encuentra en la región diagramada como

“conformal boundary” en la figura y una teoría de gravedad en Anti-de Sitter que comprende el interior del cilindro dibujado. Repasemos propiedades de estos dos espacios.

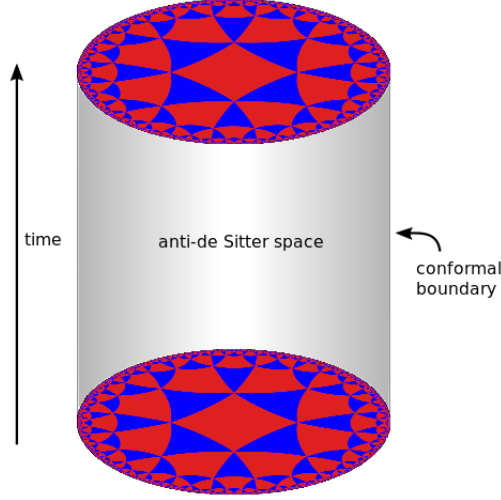


Figura 1: Espacio Anti de Sitter

La acción de una CFT en D dimensiones está dada por

$$I_{CFT} = \int dt \int d^{D-1}x \mathcal{L}_{CFT}. \quad (97)$$

Una teoría de campos conforme es invariante ante un cambio de escala si al cambiar de coordenadas los operadores transforman de la siguiente manera

$$x^i \rightarrow \lambda x^i, \quad \mathcal{O}_\Delta \rightarrow \lambda^\Delta \mathcal{O}_\Delta, \quad (98)$$

donde Δ se denomina dimensión conforme o peso conforme. $\mathcal{O}_\Delta(x^i) = \mathcal{O}_\Delta(t, \vec{x})$ con $i = 0, 1, \dots, D-1$ y el grupo de simetrías es $SO(2, D)$.

Por otro lado, una teoría de gravedad en Anti-de Sitter tendrá acción

$$I_{AdS} = \int dt \int d^{D-1}x \int dr \sqrt{g} \mathcal{L}_{grav}[h_{\mu\nu}, \Phi, \nabla\Phi, A_\mu, \dots] \quad (99)$$

donde hemos denotado por $h_{\mu\nu}$ a una perturbación de la métrica de AdS, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{AdS} + h_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, \dots, D$. También denotaremos,

$$\begin{aligned} x^0 &= t \\ x^i &= \{t, \vec{x}\} \\ x^D &= r \end{aligned} \quad (100)$$

Típicamente, $\mathcal{L}_{grav} = R - 2\Lambda + \mathcal{L}_{materia}$.

En las coordenadas de Poincaré, el intervalo de Anti-de Sitter es

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(r^2/\ell^2)} + (r^2/\ell^2)\eta_{ij}dx^i dx^j, \quad (101)$$

y cambiando $r/\ell^2 \rightarrow r$ obtenemos

$$ds^2 = \ell^2 \left(\frac{dr^2}{(r^2/\ell^2)} + (r^2/\ell^2)\eta_{ij}dx^i dx^j \right), \quad (102)$$

y fijando $\ell = 1$,

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2} + r^2\eta_{ij}dx^i dx^j. \quad (103)$$

Este espacio tiene las siguientes propiedades:

- Es maximalmente simétrico, es decir, tiene el máximo de vectores de Killing para su dimensión.
- Es solución a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda < 0$.
- Tiene curvatura constante negativa.
- Tiene grupo de isometrías $SO(2,D)$.
- Es conformalmente plano (en el sentido de Weyl que hemos mencionado), es decir, su métrica puede escribirse de modo que tenga un factor conforme multiplicada por Minkowski en una dimensión menor.
- Es homogéneo.
- No es globalmente hiperbólico si es que no existen curvas temporales cerradas.
- Es no compacto.

Consideraremos perturbaciones de AdS, por lo que la métrica (103) tendrá cambiada la parte de η_{ij} ,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{dr^2}{r^2} + r^2 h_{ij}(r, \vec{\mathfrak{x}})dx^i dx^j. \quad (104)$$

$\vec{\mathfrak{x}} = (t, x^1, \dots, x^{D-1})$. La perturbación tiene un desarrollo de Fefferman-Graham [Fefferman and Graham, 1985, de Haro et al., 2001]

$$g_{ij} = r^2 h_{ij}(r, \vec{\mathfrak{x}}) = r^2 h_{ij}^{(0)}(\vec{\mathfrak{x}}) + h_{ij}^{(2)}(\vec{\mathfrak{x}}) + r^{-2} h_{ij}^{(4)}(\vec{\mathfrak{x}}) + \dots \quad (105)$$

Además de la perturbación de la métrica puede haber otros campos que en su desarrollo quedan,

$$\Phi = r^\Delta \Phi^{(0)}(\vec{\mathfrak{x}}) + r^{\Delta-1} \Phi^{(1)}(\vec{\mathfrak{x}}) + r^{\Delta-2} \Phi^{(2)}(\vec{\mathfrak{x}}) + \dots \quad (106)$$

Estos campos Φ y g_{ij} en AdS se relacionarán con otros campos en el “borde” ($r \rightarrow \infty$) de AdS,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= r^2 h_{ij}(r, \vec{\mathbf{r}}) = r^2 h_{ij}^{(0)}(\vec{\mathbf{r}}) + h_{ij}^{(2)}(\vec{\mathbf{r}}) + r^{-2} h_{ij}^{(4)}(\vec{\mathbf{r}}) + \dots \longleftrightarrow T_{ij}(\vec{\mathbf{r}}) \\ \Phi &= r^\Delta \Phi^{(0)}(\vec{\mathbf{r}}) + r^{\Delta-1} \Phi^{(1)}(\vec{\mathbf{r}}) + r^{\Delta-2} \Phi^{(2)}(\vec{\mathbf{r}}) + \dots \longleftrightarrow \mathcal{O}_\Delta(\vec{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

El diccionario holográfico consiste de indicar precisamente esta correspondencia.

3.3.1. Diccionario holográfico

La conjetura de Maldacena puede expresarse coloquialmente como:

“Toda teoría de gravedad en Anti de Sitter ($D+1$)-dimensional es dual a una teoría de campos conforme en D dimensiones.”

Originalmente, Maldacena mostró que una teoría de cuerdas en $AdS_5 \times S^5$ es dual a la $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills con grupo de simetría de gauge $SU(N)$. Nosotros nos concentraremos en el trabajo que Witten [Witten, 1998] publicó meses después resumiendo la correspondencia en una prescripción que veremos a continuación.

Prescripción de Witten-Gubser-Klevanov-Polyakov

La correspondencia AdS/CFT puede resumirse como

$$\{\text{Teoría de gravedad en } AdS_{D+1}\} \equiv \{\text{CFT en } Mink_D\} \quad (107)$$

donde la “equivalencia” significa que tanto la teoría de gravedad en un fondo AdS_{D+1} como la CFT en $Mink_D$ son descripciones equivalentes de la misma física. Pero esto no es suficiente, necesitamos saber cómo realizar cálculos explícitos utilizando la correspondencia AdS/CFT. Witten [Witten, 1998] e independientemente Gubser, Klevanov y Polyakov [Gubser et al., 1998] introdujeron una prescripción para este fin; la idea es establecer una relación precisa entre un operador \mathcal{O} de la teoría de gauge y un campo Φ de la teoría de gravedad. Los autores han prescrito una “receta” para poder obtener funciones de correlación de la teoría del borde con acoplamiento fuerte utilizando el comportamiento de la teoría de gravedad en el régimen perturbativo. La función de partición de la teoría de gravedad y la funcional generatriz en la teoría de campos satisfacen

$$\mathcal{Z}_{grav}[\Phi|_{AdS}(x)] \equiv \langle e^{\int d^d x \Phi^{(0)}(x) \mathcal{O}(x)} \rangle_{CFT} \quad (108)$$

donde $\Phi^{(0)}$ es la fuente del operador \mathcal{O} (en jerga de teoría de campos denotada con J) de la CFT y Φ es campo dual en AdS. Se asume la identificación de $\Phi^{(0)}$ con el valor en el borde de Φ .

En general es difícil y en algunos casos imposible calcular el lado izquierdo de (108), sin

embargo, bajo ciertas condiciones podemos obtener la función de partición de gravedad en su aproximación de “saddle point”, evaluando la acción clásica euclídea en una solución de las ecuaciones de movimiento, también llamada acción on-shell,

$$\mathcal{Z}_{grav}[\Phi^{(0)}] \approx e^{-I_{on-shell}[\Phi^{(0)}_{class}]}. \quad (109)$$

La forma más usual en que se usa la conjetura es aquella en la que la teoría de gravedad está bajo una aproximación semiclásica y la CFT está en el régimen cuántico no perturbativo.

Por definición, las funciones de correlación de la teoría de gauge del borde son

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle_{CFT} = (-1)^n \frac{\delta^n \log \mathcal{Z}_{CFT}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (110)$$

donde J es la fuente del operador \mathcal{O} . En general, es posible calcular las funciones de correlación de la teoría de gauge (110) en régimen perturbativo, pero se vuelve muy difícil fuera de éste. Sin embargo, utilizando la correspondencia AdS/CFT (108) junto con la aproximación (109) e identificando $J = \Phi^{(0)}$ obtenemos la prescripción de Witten para calcular funciones de correlación de la CFT utilizando la acción de gravedad,

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle_{CFT} = (-1)^n \frac{\delta^n I_{on-shell}[\Phi^{(0)}_{class}]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (111)$$

Puede ocurrir que el lado izquierdo de (111) no esté bien definido en acoplamiento fuerte, sin embargo, el lado derecho es calculable. También es importante destacar que como AdS tiene un volumen infinito cantidades como la acción on-shell o las funciones de correlación (111) sufren de divergencias IR⁶ (UV en la teoría del borde) y es necesario introducir un procedimiento para renormalizarlas, este es el método de renormalización holográfica que estudiaremos en detalle en 3.4.

Ahora nos ocuparemos de ser un poco más explícitos mostrando cómo funciona la correspondencia en el caso del campo escalar. Consideremos el intervalo en el espacio de AdS_{D+1} en las siguientes coordenadas

$$ds^2 = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_D^2}{x_0^2}. \quad (112)$$

que corresponde al parche de Poincaré, en el cual el “borde” de Anti-de Sitter se encuentra en $x_0 = 0$ y en el que hemos hecho una rotación de Wick en la coordenada t . Usaremos subíndices para numerar las coordenadas, esto no debe confundirse con las componentes

⁶Con IR nos referimos al régimen infrarrojo de la QFT en cuestión, es decir, baja energía o equivalentemente escalas de distancias grandes. La divergencia del lado de gravedad es Infra Red porque se debe al comportamiento a grandes distancias $r \rightarrow \infty$. La correspondencia relaciona teorías en regímenes opuestos, así que lo que es IR en el bulk es UV en el borde.

covariantes de algún vector.

En estas coordenadas la ecuación de Klein-Gordon para un campo no masivo queda

$$\square_{AdS}\Phi = \left(+\frac{d}{dx_0}x_0^{2-D}\frac{d}{dx_0} + x_0^2\frac{d^2}{dx_1^2} + x_0^2\frac{d^2}{dx_2^2} + \dots + x_0^2\frac{d^2}{dx_D^2} \right) \Phi = 0, \quad (113)$$

que tiene por función de Green al “bulk-boundary propagator”,

$$K(x_0) = \frac{x_0^D}{(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_D^2)^D} = \frac{x_0^D}{(x_0^2 + \vec{x}^2)^D}. \quad (114)$$

con $(x_0, x_1, \dots, x_D) = (x_0, \vec{x})$.

El nombre se debe a la siguiente propiedad del propagador,

$$\begin{aligned} \square_{AdS}K(x_0, \vec{x}) &= 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \square_{AdS}K(x_0, \vec{x}) &= \delta^D(\vec{x}) & \text{si } x = 0. \end{aligned}$$

Con esta función de Green podemos escribir Φ tal que

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_D) = \int \int \dots \int dy_1 dy_2 \dots dy_D \frac{x_0^D}{(x_0^2 + |\vec{x}^2 - \vec{y}^2|)^D} \Phi_0(y_1, \dots, y_D) \quad (115)$$

$$\Phi_0(x_1, \dots, x_D) \approx \lim_{x_0 \rightarrow 0} \Phi(x_0, x_1, \dots, x_D)$$

Y Φ cumple:

$$\begin{aligned} \square_{AdS}\Phi &= 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \square_{AdS}\Phi &= \Phi_0 & \text{si } x = 0. \end{aligned}$$

La acción de un campo escalar libre no masivo en espacio-tiempo curvo es

$$I[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^{D+1}x \sqrt{g} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi, \quad (116)$$

la evaluamos en el caso particular en que Φ es Φ_0 en el borde, y tenemos

$$I_{class}[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^{D+1}x \sqrt{g} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi. \quad (117)$$

Haciendo integración por partes y usando las ecuaciones de campo

$$I_{class}[\Phi] = \frac{1}{2} \int d^{D+1}x \sqrt{g} \frac{1}{x_0^{D+1}} \nabla_\mu (\Phi \nabla^\mu \Phi), \quad (118)$$

y finalmente, usando el teorema de Stokes queda

$$I_{class}[\Phi] = \frac{1}{2} \int dx^D \sqrt{g} \frac{1}{x_0^D} \Phi n_i \nabla^i \Phi. \quad (119)$$

Reemplazando (115) en esto último obtenemos

$$I_{class}[\Phi] = \frac{D}{2} \int d\vec{x} \int d\vec{y} \frac{\Phi_0(\vec{x})\Phi_0(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2D}} \quad (120)$$

$$I_{class}[\Phi] = \frac{D}{2} \int d\vec{x} \int d\vec{y} \Phi_0(\vec{x}) \frac{1}{\nabla^2} \Phi_0(\vec{y}). \quad (121)$$

donde $\nabla^2 \frac{1}{\nabla^2} = \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|^{2D}} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$.

De manera general, en una teoría de campos de dimensión D tenemos que la funcional generatriz es

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-I(\phi) + \int d^D x J(x)\phi(x)} \quad (122)$$

donde $\mathcal{Z}[J = 0]$ es la función de partición.

$$\frac{1}{\mathcal{Z}[J = 0]} \frac{\delta \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\dots\delta J(z)} \Big|_{J=0} = \frac{1}{\mathcal{Z}[J = 0]} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y)\dots\phi(z) e^{-I(\phi)} \quad (123)$$

$$= \langle 0 | \phi(x)\phi(y)\dots\phi(z) | 0 \rangle \quad (124)$$

También se demuestra de manera genérica en el formalismo de integral funcional que la funcional generatriz se puede escribir en función de la función de partición como

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\int d^D x \int d^D y J \frac{1}{\mathbb{D}} J} \mathcal{Z}[J = 0], \quad (125)$$

donde \mathbb{D} es el operador que aniquila al campo en la ecuación de campo $\frac{\delta I}{\delta \phi} = 0 \Rightarrow \mathbb{D}\phi = 0$, en este caso será \square .

Entonces, ahora comparamos la ecuación (125) con la acción clásica en AdS (121)

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\int d^D x \int d^D y J \frac{1}{\mathbb{D}} J} \mathcal{Z}[J = 0]$$

$$I_{class}[\Phi] \approx \frac{D}{2} \int d^{D+1}x \int d^{D+1}y \Phi_0(\vec{x}) \frac{1}{\nabla^2} \Phi_0(\vec{y}),$$

e identificamos que $\Phi_0(\vec{x}) = J$.

Resumiendo, tenemos para la CFT del borde:

$$\mathcal{Z}[J \equiv \Phi_0] = \int \mathcal{D}\phi e^{-I(\phi) - \int d^D y \Phi_0(y)\phi(y)} \quad (126)$$

$$I = \int_{boundary} d^D y \mathcal{L}(\phi) = \int_{Mink} d^D y \partial_i \phi \partial^i \phi + \dots \quad (127)$$

Y para la teoría de gravedad del bulk:

$$I_{class} = \int_{bulk} d^{D+1}x \sqrt{g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi + \dots \Big|_{\Phi_0} \quad (128)$$

$$\Phi(x_0, y_1, \dots, y_D) \Big|_{x_0=0} = \Phi_0(y_1, \dots, y_D) \Big|_{x_0=0} \quad (129)$$

La correspondencia es entre la función de partición de una teoría de campos (que considera a las fluctuaciones de la métrica como un campo) en dimensión D , asintóticamente AdS, y la función generatriz de una CFT en dimensión $D - 1$

$$e^{-I(\Phi)_{class}} = \frac{\mathcal{Z}[\Phi_0]}{\mathcal{Z}[\Phi_0 = 0]}. \quad (130)$$

Ya hemos mostrado en este ejemplo explícito cómo funciona la correspondencia para el campo escalar y cual es el diccionario holográfico. Sin embargo, ésta tiene validez para un campo Φ más general; en el bulk Φ tiene un desarrollo

$$\Phi(r, \vec{\mathfrak{x}}) = r^\Delta \Phi^{(0)}(\vec{\mathfrak{x}}) + r^{\Delta-1} \Phi^{(1)}(\vec{\mathfrak{x}}) + \dots \quad (131)$$

La acción de la teoría del borde es

$$I_{CFT} = \int dt \int d^{D-1}x \mathcal{L}_{CFT}(\mathfrak{x}, \partial \mathfrak{x}_i) + \int dt \int dx^{D-1} J(\vec{\mathfrak{x}}) \mathcal{O}_\Delta(\vec{\mathfrak{x}}) \quad (132)$$

$$\vec{\mathfrak{x}} = (t, \dots, D - 1)$$

y el diccionario holográfico es

$$\Phi(r, \vec{\mathfrak{x}}) \longleftrightarrow \mathcal{O}_\Delta(\vec{\mathfrak{x}}) \quad (133)$$

$$\Phi^{(0)}(\vec{\mathfrak{x}}) \longleftrightarrow J(\vec{\mathfrak{x}}). \quad (134)$$

El campo Φ es genérico. Bien podría ser, por ejemplo, la métrica

$$h_{ij}(r, \vec{\mathfrak{x}}) = r^2 h_{ij}^{(0)}(\vec{\mathfrak{x}}) + h_{ij}^{(2)}(\vec{\mathfrak{x}}) + \dots \quad (135)$$

Entonces reconsideramos la ecuación (132) tomando a la métrica como campo

$$I_{CFT} = \int dt \int dx^{D-1} \mathcal{L}_{CFT}(\mathbf{x}, \partial \mathbf{x}_i) + \int dt \int dx^{D-1} h_{ij}^{(0)}(\vec{\mathbf{r}}) \mathcal{O}_{\Delta=2}^{ij}(\vec{\mathbf{r}}) \quad (136)$$

J corresponde con $h_{ij}^{(0)}$ y la dimensión conforme es $\Delta = 2$

En ese caso ya conocemos de antemano qué es el campo $\mathcal{O}_{\Delta=2}^{ij}$ respondiéndonos la siguiente pregunta: ¿qué campo tiene rango 2, es la derivada de la acción respecto de la métrica y existe en toda teoría conforme? Cuya respuesta es obviamente es el tensor de energía-momento,

$$\frac{\delta I_{CFT}}{\delta h_{ij}^{(0)}} = \mathcal{O}_{\Delta=2}^{ij} \sim T^{ij}. \quad (137)$$

Nótese que \mathcal{O} no es directamente Φ sino que se relaciona con Φ (que en el ejemplo es la métrica) siendo la derivada funcional de la acción respecto de Φ ($h_{ij}^{(0)}$). La correspondencia no es trivialmente $\Phi(r, \vec{x}) = \mathcal{O}_{\Delta}(\vec{x})$.

Para ser más explícitos con el caso de Φ genérico es conveniente mencionar el cuadro *espín/peso conforme* correspondiente a AdS_{d+1} que se encuentra en el review [Aharony et al., 2000],

- campo escalar: $\Delta_{\pm} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{d^2 + 4m^2})$,
- campo espinorial: $\Delta_{\pm} = \frac{1}{2}(d + 2|m|)$,
- campo vectorial: $\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{m^2 \frac{(d-2)^2}{4}}$,
- p-formas: $\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{m^2 \frac{(d-2p)^2}{4}}$,
- (d/2)-formas de primer orden con d par: $\Delta = \frac{d}{2} + |m|$,
- campo de Rarita-Schwinger: $\Delta = \frac{d}{2} + |m|$,
- campo no masivo de espín 2: $\Delta = d$.

3.4. Renormalización holográfica

Las funciones de correlación de n-puntos de la CFT (y también en QFT) suelen tener divergencias en los puntos de coincidencia $x_i \rightarrow x_j$ y capturan información importante para la teoría. Nosotros nos vamos a concentrar en valores de expectación, que pueden pensarse como una función de 1-punto. Para evitar divergencias en el valor de expectación del tensor de energía-momento de la teoría del borde recurriremos al procedimiento conocido como “Renormalización holográfica” apoyándonos en el trabajo de los autores [Balasubramanian and Kraus, 1999].

Para ser concretos, nos preocuparemos por el valor de expectación del tensor de energía-momento de la teoría del borde, dado que será esto lo que necesitaremos para luego calcular cargas conservadas en la sección 4.2.2. Hemos visto en la sección 3.3.1 que el tensor de energía-momento de la teoría del borde es dual a la métrica del borde

$$\frac{\delta I_{CFT}}{\delta h_{ij}^{(0)}} = \mathcal{O}_{\Delta=2}^{ij} \sim T^{ij}. \quad (138)$$

Hemos sido algo inexactos en la exposición anterior dado que el lado izquierdo de la expresión no es un tensor, para que lo sea debemos tener

$$\langle T^{ij} \rangle = \frac{2}{\sqrt{g_{ij}^{(0)}}} \frac{\delta I_{on-shell}}{\delta g_{ij}^{(0)}}. \quad (139)$$

Redefinido de esta manera el tensor del lado derecho corresponde a un tensor conocido como tensor cuasilocal de Brown-York [Brown and York Jr, 1993],

$$T_{BY}^{ij} = \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I_{on-shell}}{\delta h_{ij}}, \quad (140)$$

donde h_{ij} es la métrica inducida en la hipersuperficie de r constante. En adelante utilizaremos h_{ij} para referirnos a la métrica del borde en lugar de usar $g_{ij}^{(0)}$.

Para hacer la renormalización holográfica debemos primero tener un principio variacional bien definido fijando condiciones de Dirichlet para la métrica, esto es, que al variar la acción respecto a la métrica se obtengan las ecuaciones de campo como condición de extremo en la acción. Para que sea “bien definido” se deben agregar términos de borde como se mostrará a continuación en el caso de GR.

3.4.1. Renormalización holográfica en GR

Estudiaremos en detalle los términos de borde que hay que añadir a la acción de EH para que esté bien definido el principio variacional. Además veremos qué términos deben agregarse a la acción para evitar que diverja y cómo afectan estos términos al tensor de Brown-York.

La acción completa de GR es

$$I_{GR} = I_{EH} + I_B + I_{mat} + I_{ct} \quad (141)$$

donde I_{EH} es la acción de Einstein-Hilbert, I_B es un término de borde también conocido como término de Gibbons-Hawking y I_{ct} son contratérminos cuya función es eliminar las divergencias en la acción y regularizar el tensor de energía-momento del borde. En nuestro caso solo nos ocupamos de teorías en vacío por lo que $I_{mat} = 0$.

Consideremos la acción de Einstein-Hilbert

$$I_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda), \quad (142)$$

al variar respecto a la métrica obtenemos,

$$(16\pi G)\delta I_{EH} = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{g} (G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta})\delta g^{\alpha\beta} - \oint_{\partial\mathcal{M}} d^{D-1}y \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu, \quad (143)$$

donde n^μ es el vector normal a $\partial\mathcal{M}$.

Para introducir el término de borde debemos recurrir a la curvatura extrínseca, los detalles sobre la misma se exponen en el apéndice B. Dado que la métrica inducida $h_{\alpha\beta}$ está fija, la única cantidad del borde que podemos variar es K , la traza de la curvatura extrínseca⁷,

$$\begin{aligned} K &\equiv h^{ab} K_{ab} = n_{;\alpha}^\alpha \\ &= (n^\alpha n^\beta + h^{\alpha\beta}) n_{\alpha;\beta} \\ &= h^{\alpha\beta} n_{\alpha;\beta} \\ &= h^{\alpha\beta} (n_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma). \end{aligned}$$

La primer identidad es obvia a partir de la definición de curvatura extrínseca (257) que dimos en el apéndice B. En ella los índices griegos $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, D-1$ y los latinos $a, b, \dots = 0, 1, \dots, D-2$.

Al variar la curvatura extrínseca respecto de la métrica se obtiene

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma n_\gamma \\ &= -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\delta g_{\mu\alpha,\beta} + \delta g_{\mu\beta,\alpha} - \delta g_{\alpha\beta,\mu}) n^\mu \\ &= \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu, \end{aligned}$$

donde hemos fijado condiciones de Dirichlet para la métrica, i.e., que las derivadas tangenciales de $\delta g_{\alpha\beta}$ se anulan en \mathcal{M} . Por lo tanto, tenemos que la variación del término de borde es

$$(16\pi G)\delta I_B = \delta \oint_{\partial\mathcal{M}} d^{D-1}y \sqrt{h} K = \oint_{\partial\mathcal{M}} d^{D-1}y \sqrt{h} h^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta,\mu} n^\mu. \quad (144)$$

Entonces, la adición del término de Gibbons-Hawking junto con condiciones de Dirichlet basta para tener un principio variacional bien definido con acción

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{16\pi G} \oint_{\partial\mathcal{M}} d^{D-1}y \sqrt{h} K, \quad (145)$$

⁷Con el punto y coma se indica la derivada covariante $V_{;\beta}^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma$.

cuya variación ya no contiene derivadas normales de $\delta g_{\alpha\beta}$,

$$(16\pi G)\delta I = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} (G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}) \delta g^{\alpha\beta}. \quad (146)$$

Por completitud cabe mencionar que en caso de tener materia

$$I_{mat}[\phi; g] = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\alpha}; g_{\alpha\beta}), \quad (147)$$

y puede verse que da

$$\delta I_{mat}[\phi; g] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} T_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (148)$$

como es de esperarse.

Nos resta ver qué función cumplen los contratérminos I_{ct} . Consideremos un espacio-tiempo \mathcal{M} $(d+1)$ -dimensional que tiene una foliación por hipersuperficies de r constante \mathcal{N} . La métrica escrita en una descomposición de tipo-ADM es

$$ds^2 = N^2 dr^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dr)(dx^j + N^j dr). \quad (149)$$

donde $i, j = \{0, 1, \dots, d-1\}$ y h_{ij} es la métrica en las hipersuperficies \mathcal{N} de r constante.

En el espacio Anti-de Sitter la métrica del borde adquiere un factor de Weyl infinito cuando tomamos $r \rightarrow \infty$, por lo tanto pensaremos el borde de AdS_{d+1} como una clase conforme de bordes. Con estos contratérminos el tensor de energía-momento renormalizado es

$$T_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} (K_{ij} - K h_{ij}) - \frac{2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta I_{ct}}{\delta h^{ij}}, \quad (150)$$

donde I_{ct} es tal que cancela las divergencias cuando tomamos $r \rightarrow \infty$ en \mathcal{N} . Denotaremos al borde de la variedad como $\partial\mathcal{M} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{N}$.

De acuerdo con [Balasubramanian and Kraus, 1999] los términos de borde para AdS_3 , AdS_4 y AdS_5 en GR son:

$$\begin{aligned} I_{ct}^{\text{AdS}_3} &= -\frac{1}{8\pi G \ell} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x \sqrt{-h} \Rightarrow T_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} \left(K_{ij} - K h_{ij} - \frac{1}{\ell} h_{ij} \right) \\ I_{ct}^{\text{AdS}_4} &= -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{-h} \frac{2}{\ell} \left(1 + \frac{\ell^2}{4} \hat{R} \right) \Rightarrow T_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} \left(K_{ij} - K h_{ij} - \frac{2}{\ell} h_{ij} + \ell \hat{G}_{ij} \right) \\ I_{ct}^{\text{AdS}_5} &= -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-h} \frac{3}{\ell} \left(1 + \frac{\ell^2}{12} \hat{R} \right) \Rightarrow T_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} \left(K_{ij} - K h_{ij} - \frac{3}{\ell} h_{ij} + \frac{\ell}{2} \hat{G}_{ij} \right), \end{aligned} \quad (151)$$

hemos utilizado \hat{R}, \hat{G}_{ij} para referirnos a las cantidades asociadas a la métrica h_{ij} de $\partial\mathcal{M}$.

Notamos de aquí que la cantidad de contratérminos aumenta con la dimensión⁸. Aquí

⁸Existe un formalismo para escribir estos contratérminos de manera general pero no fue lo utilizado en este trabajo [Kofinas and Olea, 2007].

construimos I_{ct} con cantidades intrínsecamente invariantes del borde de modo que no contribuyan a las ecuaciones de movimiento

$$I_{ct} = \int d^d x \sqrt{-h} (\alpha_0 + \alpha_1 \hat{R}), \quad (152)$$

y ajustamos los coeficientes α_0, α_1 de modo que cancelen las divergencias de la acción. Este ajuste debe realizarse para cada métrica particular cuya acción pretendemos renormalizar.

3.4.2. Renormalización holográfica en EGB

Ahora estudiaremos el mismo esquema de renormalización (141) pero en la teoría de EGB, dado que la acción tiene más términos también deben agregarse nuevos términos de borde, éstos han sido estudiados por el autor [Myers, 1987]. Ahora haremos un breve repaso usando la notación de [Davis, 2003] para luego mostrar ejemplos concretos en los que se verificó el programa empleado en el cálculo que concierne a la geometría $WAdS \times \Sigma$.

Consideremos la acción de EGB

$$I_{\mathcal{M}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \alpha(R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) \right). \quad (153)$$

Pensamos que el espacio-tiempo tiene una foliación por las hipersuperficies \mathcal{N} de codimensión 1 cuyo vector normal es n^a . Variando la acción respecto a la métrica obtenemos

$$\delta I = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} (G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} + 2\alpha H_{\alpha\beta}) + \quad (154)$$

$$+ \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{N}} d^{D-1} x \sqrt{-h} n_{\alpha} (g^{\alpha[\gamma} g^{\delta]\beta} + 2\alpha P^{\alpha\beta\gamma\delta}) \nabla_{\delta} \delta g_{\beta\gamma}, \quad (155)$$

$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_{\mu}n_{\nu}$ es la métrica inducida en \mathcal{N} y $P^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2R_{\beta[\gamma}g_{\delta]\alpha} - 2R_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta} + Rg_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta}. \quad (156)$$

La expresión para δI tiene derivadas de la variación de la métrica en la dirección normal y al igual que en el caso de Einstein-Hilbert podemos cancelarlas añadiendo términos de borde que no afectan a las ecuaciones de campo.

Para una teoría de EGB estos términos son:

$$I_{\mathcal{N}} = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{N}} d^{D-1} x \sqrt{-h} \left(K + 2\alpha(J - 2\hat{G}^{ab}K_{ab}) \right) \quad (157)$$

donde $a, b = 0, 1, \dots, D-2$. Reconocemos a simple vista que el término $\int d^{D-1} x \sqrt{-h} K$ corresponde a la acción de Einstein-Hilbert y el resto al término de Gauss-Bonnet. K es

la traza de la curvatura extrínseca y J es la traza de

$$J_{ab} = \frac{1}{3} \left(2K K_{ac} K_b^c + K_{cd} K^{cd} K_{ab} - 2K_{ac} K^{cd} K_{db} - K^2 K_{ab} \right). \quad (158)$$

De esta manera variando $I_{\mathcal{M}} + I_{\mathcal{N}}$ obtenemos una expresión que ya no contiene derivadas normales de $\delta g_{\alpha\beta}$. De modo que al variar esta acción obtenemos las ecuaciones de campo (5) en el bulk \mathcal{M} .

Además, de acuerdo con [Brown and York Jr, 1993] al variar la acción respecto de la métrica inducida en el borde de la hipersuperficie \mathcal{N} de codimensión 1 (que en nuestro estudio es de tipo tiempo, $\tilde{n} = \tilde{d}r$) obtenemos el tensor cuasilocal de energía-momento de Brown-York:

$$K_{ab} - K h_{ab} + 2\alpha(3J_{ab} - J h_{ab} + 2\hat{P}_{acdb} K^{cd}) = 8\pi G T_{ab}^{BY} \quad (159)$$

con $a, b, c, d = 0, 1, \dots, D - 2$.

Renormalización de AdS en EGB

La métrica de Anti-de Sitter además de ser una solución de vacío de GR también lo es de la teoría de EGB. A continuación se muestran los resultados de la renormalización de Anti-de Sitter en $D = 5$, para realizar el cálculo hemos utilizado coordenadas estereográficas en la sección transversal,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + \frac{L^2 \delta_{ij}}{\left(1 + \frac{k}{4} (\delta_{pq} x^p x^q) \right)^2} dx^i dx^j \quad (160)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$.

El desarrollo asintótico de la acción de EGB junto con los términos de borde mencionados anteriormente da

$$I_{EGB} + I_B = -\frac{1}{8} \frac{(-3\ell^2 + 4\alpha)r_0^4}{\pi G \ell^4} + \frac{1}{8} \frac{(3\ell^2 + 4\alpha)r_0^2}{\pi G \ell^2} + \frac{\alpha}{\pi G}, \quad (161)$$

donde r_0 es un cutoff de la coordenada radial ($r_0/\ell \gg 1$).

Por otro lado, los contratérminos se han construido como

$$I_{ct} = \int_{\partial\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-h} (\alpha_0 + \alpha_1 \hat{R}),$$

y para la métrica (160) el desarrollo asintótico de I_{ct} da

$$I_{ct} = \frac{1}{8} \frac{\alpha_0 r_0^4}{\pi G \ell} + \frac{1}{8} \frac{\left(\frac{6\alpha_1}{\ell} + \frac{\ell}{2} \alpha_0 \right) r_0^2}{\pi G} + \frac{1}{8} \frac{3\ell\alpha_1 - \frac{1}{8}\ell^3\alpha_0}{\pi G}. \quad (162)$$

Entonces haciendo $I_{EGB}+I_B+I_{ct}$ y ajustando $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ conseguimos anular los términos divergentes para r grande y obtenemos la acción regularizada

$$I_{AdS_5}^{Renormalizada} = -\frac{1}{64} \frac{3\ell^2 + 4\alpha}{\pi G}. \quad (163)$$

Renormalización de Boulware-Deser

Otra solución a las ecuaciones de EGB es la métrica de Boulware-Deser, la cual corresponde a la solución de agujero negro [Garraffo and Giribet, 2008].

Se ha verificado que los coeficientes de renormalización holográfica obtenidos para la métrica de Boulware-Deser están de acuerdo con los calculados por [Brihaye and Radu, 2008].

La métrica de Boulware-Deser tiene la forma

$$ds_{Boulware-Deser}^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + d\sigma^2. \quad (164)$$

donde $d\sigma^2$ es una superficie de curvatura constante positiva de dimensión 3.

Con las convenciones de [Cai, 2002]

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{64G\alpha M}{3\pi r^4} - \frac{8\alpha}{\ell^2}} \right), \quad (165)$$

La acción y contratérminos son demasiado largos para exponerlos aquí, aunque podemos al menos dar la expresión de los coeficientes que acompañan a los contratérminos (152),

$$\alpha_0 = \frac{-1 - \frac{8\alpha}{\ell^2} + \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}}}{\sqrt{4\alpha}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}}}} \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{4\alpha} \left(3 - \frac{8\alpha}{\ell^2} - 3\sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}} \right)}{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}} \right)^{3/2}}.$$

3.5. Extensiones de AdS/CFT

3.5.1. Correspondencia Lifshitz-Schrödinger/CMT

Si bien en esta tesina no nos abocaremos al estudio de los espacios de Lifshitz y Schrödinger, la presentación de estas ramificaciones de AdS/CFT resulta amena e instructiva para entender cómo es que se extiende la conjetura de Maldacena a teorías del borde sin invariancia de Lorentz y a geometrías cuyo comportamiento asintótico no es el de AdS. Además será de utilidad tener estos casos presentes para la discusión de los resultados obtenidos que tienen similitudes con lo hallado por otros autores en Lifshitz, Schrödinger/CMT.

Hemos mencionado en la introducción que se han encontrado algunas formas de aplicar las ideas de holografía a sistemas de materia condensada (CMT por condensed matter theory), esto podría brindar una nueva manera de entender los sistemas fuertemente correlacionados. La mayor dificultad a la hora de hacer esto es encontrar el dual gravitatorio que realice las simetrías de la teoría de campos fuertemente acoplada. Un ejemplo de ello puede verse en [Kachru et al., 2008] que resumiremos a continuación.

En muchos sistemas de materia condensada se encuentran transiciones de fase gobernadas por puntos fijos que exhiben simetría anisótropa

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}, \quad (166)$$

donde z se denomina exponente dinámico. Para el caso particular $z = 2$ la teoría de campos de Lifshitz posee esta simetría

$$I = \int d^2x dt \left((\partial_t \phi)^2 - \chi (\nabla^2 \phi)^2 \right), \quad (167)$$

que modela materiales con múltiples puntos críticos parametrizados por χ . Otros sistemas que poseen la simetría (166) son los modelos de electrones fuertemente correlacionados con puntos fijos críticos cuánticos.

Para hallar un dual gravitatorio que describa sistemas con puntos fijos de Lifshitz es necesario hallar un espacio que realice geoméricamente las simetrías (166), además se pretende que la teoría satisfaga simetría ante traslaciones espaciales y temporales, rotaciones espaciales, paridad espacial e inversión temporal. Se asume que la “escala” (λ) es geometrizada en la teoría gravitatoria dual por la presencia de una dimensión radial adicional y que el reescalado de la coordenada radial adicional geometriza las transformaciones de escala (166). Estas consideraciones conducen a la familia de métricas

$$ds^2 = L^2 \left(-r^{2z} dt^2 + r^2 d\vec{x}^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right), \quad (168)$$

donde $r > 0$, $d\vec{x}^2 = dx_1^2 + \dots + dx_d^2$ y L fija la escala en que se mide el radio de curvatura de la teoría.

Los generadores de las simetrías mencionadas se pueden encontrar en [Hartong et al., 2015]. Es interesante notar que así como en este trabajo hemos usado la renormalización holográfica para eliminar las divergencias del valor de expectación de T_{ij} , los autores [Hohm and Tonni, 2010] han aplicado la misma técnica sobre el espacio de Lifshitz.

En física no relativista, existe otro ejemplo de extensión de holografía a CMT, son los sistemas de átomos fermiónicos en unitariedad [Son, 2008]. En este sistema los fermiones interactúan a través de un short-ranged potential que puede ajustarse de modo que el sistema resulte fuertemente correlacionado. El sistema es invariante de escala en el límite

de potencial zero-range. Esos modelos gozan de gran atención dado que poseen una realización experimental como átomos fríos atrapados en trampas a la resonancia de Feshbach [Zwierlein et al., 2004].

En este caso, necesitamos hallar un sistema que posea las isometrías del grupo de Schrödinger [Nishida and Son, 2007]. Los autores [Son, 2008, Balasubramanian and McGreevy, 2008] proponen un candidato a ser el dual gravitatorio de los fermiones en unitariedad. Si tal dualidad existe, permitiría extender la noción de holografía a física no relativista y potencialmente brindar nueva intuición para estos sistemas fuertemente acoplados. La métrica propuesta para el dual gravitatorio es

$$ds^2 = L^2 \left(-\frac{dt^2}{y^{2z}} + \frac{dtd\xi + d\vec{x}^2}{y^2} + \frac{dy^2}{y^2} \right) \quad (169)$$

donde \vec{x} es un vector $(D-2)$ -dimensional, z es una constante positiva llamada exponente dinámico y ξ es una coordenada nula. La métrica (169) posee simetrías ante rotaciones espaciales, traslaciones espaciales, traslaciones temporales, transformaciones de Galileo y dilataciones, y para el caso $z = 2$ es invariante ante todo el grupo de Schrödinger, incluyendo a las transformaciones conformes especiales. Cabe notar que el álgebra de Lifshitz anteriormente mencionada está incluida en el álgebra de Schrödinger, la cual a su vez está incluida en el álgebra del grupo conforme relativista de dimensión $d+2$ [Son, 2008] (siendo d la dimensión de la teoría no relativista).

3.5.2. Correspondencia WAdS/WCFT

En este apartado veremos cómo aparece el espacio WAdS en el contexto de física de agujeros negros y sobre el final prestaremos atención a las simetrías a cada lado de la dualidad.

Los espacios WAdS proveen un ejemplo sencillo en el cual explorar extensiones de la correspondencia AdS/CFT a espacios no-AdS, dado que poseen invariantes de curvatura constantes. Además, la dualidad WAdS/WCFT se relaciona con Kerr/CFT, que relaciona la geometría de horizonte cercano de agujeros negros rotantes extremales con teorías conformes bidimensionales [Guica et al., 2009].

Los espacios WAdS₃ son deformaciones (compresiones o estiramientos) del espacio AdS₃ y aparecen en el límite de horizonte cercano de agujeros negros rotantes extremales. A continuación, demostraremos esta afirmación. La métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist está dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\phi})^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((\hat{r}^2 + a^2) d\hat{\phi} - a d\hat{t})^2 + \frac{\rho}{\Delta} d\hat{r}^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (170)$$

donde

$$\Delta = \hat{r}^2 - 2GMr + a^2, \quad \rho^2 = \hat{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad a = \frac{J}{M}. \quad (171)$$

En ésta métrica M y J son constantes de integración que corresponden a la masa y momento angular del agujero negro respectivamente. Para que (170) no posea singularidades desnudas el momento angular debe estar acotado $|J| \leq GM^2$. Nos concentraremos en el caso en que $|J| = GM^2$ denominado agujero negro extremal. Para obtener la geometría de horizonte cercano de Kerr hay que definir coordenadas adimensionales

$$t = \frac{\lambda}{2GM}, \quad y = \frac{\lambda}{\hat{r} - GM}, \quad \phi = \hat{\phi} - \frac{\hat{t}}{2GM}, \quad (172)$$

y luego tomar límite cuando $\lambda \rightarrow 0$ manteniendo t, x, ϕ, θ fijas. La geometría de horizonte cercano de un agujero negro extremal (NHEK por sus siglas en ingles “Near Horizon Extremal Kerr”) en coordenadas tipo Poincaré se lee

$$ds^2 = 2GJ\Omega^2 \left(\frac{-dt^2 + dy^2}{y^2} + d\theta^2 + \Upsilon \left(d\phi^2 + \frac{dt}{y} \right)^2 \right), \quad (173)$$

donde hemos definido

$$\Omega^2 = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad \Upsilon = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (174)$$

y las coordenadas angulares son tales que $\phi \sim \phi + 2\pi$ y $\theta \in [0, \pi]$. También es posible definir coordenadas globales para NHEK

$$t = \left(\cos \tau \sqrt{1 + r^2} + r \right)^{-1}, \quad y = \sin \tau \sqrt{1 + r^2}, \quad \phi = \varphi + \log \left(\frac{\cos \tau + r \sin \tau}{1 + \sin \tau \sqrt{1 + r^2}} \right), \quad (175)$$

en las cuales la geometría de horizonte cercano queda

$$ds^2 = 2GJ\Omega^2 \left(-(1 + r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + d\theta^2 + \Upsilon^2 (d\varphi + rd\tau)^2 \right). \quad (176)$$

Es notable que para $\theta = \text{cte}$, $\Upsilon = 0$ la métrica (176) es conforme a AdS_2 . Para $\theta = \text{cte}$ y $\Upsilon = 1$ es proporcional a la métrica de AdS_3 escrito como un fibrado de Hopf de AdS_2 [Anninos et al., 2009], en efecto,

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{4} \left(-\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 + (du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right). \quad (177)$$

Si ahora multiplicamos la fibra (177) por un factor de deformación \mathcal{K} obtenemos

$$ds^2 = \frac{\ell_{\mathcal{K}}^2}{4} \left(-\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 + \mathcal{K}(du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right). \quad (178)$$

Es notable que (178) es proporcional a (176) si identificamos $r = \sinh \sigma$, $u = \varphi$ y $\Upsilon^2 = \mathcal{K}$. Es usual parametrizar la deformación \mathcal{K} en términos de una nueva constante ν a través de la relación $\mathcal{K} = \frac{4\nu^2}{\nu^2+3}$ y $\ell_{\mathcal{K}} = \frac{4\ell^2}{\nu^2+3}$, de modo que queda

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2+3} \left(-\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 + \frac{4\nu^2}{\nu^2+3} (du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right). \quad (179)$$

Precisamente a este espacio se lo denota como Warped AdS (WAdS) tipo-espacio dado que el factor warped tiene signatura positiva. Según el valor de ν los espacios warped tipo-espacio se denominan stretched (estirados) si $\nu^2 > 1$ y squashed (comprimidos) para $\nu^2 < 1$. Y en el caso $\nu^2 = 1$ no hay deformación y tenemos AdS₃.

También existen los espacios warped tipo-tiempo (tWAdS)

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\nu^2+3} \left(\cosh^2 \sigma d\tau^2 + d\sigma^2 - \frac{4\nu^2}{\nu^2+3} (du + \sinh \sigma d\tau)^2 \right) \quad (180)$$

y warped tipo nulo

$$ds^2 = \ell^2 \left(\frac{d^2}{u^2} + \frac{dx^+ dx^-}{u^2} \pm \frac{(dx^-)^2}{u^4} \right), \quad (181)$$

que son equivalentes a los espacios de Schrödinger tridimensionales (169) con $z = 2$ identificando $t \equiv x^-$, $\xi \equiv x^+$ e $y \equiv u$.

En esta tesina nos concentraremos en los espacios spacelike WAdS y spacelike stretched black hole [Anninos et al., 2009, Detournay et al., 2012], escritos en coordenadas

$$ds_{\text{WAdS}}^2 = dt^2 - 2\nu r dt d\phi + \frac{3}{4}(\nu^2 - 1)r^2 d\phi^2 + \frac{\ell^2}{r^2(\nu^2 + 3)} dr^2, \quad (182)$$

$$\begin{aligned} ds_{\text{WAdS BH}}^2 &= dt^2 - \left(2\nu r - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right) dt d\phi + \\ &+ \frac{r}{4} \left(3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right) d\phi^2 + \\ &+ \frac{\ell^2}{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)} dr^2. \end{aligned} \quad (183)$$

Escritas de esta manera las unidades de las coordenadas son tales que $[t], [r], [\ell] = \text{Longitud}$ y $[\phi] = \text{Adimensional}$.

Una cualidad muy interesante de los espacios WAdS es el hecho de que son solución

de muchas teorías de gravedad, desde teoría de cuerdas hasta gravedad masiva. Además en los espacios WAdS tipo-espacio existen agujeros negros que asintóticamente tienden a WAdS₃. También tienen la notable propiedad de ser localmente equivalentes al espacio donde están inmersos [Anninos et al., 2009]. Incluso se han estudiado transiciones de fase de Hawking-Page [Ghodrati and Naseh, 2016] y entropía de entrelazamiento de WAdS₃ [Basanisi and Chakraborty, 2016]. Todo esto hace que los espacios WAdS sean de gran interés como extensiones de holografía a geometrías no-AdS.

Las deformaciones introducidas anteriormente rompen las simetrías $SO(2, 2) \simeq SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})$ de AdS₃ a $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$. Como consecuencia también se modifica el grupo asintótico de simetrías que en el caso de AdS₃ coincide con el grupo conforme en dos dimensiones. El grupo de simetrías asintótico de WAdS₃ está generado por el producto semi-directo de una copia del álgebra de Virasoro y una extensión afín de $u(1)$ con una extensión central no nula [Henneaux et al., 2011]. Entonces la teoría de campos dual a WAdS₃ debe poseer simetrías que satisfagan dicha álgebra. De las simetrías pueden derivarse propiedades de la teoría de campos dual, estas teorías conformes especiales suelen denominarse Warped CFT (WCFT) [Detournay et al., 2012].

4. Cálculos y Resultados para WAdS \times Σ

El cálculo de las cargas conservadas se llevará a cabo por tres métodos diferentes; mediante la acción euclídea, mediante el tensor quasilocal de energía-momento de Brown-York y como cargas de Iyer-Wald [Rivera-Betancour and Olea, 2018, Iyer and Wald, 1994]. También se calculará la entropía mediante la acción euclídea y la fórmula general obtenida por Wald en [Wald, 1993]. En realidad, existe una relación entre estos dos caminos de cálculo que puede verse en [Iyer and Wald, 1995].

Para verificar que el programa que realiza el cálculo de cargas y de entropía es correcto (en todos los métodos mencionados) se ha elegido trabajar con la métrica de Boulware-Deser, la cual como se ha dicho es una solución de agujero negro para las ecuaciones de campo de EGB. Esta verificación se ha realizado constatando la equivalencia entre los resultados de los autores [Brihaye and Radu, 2008] y [Cai, 2002] y luego comparando la coincidencia con lo obtenido.

Primero debemos renormalizar la acción de Boulware-Deser a fin de eliminar las divergencias en el tensor de Brown-York, los contratérminos utilizados son los mismos que se han expuesto en la sección 3.4.2. Se ha verificado que los coeficientes de renormalización holográfica obtenidos para la métrica de Boulware-Deser están de acuerdo con los calculados por [Brihaye and Radu, 2008].

La métrica de Boulware-Deser tiene la forma

$$ds_{\text{Boulware-Deser}}^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + d\sigma^2,$$

donde $d\sigma^2$ es una superficie de curvatura constante positiva de dimensión 3, $d\sigma^2 = r^2(\cos^2\theta d\psi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$.

Con las convenciones de [Cai, 2002]

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{64G\alpha M}{3\pi r^4} - \frac{8\alpha}{\ell^2}} \right).$$

Como hemos mencionado en la sección 3.4.2, los coeficientes que acompañan a los contratérminos son (152),

$$\alpha_0 = \frac{-1 - \frac{8\alpha}{\ell^2} + \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}}}{\sqrt{4\alpha}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}}}}, \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{4\alpha} \left(3 - \frac{8\alpha}{\ell^2} - 3\sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}} \right)}{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}} \right)^{3/2}}.$$

A partir de la métrica (4) se calcula el tensor de Brown-York (159),

$$T_{ab}^{BY} = \frac{1}{8\pi G} \left[K_{ab} - Kh_{ab} + 2\alpha(3J_{ab} - Jh_{ab} + 2\hat{P}_{acdb}K^{cd}) \right],$$

con $a, b, c, d = 0, 1, \dots, D - 2$, cuya única componente no nula es

$$T_t^t = -\frac{1}{8\pi G} \frac{2\sqrt{\alpha}}{8 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}}\right)^{3/2}} \left(12\alpha \left(-2 + 3\sqrt{1 - \frac{8\alpha}{\ell^2}}\right) + 4 \left(-1 + \frac{8\alpha}{\ell^2} + \frac{8GM}{\pi}\right) \right).$$

Luego, para calcular la carga conservada asociada al vector de Killing ∂_t usaremos la expresión [Brown and York Jr, 1993]

$$Q_\xi = \int_{\mathcal{S}} d^{d-1}x \sqrt{\sigma} (u^a T_{ab} \xi^b),$$

donde \mathcal{S} es una superficie de codimensión 2 con r y t constantes.

En nuestro cálculo $\xi^b = (1, 0, 0, 0)$, y u^a son las componentes contravariantes de la normal unitaria a la superficie de tiempo constante, $u^a = -\frac{1}{\sqrt{h_{tt}}} h^{at}$

$$Q_t = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} d\psi d\theta d\phi (r^3 \cos \theta \sin \theta) (u^\mu T_{\mu\nu} \xi^\nu).$$

De aquí obtenemos una expresión cuyo desarrollo asintótico tiene por término dominante al de orden cero en r , y que tiene el valor

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} Q_t|_{r=r_0} = M. \quad (184)$$

A lo largo del trabajo ha sido fundamental el uso de este caso conocido para verificar que cada uno de los programas sea correcto. Algunos de los resultados en estos programas de verificación han sido incluidos como ejemplos en la sección de introducción teórica.

4.1. Solución de las ecuaciones de campo

Según hemos expuesto de manera general en la sección 2, teníamos que la acción de EGB es (4)

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda + \alpha(R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) \right),$$

y la ecuaciones de campos que se derivan de la misma son (5)

$$E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + \alpha \left(2R_{\mu\gamma\alpha\beta}R_\nu^{\gamma\alpha\beta} - 4R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta} + \right. \\ \left. - 4R_{\mu\alpha}R_\nu^\alpha + 2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R^2 + R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta})g_{\mu\nu} \right) = 0.$$

En estas ecuaciones de campo reemplazamos los ansatz WAdS \times Σ y WAdS bh \times Σ , que corresponden a las métricas métrica de spacelike WAdS (182) y spacelike stretched black

hole (183) [Anninos et al., 2009, Detournay et al., 2012] en producto tensorial con un espacio de curvatura constante Σ . El intervalo para WAdS \times Σ es

$$ds_{\text{WAdS}\times\Sigma}^2 = dt^2 - 2\nu r dt d\phi + \frac{3}{4}(\nu^2 - 1)r^2 d\phi^2 + \frac{\ell^2}{r^2(\nu^2 + 3)} dr^2 + \frac{L^2 \delta_{ij}}{\left(1 + \frac{k}{4}(\delta_{pq}x^p x^q)\right)^2} dx^i dx^j. \quad (185)$$

Y para WAdS bh \times Σ es

$$ds_{\text{WAdS BH}\times\Sigma}^2 = dt^2 - \left(2\nu r - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)}\right) dt d\phi + \frac{r}{4} \left(3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)}\right) d\phi^2 + \frac{\ell^2}{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)} dr^2 + \frac{L^2 \delta_{ij}}{\left(1 + \frac{k}{4}(\delta_{pq}x^p x^q)\right)^2} dx^i dx^j. \quad (186)$$

Con $i, j, p, q = 1, \dots, D - 3$. Si $k = \{-1, 0, 1\}$, Σ será una superficie de curvatura constante hiperbólica, plana o esférica respectivamente. Escritas de esta manera las unidades de las coordenadas son tales que $[t], [r], [\ell], [L] = \text{Longitud}$ y $[\phi], [x], [y], [z] = \text{Adimensionales}$.

Hallar la solución a las ecuaciones de campo (5) según nuestras propuestas (185) y (186) implica encontrar para qué valores de los parámetros de la teoría $\{\Lambda, \alpha\}$ y para qué valores de los parámetros de la propuesta $\{\ell, \nu, k, L\}$ se satisfacen las ecuaciones de campo.

4.1.1. Caso $D = 5$

Reemplazando las métricas (185) y (186) en las ecuaciones de campo $E_{\mu\nu} = 0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E_t^t = \frac{-2\nu^2 + 3}{\ell^2} \left(1 + \frac{4\alpha k}{L^2}\right) + \Lambda - \frac{k}{L^2} = 0 \quad (187)$$

$$E_\phi^t = \frac{3\nu r}{\ell^2} (\nu^2 - 1) \left(1 + \frac{4\alpha k}{L^2}\right) = 0 \quad (188)$$

$$E_\phi^\phi = E_r^r = \frac{\nu^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{4\alpha k}{L^2}\right) + \Lambda - \frac{k}{L^2} = 0 \quad (189)$$

$$E_x^x = E_y^y = \Lambda + \frac{3}{\ell^2} = 0. \quad (190)$$

$$(191)$$

De estas 6 ecuaciones solo 4 son independientes. De modo que obtenemos los parámetros:

$$\left\{ \Lambda = -\frac{3}{\ell^2}; \alpha = \frac{\ell^2}{12}; k = -1; L = \frac{\ell}{\sqrt{3}} \right\} \quad (192)$$

con $\nu \in \mathbb{R}$ y $\ell > 0$. Cabe destacar que se han descartado las soluciones para las que $\nu = 1$ porque corresponderían a AdS $_3 \times \Sigma$ (el factor Warped se vuelve 1).

4.1.2. Caso $D = 6$

Reemplazando las métricas (185) y (186) en las ecuaciones de campo $E_{\mu\nu} = 0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E_t^t = \frac{-2\nu^2 + 3}{\ell^2} \left(1 + \frac{12\alpha k}{L^2} \right) + \Lambda - \frac{3k}{L^2} = 0 \quad (193)$$

$$E_\phi^t = \frac{3\nu r}{\ell^2} (\nu^2 - 1) \left(1 + \frac{12\alpha k}{L^2} \right) = 0 \quad (194)$$

$$E_\phi^\phi = E_r^r = \frac{\nu^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{12\alpha k}{L^2} \right) + \Lambda - \frac{3k}{L^2} = 0 \quad (195)$$

$$E_x^x = E_y^y = E_z^z = -\frac{k}{\ell^2} \left(1 - \frac{12\alpha}{\ell^2} \right) + \left(\Lambda + \frac{3}{\ell^2} \right) = 0. \quad (196)$$

$$(197)$$

Tenemos 7 ecuaciones de las cuales solo 4 son independientes, de modo que obtenemos:

$$\left\{ \Lambda = -\frac{3}{\ell^2}; \alpha = \frac{\ell^2}{12}; k = -1; L = \ell \right\} \quad (198)$$

con $\nu \in \mathbb{R}$ y $\ell > 0$.

En la siguiente sección veremos lo que sucede con la renormalización holográfica de (185) y (186), necesaria para luego calcular las cargas conservadas.

4.2. Renormalización holográfica

El programa que realiza los cálculos de esta sección y la siguiente se constató correcto para las métricas de Schwarzschild-AdS y BTZ en Relatividad General. Además, se verificó para métrica de Boulware-Deser (solución de agujero negro para la teoría de EGB). Esto último se hizo siguiendo a los autores [Cai, 2002, Brihaye and Radu, 2008].

En un principio se pensaba renormalizar la acción de la manera expuesta en la sección 3.4.2 utilizando contratérminos de la forma

$$I_{ct} = \int d^{D-1}x \sqrt{-h} (\alpha_0 + \alpha_1 \hat{R}).$$

Sin embargo, tenemos la situación atípica de que la acción on-shell es cero, tanto en $D = 5$ como en $D = 6$, con lo que no es necesario renormalizar la acción para que sea

finita. Por ejemplo, en el caso $D = 5$, reemplazando $\Lambda = -\frac{3}{\ell^2}$ tenemos:

$$I = -\frac{1}{16} \frac{Lr^2 \sqrt{\nu^2 + 3}}{\pi G} \left(16\pi \ell^2 G k \left(\frac{12\alpha}{\ell^2} - 1 \right) - (\nu^2 + 3) L^2 \left(1 + \frac{4\alpha k}{L^2} \right) \right) \quad (199)$$

donde vemos a simple vista que al reemplazar $\left\{ \alpha = \frac{\ell^2}{12}; k = -1; L = \frac{\ell}{\sqrt{3}} \right\}$ los términos entre paréntesis se anulan. Para $D = 6$ ocurre algo análogo.

Del hecho de que la acción on-shell sea nula se desprende que [Hawking, 1976, Hawking and Page, 1983]

$$\langle E \rangle = \frac{\partial I}{\partial \beta_0} = M = 0 \quad (200)$$

y

$$S = \beta_0 \langle E \rangle - I = S_{BH} = 0. \quad (201)$$

A continuación verificaremos este resultado calculando las cargas por medio del tensor de Brown-York on-shell y en la próxima sección lo verificaremos calculando la carga de Noether-Wald y la entropía de Wald.

4.2.1. Tensor de Brown-York

Como ya se ha expuesto, el tensor de Brown-York [Brown and York Jr, 1993, Davis, 2003] para la teoría de EGB es:

$$T_{ab}^{BY} = \frac{1}{8\pi G} \left\{ K_{ab} - K h_{ab} + 2\alpha(3J_{ab} - J h_{ab} + 2\hat{P}_{acdb} K^{cd}) \right\},$$

y para el caso de WADS \times Σ las únicas componentes no nulas son las T_x^x, T_y^y .

En $D = 5$ tenemos que

$$\kappa^2 T_x^x = \kappa^2 T_y^y = \frac{\sqrt{\nu^2 + 3}}{\ell}, \quad (202)$$

y en $D = 6$

$$\kappa^2 T_x^x = \kappa^2 T_y^y = \kappa^2 T_z^z = \frac{2\sqrt{\nu^2 + 3}}{3\ell}. \quad (203)$$

4.2.2. Cargas conservadas

De acuerdo con [Brown and York Jr, 1993] la carga conservada asociada a un vector de Killing ξ^ν es

$$Q_\xi = \int_{\mathcal{S}} d^{d-1}x \sqrt{\sigma} (u^i T_{ij} \xi^j), \quad (204)$$

donde \mathcal{S} es una superficie de codimensión 2 con r y t constantes.

Reemplazando el tensor de Brown-York (202) y (203) y los vectores de Killing $\{\partial_t, \partial_\phi\}$ obtenemos que

$$Q_t = M = 0 \quad (205)$$

y

$$Q_\phi = J = 0 \quad (206)$$

dado que el bloque $\{t, \phi\}$ de T_{ab}^{BY} es nulo.

4.3. Entropía de Wald y cargas de Noether-Wald

4.3.1. Entropía de Wald

Según hemos estudiado en la sección 2.2.1 la entropía de Wald [Wald, 1993] es (27)

$$S = -2\pi \oint_{\mathcal{H}^+} d^{D-2}x \sqrt{\sigma} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial R^{\mu\nu\rho\sigma}}$$

donde la binormal $\epsilon^{\mu\nu}$ puede calcularse como:

$$\epsilon_{\mu\nu} = u_\mu n_\nu - u_\nu n_\mu \quad (207)$$

con $\tilde{u} = u_t \tilde{d}t$ y $\tilde{n} = n_r \tilde{d}r$ tales que $\tilde{u} \cdot \tilde{u} = -1$ y $\tilde{n} \cdot \tilde{n} = 1$.

\mathcal{H}^+ es el horizonte de eventos por lo que tiene sentido calcular la entropía en aquellos casos donde exista tal horizonte. A partir de (27) se calcula la entropía del agujero negro (186) y obtenemos para $D = 5$

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial R^{\mu\nu\rho\sigma}} = -\frac{1}{8\pi G} \left(1 + \frac{4\alpha k}{L^2} \right) \quad (208)$$

y para $D = 6$

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} \frac{\partial L}{\partial R^{\mu\nu\rho\sigma}} = -\frac{1}{8\pi G} \left(1 + \frac{12\alpha k}{L^2} \right), \quad (209)$$

de modo que al reemplazar $\{\alpha = \frac{\ell^2}{12}; k = -1; L = \frac{\ell}{\sqrt{3}}\}$ y $\{\alpha = \frac{\ell^2}{12}; k = -1; L = \ell\}$ respectivamente obtenemos

$$S_{\text{WAdS}\times\Sigma_{D-3}} = 0. \quad (210)$$

4.3.2. Temperatura

En la sección 2.2.2 hemos visto cómo calcular la temperatura de Hawking de un agujero negro de dos formas diferentes. Es notable el hecho de que la temperatura de WAdS $\text{bh}\times\Sigma$ coincidirá con la de WAdS bh , dado que la sección transversal Σ no afecta el resultado como es obvio al tener presente el cálculo de T_H imponiendo condiciones periódicas en el tiempo euclídeo. Por este motivo, hemos podido comparar nuestro resultado de T_H con el de los autores [Moussa et al., 2003, Anninos et al., 2009].

Para realizar el cálculo de T_H por el primer método recordamos que si se tiene una

descomposición ADM dada por

$$ds^2 = -N^2(r)dt^2 + \rho^2 r (N^\phi(r)dt + d\phi)^2 + \frac{dr^2}{h(r)N^2(r)},$$

donde $N^2(r_\pm) = 0$ pero $h(r_\pm) \neq 0$, la temperatura se obtiene como

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \sqrt{h(r_+)} \partial_r N^2(r)|_{r_+}. \quad (211)$$

La descomposición ADM de WAdS es

$$ds^2 = -N(r)^2 dt^2 + R(r)^2 (d\phi + N^\theta(r)dt)^2 + \frac{\ell^2 dr^2}{4R(r)^2 N(r)^2}, \quad (212)$$

donde

$$\begin{aligned} R(r)^2 &= \frac{r}{4} \left(3(\nu^2 - 1)r + (\nu^2 + 3)(r_+ + r_-) - 4\nu\sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)} \right) \\ N(r)^2 &= \frac{(\nu^2 + 3)(r - r_+)(r - r_-)}{4R(r)^2} \\ N^\phi(r) &= \frac{2\nu r - \sqrt{r_+ r_- (\nu^2 + 3)}}{2R(r)^2}. \end{aligned}$$

donde podemos identificar fácilmente que $\rho^2(r) = R(r)^2$ y $h(r) = 4R^2(r)/\ell^2$.

Por lo tanto, reemplazando en (211) obtenemos

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \sqrt{h(r_+)} \partial_r N^2(r)|_{r_+} = \frac{\nu^2 + 3}{4\pi\ell} \frac{r_+ - r_-}{2\nu r_+ - \sqrt{(\nu^2 + 3)r_+ r_-}}. \quad (213)$$

Por otra parte, el cálculo de la temperatura también puede llevarse a cabo usando la gravedad superficial, para esto recordamos que

$$\nabla_\alpha \xi_\beta = \kappa \epsilon_{\alpha\beta}, \quad (214)$$

donde ξ es un vector de Killing sobre el horizonte, y obtenemos la gravedad superficial como $\kappa^2 = -\frac{1}{2} \nabla_\alpha \xi_\beta \nabla^\alpha \xi^\beta$.

El agujero negro que consideramos es estacionario y además sólo hay un ángulo de rotación, de modo que

$$\xi = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi, \quad (215)$$

donde $\Omega_H = \left. \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right|_{r=r_+}$. Finalmente se calcula la temperatura como $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ y se obtiene (213) como era de esperarse.

4.3.3. Cargas de Noether-Wald

En la sección 2.2.3 hemos derivado la expresión (48) para la carga de Noether-Wald como una integral de flujo en una hipersuperficie de codimension-2 que denotamos como S . En nuestro caso de interés debemos tomar esa hipersuperficie en el borde asintótico del espacio-tiempo a $r \rightarrow \infty$

$$\mathcal{Q}[\xi] = \int_{\infty} d^{D-2}x \sqrt{\sigma} \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}} \nabla^{\alpha} \xi^{\beta}, \quad (216)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu}$ es la binormal (207) y ξ^{β} es el vector de Killing cuya carga conservada asociada queremos calcular. Simbolizamos con ∞ a la integración sobre una hipersuperficie de codimensión-2 definida por t y r constantes en la que se toma límite cuando $r \rightarrow \infty$.

De acuerdo con [Dutta and Gopakumar, 2006] el valor de las cargas en espacios AAdS (asintóticamente AdS) se obtiene restando el valor de la misma para el fondo (el espacio al que tiende asintóticamente el agujero negro). En el caso de la energía su valor viene dado por

$$\varepsilon = \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left(\mathcal{Q}[\partial_t] - \sqrt{\frac{g_{tt}}{g_{tt}^{\text{AdS}}}} \Big|_{r=r_0} \mathcal{Q}_{\text{AdS}}[\partial_t] \right), \quad (217)$$

Debemos aclarar que la carga de Noether-Wald tiene, además del término $\mathcal{Q}[\xi]$ dado por (216), un término de borde extra que en el caso de espacios AAdS se cancela al realizar la sustracción del fondo (ver nota al pie 13 de [Dutta and Gopakumar, 2006]). En nuestro cálculo asumiremos que esto también es válido para espacios AWAdS, queda como trabajo a futuro corroborar esta suposición.

Para el vector de Killing ∂_t obtenemos en $D = 5$

$$\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}} \nabla^{\alpha} \xi^{\beta} = cte \left(1 + \frac{4\alpha k}{L^2} \right), \quad (218)$$

y en $D = 6$

$$\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}} \nabla^{\alpha} \xi^{\beta} = cte \left(1 + \frac{12\alpha k}{L^2} \right). \quad (219)$$

Y vemos que al reemplazar los valores de α , L y k obtenemos $Q_t = 0$.

Para Q_{ϕ} ($\vec{\xi} = \partial_{\phi}$) ocurre que directamente

$$\epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu}^{\alpha\beta}} \nabla^{\alpha} \xi^{\beta} = 0 \quad (220)$$

en $D = 5, 6$.

De modo que hemos comprobado por esta vía de cálculo que todas las cargas de Noether y la entropía son cero para WAdS \times Σ .

5. Conocimientos Adquiridos y Resultados

5.1. Conocimientos adquiridos

En el desarrollo del trabajo se utilizaron distintas métricas conocidas para verificar la fiabilidad de los programas que realizan distintos cálculos, a saber, Schwarzschild, Anti-de Sitter, Sch-AdS, el agujero negro BTZ, Boulware-Deser, WAdS₃ y AWAdS₃ black hole. Todos los cálculos originales del trabajo se hicieron en el software Maple que cuenta con un conjunto de librerías preparado para Relatividad General (derivadas covariantes, tensores, contracciones, estructuras iterativas, etc).

La etapa inicial consistió de una puesta en contexto; repasar algunos contenidos conocidos como integrales de camino, reforzar el manejo de la acción de Einstein-Hilbert y también aprender algunos rudimentos sobre teoría de grupos. Luego, estudiar las propiedades de cada lado de la correspondencia AdS/CFT en general, y en concreto la correspondencia campo/operador para el campo escalar. Por otra parte, tampoco son un contenido estándar de Relatividad General las teorías de gravedad con términos superiores en la curvatura, cuya justificación para el caso de Einstein-Gauss-Bonnet se vio por las dos vías expuestas en la sección 2.1.

A aquello le sigue aprender los rudimentos de termodinámica de agujeros negros, de qué manera se comienza a hablar de la temperatura y propiedades termodinámicas de un agujero negro. La renormalización holográfica tuvo varias etapas, comenzando por el término de borde de Gibbons-Hawking, su generalización para EGB y realizar el procedimiento para AdS₅ y para Boulware-Deser estático. También notar cómo se traduce esto en el tensor cuasilocal de energía-momento de Brown-York y calcular cargas conservadas a partir del mismo. Luego, en base a lo visto en integrales de camino y termodinámica de agujeros negros calcular la masa y la carga por métodos de la acción euclídea y repetir lo mismo utilizando el tensor de Brown-York.

Como última etapa, calcular la entropía de un agujero negro en base a la fórmula de Wald, la cual da una alternativa frente a la acción euclídea, a su vez, determinar la gravedad superficial κ brinda una de las formas para calcular la temperatura. Finalmente, usar el mismo método para calcular las cargas conservadas.

5.2. Resultados y perspectivas a futuro

Hemos trabajado en la extensión de holografía Warped AdS/Warped CFT, en variedades del tipo WAdS₃ × Σ_{D-3} donde Σ_{D-3} es de curvatura constante. La teoría de gravedad del bulk es Einstein-Gauss-Bonnet para la cual se ha encontrado una solución de agujero negro localmente equivalente a WAdS₃ × Σ_{D-3} y en la que Σ_{D-3} es una superficie de curvatura localmente constante y negativa. Cabe mencionar que se ha intentado cambiar

L en (185) y (186) por una $f(r)$ a fin de generalizar el espacio Σ , sin embargo, de esta manera las ecuaciones de campos conducen a un sistema de EDOs que no parece resoluble analíticamente. Podría ser interesante explorar soluciones numéricas del sistema de EDOs.

Sobre esta solución de agujero negro se han realizado cálculos termodinámicos confirmado el rigor de los resultados por distintos métodos: en la sección 4.2 utilizando la energía libre a partir de la acción euclídea on-shell y también mediante el tensor de Brown-York renormalizado. Luego, en la sección 4.3 mediante el método de Noether-Wald. Sobre este último formalismo resta corroborar la suposición de la cancelación de los términos de borde de la carga al restar el fondo.

Se ha encontrado la situación inusual de que la masa y la entropía del agujero negro son cero, mientras que la temperatura es finita como hemos calculado en la sección 4.3.2.

Situaciones similares fueron halladas en NMG (por New Massive Gravity) para un agujero negro asintóticamente AdS_3 [Liu and Sun, 2009] y en la dualidad Lifshitz/gravity para un agujero negro asintóticamente Lifshitz [Cai et al., 2009]. En el caso de NMG cabe aclarar una sutileza, en tres dimensiones GR no tiene grados de libertad locales, es decir, no hay gravitones. New Massive Gravity es una teoría de gravedad masiva que agrega al lagrangiano de GR términos cuadráticos en la curvatura, lo que provee de grados de libertad a la teoría: un campo de espín 2 masivo. Según como se elija el signo de la constante de Newton y el término cuadrático del lagrangiano (el que da lugar al modo masivo) los agujeros negros pueden tener masa negativa y los gravitones energía positiva o viceversa, pero no las dos cosas al mismo tiempo. Hay regiones críticas en el espacio de parámetros donde la masa (y momento angular) de ciertas soluciones de agujero negro son cero y uno puede elegir el signo que convenga para que las excitaciones tengan energía positiva. Lo que sucede a nivel linealizado es que el operador diferencial para las perturbaciones degenera y las soluciones de la ecuación diferencial también, dando lugar a nuevos tipos de soluciones. Típicamente, en teorías con derivadas superiores esas soluciones presentan un perfil logarítmico [Ayón-Beato et al., 2009]. Otro caso similar a este ocurre con las llamadas teorías de gravedad crítica en dimensión $D \geq 4$ [Lü and Pope, 2011, Deser et al., 2011]. En estas teorías de gravedad, que también incluyen términos cuadráticos en la curvatura, es posible hallar regiones en el espacio de parámetros donde excitaciones adicionales al gravitón no-masivo, como un modo escalar masivo y un modo de espín-2 masivo. Acomodando los parámetros éste último desaparece y se hace no-masivo.

En nuestro caso la teoría ya es de orden dos, con lo que sería interesante entender mejor cómo este fenómeno de criticalidad, típicamente asociado a tener cargas conservadas y entropía nulas para las soluciones de agujero negro, emergen en una teoría cuyas ecuaciones de campo son de segundo orden para la métrica y donde el gravitón es no masivo. Como perspectiva, sería interesante estudiar cómo son las perturbaciones de la métrica en torno a WAdS, así como también hallar generalizaciones de las soluciones presentadas en esta tesis con el objetivo de caracterizar mejor el espacio de soluciones de esta región especial

del espacio de parámetros de EGB.

A. Integrales de Camino en QFT

Este apéndice está escrito en base a los libros “Field Quantization” [Greiner and Reinhardt, 2013], de R. Greiner, “An introduction to quantum field theory” [Peskin, 2018], de Peskin & Schroeder y “Quantum Field Theory in a Nutshell” [Zee, 2010] de A. Zee.

El propósito de este apartado es establecer notaciones para teoría de campos y presentar en resumidas cuentas el formalismo de integral de camino en teoría de campos y distintos cálculos de interés, algunos de los cuales, utilizamos en el cuerpo del trabajo.

A.1. Integrales funcionales

Para comenzar definimos el lagrangeano de la teoría de campos como

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)), \quad (221)$$

donde usamos índices griegos para denotar $\mu = 0, 1, 2, 3$. Utilizaremos \mathbf{x} para denotar el 3-vector y x a secas para denotar el cuadrivector (x^0, x^1, x^2, x^3) .

Además con inspiración en mecánica clásica donde $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ introducimos

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_0 \phi}, \quad (222)$$

y en consecuencia el hamiltoniano de la teoría quedará

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi, \phi) = \int d^3x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}). \quad (223)$$

En el formalismo de cuantización canónica, útil principalmente para cuantizar campos libres, los campos $\phi(x)$ y $\pi(x)$ son promovidos a operadores de modo que en Heisenberg Picture satisfagan relaciones de conmutación canónicas a tiempos iguales,

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (224)$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (225)$$

Recordamos que en Heisenberg Picture los operadores evolucionan según

$$-i\hbar \dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t) = [\hat{H}, \hat{\phi}(\mathbf{x}, t)], \quad (226)$$

que se resuelve formalmente por

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{\phi}(\mathbf{x}, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}. \quad (227)$$

Los autoestados del operador de campo $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$ serán tales que

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) |\phi, t\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi, t\rangle. \quad (228)$$

Debe remarcar que $|\phi, t\rangle$ es una base que evoluciona en el tiempo dado que estamos en Heisenberg Picture. Además $|\phi, t\rangle$ debe ser leído como un ket que tiene una dependencia funcional con ϕ y no como un estado que depende del valor local de $\phi(x)$.

La evolución temporal de la base está dada por

$$|\phi, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\phi, 0\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\phi\rangle. \quad (229)$$

Como siguiente paso nos interesaría saber cual es la amplitud de transición entre dos configuraciones de campo ϕ y ϕ' ,

$$\langle\phi', t'|\phi, t\rangle = \langle\phi'| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)} |\phi\rangle. \quad (230)$$

Con solo conocer (230) nos bastaría para derivar cualquier otro resultado de la dinámica de la teoría de campos formando proyecciones convenientes.

Siguiendo un procedimiento análogo al que se realiza en integrales de camino en mecánica cuántica de una partícula se llega a la expresión

$$\langle\phi', t'|\phi, t\rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \int d^3x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\pi, \phi))}, \quad (231)$$

donde $\mathcal{D}\phi$ denota una integral funcional sobre todas las configuraciones de campo $\phi(\mathbf{x})$ y análogamente para $\mathcal{D}\pi$. Si bien no lo hemos expresado para alivianar la expresión (231), cabe destacar que tiene impuestas condiciones de contorno

$$\phi(\mathbf{x}, t') = \varphi'(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (232)$$

donde $\varphi(\mathbf{x}), \varphi'(\mathbf{x})$ denotan funciones particulares.

Si el lagrangeano \mathcal{L} tiene una dependencia cuadrática en $\partial_0 \phi$, i.e., es una forma cuadrática de $\partial_0 \phi$ entonces puede transformarse llevarse (231) de ser una integral funcional en el espacio de fases $\{\phi, \pi\}$ a una integral en el espacio de configuraciones $\{\phi\}$ comunmente conocida como integral de camino de Feynman

$$\langle\phi', t'|\phi, t\rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})}. \quad (233)$$

Para realizar cálculos suele ser de nodal importancia el valor de expectación de vacío de un producto de operadores ordenados temporalmente $\phi(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(\mathbf{x})$, o también llamado

función de n-puntos o función de Green

$$\langle 0|T(\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n))|0\rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\dots\phi(x_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi})}. \quad (234)$$

Los límites temporales en la integral de la acción de la exponencial se extienden a infinito. Para que esta integral sea convergente debe hacerse una rotación del eje temporal del tipo $t \rightarrow \pm\infty e^{-i\delta}$ de modo que el integrando tenga una exponencial real negativa.

Un artificio común para llegar a la función de n-puntos es introducir fuentes externas en la teoría que normalmente se denotan como $J(x)$,

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle_J = \mathcal{N} \int_{\phi}^{\phi'} \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) + J\phi)}. \quad (235)$$

Entonces, la funcional de vacío (amplitud de transición vacío-vacío) se lee

$$Z[J] = \langle 0|0 \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) + J\phi)}. \quad (236)$$

$Z[J]$ juega un rol central a la hora de calcular funciones de Green, dado que éstas pueden escribirse como

$$\langle 0|T(\hat{\phi}(x_1)\dots\hat{\phi}(x_n))|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (237)$$

A.2. Teoría de campos euclídea

La integral de camino de Feynman (233) y el funcional de vacío (236) son muy importantes para realizar cálculos en QFT, sin embargo, debe notarse que a priori no son integrales convergentes dado que tienen en el integrando una exponencial compleja oscilante. Para solucionar este problema se puede considerar al tiempo como una coordenada compleja y rotar el contorno de integración en un ángulo $t = e^{-i\delta}\tau$ con τ real. Con este artificio el exponente tiene una parte real negativa y queda garantizada la convergencia de la integral.

La prescripción de rotar t en el plano complejo es particularmente elegante si se elige $\delta = \pi/2$, tal es así que este caso particular tiene el nombre de Rotación de Wick.

En coordenadas ordinarias $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x_0, \mathbf{x})$ es un cuadvectores en el espacio de Minkowski, ahora definiremos coordenadas $x_{E\mu} = (x_{E1}, x_{E2}, x_{E3}, x_{E4}) \equiv (\mathbf{x}_E, x_4)$ de modo que

$$x_4 = ix_0, \quad \mathbf{x}_E = \mathbf{x}. \quad (238)$$

La coordenada temporal es rotada en $\pi/2$ y las demás quedan iguales. Si x_4 es real entonces el nuevo vector definido será un vector 4-dimensional en el espacio euclídeo.

Comprobamos que,

$$x_E^2 = x_{E\mu}x_{E\mu} = x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -x_0^2 + \mathbf{x}^2 = -x_\mu x^\mu = -x^2 \quad (239)$$

En la figura 2 se muestra el efecto de la rotación de Wick en coordenadas de Minkowski y en coordenadas euclídeas.

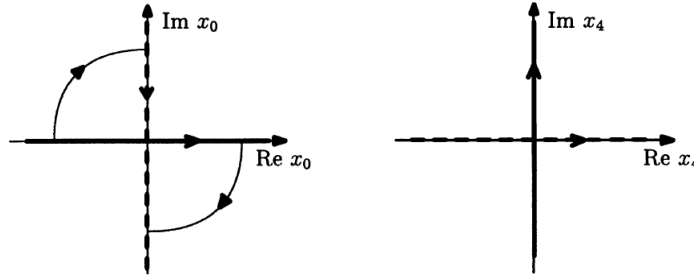


Figura 2: Efecto de la rotación de Wick sobre el eje temporal de Minkowski y euclídeo.

También introduciremos el cuadrimomento euclídeo $p_{E\mu} = (p_{E1}, p_{E2}, p_{E3}, p_{E4}) \equiv (\mathbf{p}_E, p_4)$ tal que

$$p_4 = -ip_0, \quad \mathbf{p}_E = \mathbf{p}, \quad (240)$$

con norma

$$p_E^2 = p_4^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -p_0^2 + \mathbf{p}^2 = -p^2. \quad (241)$$

Para concluir, la expresión del funcional de vacío de la teoría de campos euclídea será

$$W_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}(-i) \int d^4x_E \left(\mathcal{L}(\phi, i\frac{\partial\phi}{\partial x_4}) + J\phi \right)}, \quad (242)$$

donde la integración temporal se extiende sobre el eje real x_4 . Además el lagrangeano de un campo escalar ϕ con autointeracción $V(\phi)$ se reescribe en coordenadas euclídeas como

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2} (\partial_0\phi\partial_0\phi - \nabla\phi\nabla\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) \quad (243)$$

$$= - \left(\frac{\hbar^2}{2} \partial_{E\mu}\phi\partial_{E\mu}\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) \right). \quad (244)$$

El funcional de vacío euclídea para el campo escalar queda

$$Z_E[J] = \mathcal{N}_E \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^4x_E \left(\frac{\hbar^2}{2} \partial_{E\mu}\phi\partial_{E\mu}\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi) - J\phi \right)}, \quad (245)$$

y comprobamos que el integrando cae exponencialmente como se pretendía en un principio. Esto se satisface siempre al menos para $J = 0$ y con $V(\phi)$ acotado interiormente.

Hemos de notar que la expresión (245) en la forma

$$Z_E \propto \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}I_E[\phi]} \quad (246)$$

con una acción euclídea real y positiva sirve como punto de partida para establecer una analogía entre la teoría cuántica de campos euclídea y mecánica estadística. La integral de camino sobre todas las configuraciones de campo corresponde a la función de partición $\mathcal{Z} = \sum_n e^{\frac{1}{k_B T} E_n}$, que es una suma extendida sobre todas las configuraciones posibles de un sistema mecánico.

B. Hipersuperficies

En este apéndice introduciremos algunos conceptos básicos necesarios para entender la geometría de hipersuperficies dentro de una variedad de mayor dimensionalidad. Es de gran importancia para el trabajo de esta tesina que justamente versa sobre holografía, así como también es de gran utilidad para tener una imagen precisa sobre los cálculos realizados que requieren integración y derivación en hipersuperficies. Para su desarrollo nos centraremos en el libro de [Poisson, 2004].

Para comenzar aclaremos primero la notación que utilizaremos. Denotaremos con Σ a una hipersuperficie tipo-espacial o tipo-temporal de modo que omitiremos detalles concernientes a hipersuperficies tipo-nula. Usaremos índices griegos para $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, d$ e índices latinos para coordenadas sobre la hipersuperficie $a, b, \dots = 0, 1, \dots, d - 1$.

Tensores tangentes

Dada una hipersuperficie Σ es usual la situación en que tenemos campos tensoriales $A^{\alpha\beta\dots}$ que solo están definidos en Σ y que son tangentes a la misma. Estos tensores admitirán una descomposición en coordenadas de la hipersuperficie

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots, \quad (247)$$

donde $e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$ son las componentes de los vectores base del espacio tangente en Σ . La ecuación anterior implica que

$$A^{\alpha\beta\dots} n_\alpha = A^{ab\dots} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} \dots n_\alpha = 0, \quad (248)$$

lo que confirma que $A^{\alpha\beta\dots}$ es tangente a Σ . $A^{\alpha\beta\dots}$ siempre puede proyectarse sobre el espacio tangente mediante $h^{\alpha\beta} = h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta = g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^\alpha n^\beta$.

Las proyecciones

$$A_{\alpha\beta\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots = A_{ab\dots} = h_{am} h_{bn} A^{mn\dots} \quad (249)$$

dan el tensor definido en el espacio tridimensional Σ asociado a $A^{\alpha\beta\dots}$.

Derivada covariante intrínseca

Nos preguntamos qué relación hay entre la derivada covariante de $A_{\alpha\beta\dots}$ definida con la conexión de Levi-Civita derivada de $g_{\alpha\beta}$ y la derivada covariante de $A_{ab\dots}$ definida en términos de una conexión compatible con la métrica inducida h_{ab} .

Por simplicidad nos concentraremos en la derivación de vectores tangentes

$$A^\alpha = A^a e_a^\alpha, \quad A^\alpha n_\alpha = 0, \quad A_a = A_\alpha e_a^\alpha. \quad (250)$$

dado que la generalización a tensores de orden arbitrario resultara obviamente extensible.

Definimos la *derivada covariante intrínseca* de un 3-vector A_a definido en Σ como la proyección de $A_{\alpha;\beta}$ en la hipersuperficie Σ

$$A_{a;b} \doteq A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (251)$$

Trabajando con e_a^α y las definiciones presentadas al principio de esta sección puede arribarse a que la derivada covariante intrínseca no es otra cosa que la derivada covariante de A_a en términos de la conexión Γ_{bc}^a compatible con h_{ab} ,

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} h^{ad} (h_{dc,a} + h_{bd,b} - h_{bc,d}). \quad (252)$$

Curvatura extrínseca

Las cantidades $A_{a;b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ son las componentes del vector $A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta$ y ahora queremos averiguar si posee componentes normales a Σ .

Para responder, reexpresamos lo anterior como $A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta = g_\mu^\alpha A_{;\beta}^\mu e_b^\beta$ y descomponemos la métrica en su parte normal y tangencial,

$$A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta = (\varepsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) A_{;\beta}^\mu e_b^\beta \quad (253)$$

$$= \varepsilon (n_\mu A_{;\beta}^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha, \quad (254)$$

y vemos que mientras que el segundo término es tangente a la hipersuperficie el primer término es normal a la misma. Ahora usamos (251) y el hecho de que A^μ es ortogonal a n^μ

$$A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta = -\varepsilon (n_{\mu;\beta} A^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} A_{m;b} e_a^\alpha \quad (255)$$

$$= A_{;b}^a e_a^\alpha - \varepsilon A^a (n_{\mu;\beta} e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha. \quad (256)$$

En este punto introducimos el tensor

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (257)$$

llamado *curvatura extrínseca* o *segunda forma fundamental* de la hipersuperficie Σ . En términos de la misma tenemos,

$$A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta = A_{;b}^a e_a^\alpha - \varepsilon A^a K_{ab} n^\alpha, \quad (258)$$

y vemos que $A_{;b}^a$ da la parte puramente tangencial del campo vectorial, mientras que $-\varepsilon A^a K_{ab}$ representa la componente normal. Esto responde a nuestra problemática inicial: la componente normal se anula solo si la curvatura extrínseca es nula.

La curvatura extrínseca es una cantidad muy importante y aparece frecuente a lo largo del trabajo. Por último, cabe mencionar que puede mostrarse que la curvatura extrínseca es simétrica $K_{ab} = K_{ba}$ y además la siguiente relación:

$$K = h^{ab}K_{ab} = n^{\alpha}_{;\alpha}, \quad (259)$$

la cual muestra que K es la divergencia de la congruencia n^{α} normal a Σ en todo punto. De este resultado puede concluirse que la hipersuperficie es convexa si $K > 0$ (la congruencia es divergente) o cóncava si $K < 0$ (la congruencia es convergente).

Vemos que mientras h_{ab} esta relacionada a aspectos puramente intrínsecos de la geometría de Σ , K_{ab} se relaciona con propiedades extrínsecas (la forma en que la hipersuperficie está embebida en el espacio). Juntos, estos dos tensores proveen una caracterización completa de la hipersuperficie.

. Bibliografía

- [Abbott et al., 2016] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T., Abernathy, M., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., Addesso, P., Adhikari, R., et al. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102.
- [Aharony et al., 2000] Aharony, O., Gubser, S. S., Maldacena, J., Ooguri, H., and Oz, Y. (2000). Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, 323(3-4):183–386.
- [Alty, 1995] Alty, L. (1995). The generalized gauss–bonnet–chern theorem. *Journal of Mathematical Physics*, 36(6):3094–3105.
- [Anninos et al., 2009] Anninos, D., Li, W., Padi, M., Song, W., and Strominger, A. (2009). Warped ads3 black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2009(03):130.
- [Ayón-Beato et al., 2010] Ayón-Beato, E., Garbarz, A., Giribet, G., and Hassaine, M. (2010). Analytic lifshitz black holes in higher dimensions. *Journal of High Energy Physics*, 2010(4):1–13.
- [Ayón-Beato et al., 2009] Ayón-Beato, E., Giribet, G., and Hassaine, M. (2009). Bending ads waves with new massive gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2009(05):029.
- [Ayón-Beato et al., 2011] Ayón-Beato, E., Giribet, G., and Hassaine, M. (2011). Deeper discussion of schrödinger invariant and logarithmic sectors of higher-curvature gravity. *Physical Review D*, 83(10):104033.
- [Balasubramanian and McGreevy, 2008] Balasubramanian, K. and McGreevy, J. (2008). Gravity duals for nonrelativistic conformal field theories. *Physical Review Letters*, 101(6):061601.
- [Balasubramanian and Kraus, 1999] Balasubramanian, V. and Kraus, P. (1999). A stress tensor for anti-de sitter gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 208(2):413–428.
- [Banados et al., 1992] Banados, M., Teitelboim, C., and Zanelli, J. (1992). Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849.
- [Basanisi and Chakraborty, 2016] Basanisi, L. and Chakraborty, S. (2016). Holographic entanglement entropy in nmg. *Journal of High Energy Physics*, 2016(9):1–20.

- [Bekenstein, 2020] Bekenstein, J. D. (2020). Black holes and entropy. In *JACOB BEKENSTEIN: The Conservative Revolutionary*, pages 307–320. World Scientific.
- [Brihaye and Radu, 2008] Brihaye, Y. and Radu, E. (2008). Five-dimensional rotating black holes in einstein–gauss–bonnet theory. *Physics Letters B*, 661(2-3):167–174.
- [Brown and York Jr, 1993] Brown, J. D. and York Jr, J. W. (1993). Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407.
- [Cai, 2002] Cai, R.-G. (2002). Gauss-bonnet black holes in ads spaces. *Physical Review D*, 65(8):084014.
- [Cai et al., 2009] Cai, R.-G., Liu, Y., and Sun, Y.-W. (2009). A lifshitz black hole in four dimensional r2 gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2009(10):080.
- [Carroll, 2001] Carroll, S. M. (2001). Dark energy and the preposterous universe. *arXiv preprint astro-ph/0107571*.
- [Carroll, 2019] Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press.
- [Cartan, 1922] Cartan, E. (1922). Sur les équations de la gravitation d’einstein. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1:141–204.
- [Davis, 2003] Davis, S. C. (2003). Generalized israel junction conditions for a gauss-bonnet brane world. *Physical Review D*, 67(2):024030.
- [de Haro et al., 2001] de Haro, S., Skenderis, K., and Solodukhin, S. N. (2001). Holographic reconstruction of spacetime¶ and renormalization in the ads/cft correspondence. *Communications in Mathematical Physics*, 217(3):595–622.
- [Deser et al., 2011] Deser, S., Liu, H., Lü, H., Pope, C., Şişman, T. Ç., and Tekin, B. (2011). Critical points of d-dimensional extended gravities. *Physical Review D*, 83(6):061502.
- [Detournay et al., 2012] Detournay, S., Hartman, T., and Hofman, D. M. (2012). Warped conformal field theory. *Physical Review D*, 86(12):124018.
- [Dutta and Gopakumar, 2006] Dutta, S. and Gopakumar, R. (2006). Euclidean and noetherian entropies in ads space. *Physical Review D*, 74(4):044007.
- [Fefferman and Graham, 1985] Fefferman, C. and Graham, C. R. (1985). Elie cartan et les mathématiques d’aujourd’hui. *Astérisque*, 95.
- [Francesco et al., 2012] Francesco, P., Mathieu, P., and Sénéchal, D. (2012). *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media.

- [Garraffo and Giribet, 2008] Garraffo, C. and Giribet, G. (2008). The lovelock black holes. *Modern Physics Letters A*, 23(22):1801–1818.
- [Ghodrati and Naseh, 2016] Ghodrati, M. and Naseh, A. (2016). Phase transitions in bht massive gravity. *arXiv preprint arXiv:1601.04403*.
- [Giribet and Goya, 2013] Giribet, G. and Goya, A. (2013). The brown-york mass of black holes in warped anti-de sitter space. *Journal of High Energy Physics*, 2013(3):1–17.
- [Greiner and Reinhardt, 2013] Greiner, W. and Reinhardt, J. (2013). *Field quantization*. Springer Science & Business Media.
- [Grumiller et al., 2013] Grumiller, D., Riedler, W., Rosseel, J., and Zojer, T. (2013). Holographic applications of logarithmic conformal field theories. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(49):494002.
- [Gubser et al., 1998] Gubser, S. S., Klebanov, I. R., and Polyakov, A. M. (1998). Gauge theory correlators from non-critical string theory. *Physics Letters B*, 428(1-2):105–114.
- [Guica et al., 2009] Guica, M., Hartman, T., Song, W., and Strominger, A. (2009). The kerr/cft correspondence. *Physical Review D*, 80(12):124008.
- [Hartong et al., 2015] Hartong, J., Kiritsis, E., and Obers, N. A. (2015). Schrödinger invariance from lifshitz isometries in holography and field theory. *Physical Review D*, 92(6):066003.
- [Hawking, 1976] Hawking, S. W. (1976). Black holes and thermodynamics. *Physical Review D*, 13(2):191.
- [Hawking and Page, 1983] Hawking, S. W. and Page, D. N. (1983). Thermodynamics of black holes in anti-de sitter space. *Communications in Mathematical Physics*, 87(4):577–588.
- [Henneaux et al., 2011] Henneaux, M., Martinez, C., and Troncoso, R. (2011). Asymptotically warped anti-de sitter spacetimes in topologically massive gravity. *Physical Review D*, 84(12):124016.
- [Hohm and Tonni, 2010] Hohm, O. and Tonni, E. (2010). A boundary stress tensor for higher-derivative gravity in ads and lifshitz backgrounds. *Journal of High Energy Physics*, 2010(4):1–26.
- [Hooft, 1993] Hooft, G. (1993). Dimensional reduction in quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/9310026*.

- [Iyer and Wald, 1994] Iyer, V. and Wald, R. M. (1994). Some properties of the noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Physical review D*, 50(2):846.
- [Iyer and Wald, 1995] Iyer, V. and Wald, R. M. (1995). Comparison of the noether charge and euclidean methods for computing the entropy of stationary black holes. *Physical Review D*, 52(8):4430.
- [Kachru et al., 2008] Kachru, S., Liu, X., and Mulligan, M. (2008). Gravity duals of lifshitz-like fixed points. *Physical Review D*, 78(10):106005.
- [Kofinas and Olea, 2007] Kofinas, G. and Olea, R. (2007). Universal regularization prescription for lovelock ads gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2007(11):069.
- [Liu and Sun, 2009] Liu, Y. and Sun, Y.-W. (2009). Consistent boundary conditions for new massive gravity in ads3. *Journal of High Energy Physics*, 2009(05):039.
- [Lovelock, 1971] Lovelock, D. (1971). The einstein tensor and its generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12(3):498–501.
- [Lü and Pope, 2011] Lü, H. and Pope, C. (2011). Critical gravity in four dimensions. *Physical Review Letters*, 106(18):181302.
- [Maldacena, 1999] Maldacena, J. (1999). The large- n limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4):1113–1133.
- [Moussa et al., 2003] Moussa, K. A., Clement, G., and Leygnac, C. (2003). The black holes of topologically massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 20(24):L277.
- [Myers, 1987] Myers, R. C. (1987). Higher-derivative gravity, surface terms, and string theory. *Physical Review D*, 36(2):392.
- [Nishida and Son, 2007] Nishida, Y. and Son, D. T. (2007). Nonrelativistic conformal field theories. *Physical Review D*, 76(8):086004.
- [Perlmutter et al., 1999] Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E., et al. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565.
- [Peskin, 2018] Peskin, M. E. (2018). *An introduction to quantum field theory*. CRC press.
- [Poisson, 2004] Poisson, E. (2004). *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press.

- [Riess et al., 1998] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009.
- [Rivera-Betancour and Olea, 2018] Rivera-Betancour, D. and Olea, R. (2018). Noether-wald charges in critical gravity. *Journal of Physics: Conference Series*, 1043:012024.
- [Son, 2008] Son, D. T. (2008). Toward an ads/cold atoms correspondence: a geometric realization of the schroedinger symmetry. *Physical Review D*, 78(4):046003.
- [Stelle, 1977] Stelle, K. (1977). Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Physical Review D*, 16(4):953.
- [Susskind, 1995] Susskind, L. (1995). The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6377–6396.
- [Wald, 1993] Wald, R. M. (1993). Black hole entropy is the noether charge. *Physical Review D*, 48(8):R3427.
- [Weinberg, 2001] Weinberg, S. (2001). The cosmological constant problems. In *Sources and detection of dark matter and dark energy in the Universe*, pages 18–26. Springer.
- [Weyl, 1922] Weyl, H. (1922). *Space–time–matter*. Dutton.
- [Witten, 1998] Witten, E. (1998). Anti de sitter space and holography.
- [Zee, 2010] Zee, A. (2010). *Quantum field theory in a nutshell*, volume 7. Princeton university press.
- [Zwiebach, 1985] Zwiebach, B. (1985). Curvature squared terms and string theories. *Physics Letters B*, 156(5-6):315–317.
- [Zwierlein et al., 2004] Zwierlein, M., Stan, C., Schunck, C., Raupach, S., Kerman, A., and Ketterle, W. (2004). Condensation of pairs of fermionic atoms near a feshbach resonance. *Physical Review Letters*, 92(12):120403.